Тема 2. ИЗЛУЧЕНИЕ ЭМВ В СВОБОДНОЕ ПРОСТРАНСТВО

Лекция №4 (4). Электродинамические потенциалы ЭМП

1. Возбуждение ЭМП заданными источниками. Неоднородные уравнения Максвелла в комплексной форме.
2. Векторный и скалярный потенциалы для мгновенных значений поля.
3. Векторный и скалярный потенциалы для комплексных амплитуд. Уравнения Гельмгольца относительно векторных потенциалов.
4. Решение неоднородных уравнений Гельмгольца. Теорема запаздывающих потенциалов.

1 Волновые уравнения произвольной электромагнитной системы источников. Уравнения Гельмгольца

Физическая трактовка 1 и 2 уравнений Максвелла : изменение во времени электрического поля приводит к изменению магнитного поля и наоборот.

Волновой процесс – колебательное движение непрерывной среды.

Решение уравнений Максвелла – две волновые функции (волны): расходящаяся и сходящаяся волны.

Волнами переносится ЭМ энергия из объема, где действуют переменные сторонние токи, в окружающее этот объем пространство, где этих токов нет.

Процесс распространения в пространстве электромагнитных волн с конечной скоростью и утративших связь со своими источниками (переменными зарядами и токами), называется ***излучением электромагнитных волн.***

Решение задачи об излучении заключается в определении в любой точке пространства структуры ЭМП, возбуждаемого сторонними токами.

С математической точки зрения задачи о возбуждении ЭМВ заданными источниками сводятся к решению системы неоднородных уравнений Максвелла:

Для произвольных сигналов

$$\operatorname{rot}\overrightarrow{H} = \sigma\overrightarrow{E} + \varepsilon_a \frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t} + \vec{j}^{\text{э. ст.}}$$

$$\operatorname{rot}\overrightarrow{E} = -\mu_a \frac{\partial\overrightarrow{H}}{\partial t} - \vec{j}^{\text{м. ст.}}$$

$$\varepsilon_a \operatorname{div}\overrightarrow{E} = \rho^{\text{э.ст}}$$

$$\mu_a \operatorname{div}\overrightarrow{H} = \rho^{\text{м.ст}}$$

Для гармонических сигналов

$$\operatorname{rot}\overrightarrow{H} - i\omega\varepsilon_a\overrightarrow{E} = \vec{j}^{\,ст.э}$$

$$\operatorname{rot}\overrightarrow{E} + i\omega\mu_a\overrightarrow{H} = -\vec{j}^{\,ст.м}$$

$$\varepsilon_a \operatorname{div}\overrightarrow{E} = \rho^{\text{э.ст}}$$

$$\mu_a \operatorname{div}\overrightarrow{H} = \rho^{\text{м.ст}}$$

Для получения единственного решения системы должны быть дополнены 1) граничными условиями; 2) условиями излучения.

2 Векторный и скалярный потенциалы для мгновенных значений поля

Решение неоднородных уравнений является неточным, т.к. сторонние источники известны приближенно: данные берутся из опытов или предположений.

Выход из положения – введение *электродинамических потенциалов: векторного* ($\vec{A}^{э}$, $\vec{A}^{м}$) *и скалярного* ($u^{э}$, $u^{м}$).

Для каждого типа источника выбирается один вид потенциалов.

Вводятся с помощью 4 уравнения Максвелла и закона непрерывного тока:

$$\mu_a \vec{H} = \mathrm{rot}\, \vec{A}^{э} \qquad \mathrm{rot}\left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}^{э}}{\partial t}\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{E} = -\,\mathrm{grad}\, u^{э} - \frac{\partial \vec{A}^{э}}{\partial t}$$

Знак «минус» перед $\mathrm{grad}\, u^{э}$ введен для совпадения в случае электростатического поля функция с обычным выражением для электростатического потенциала.

Подстановка выражений для потенциалов в 1 уравнение Максвелла и учет материальных уравнений позволяет записать:

$$(\mu_0\mu)^{-1}\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{A}^{\,э} = \vec{j}^{\,э\,ст} - \varepsilon_0\varepsilon\left(\mathrm{grad}\,\frac{\partial u^{э}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \vec{A}^{\,э}}{\partial t^2}\right) - \sigma\,\frac{\partial \vec{A}^{\,э}}{\partial t} - \sigma\,\mathrm{grad}\,u^{э}$$

Введение потенциалов было произвольным. Для устранения неоднозначности вводится условие калибровки. Классическое условие – ***калибровка Лоренца***:

$$\mathrm{div}\,\vec{A}^{\,э} + \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial u^{э}}{\partial t} + \sigma\,u^{э} = 0$$

С учетом калибровки волновые уравнения принимают вид:

$$\nabla^2\vec{A}^{\,э} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}^{\,э}}{\partial t^2} + \sigma\frac{\partial\vec{A}^{\,э}}{\partial t} = -\mu_0\mu\,\vec{j}^{\,э\,ст} \qquad \nabla^2 u^{э} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 u^{э}}{\partial t^2} + \sigma\frac{\partial\vec{A}^{\,э}}{\partial t} = -\frac{\rho^{\,э\,ст}}{\varepsilon_0\varepsilon}$$

Достоинство: в правые части входят сторонние источники тока, а не их производные.

Введение электродинамических потенциалов электрического типа:

$$\vec{E} = -\frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} \operatorname{rot} \vec{A}^{м} \qquad \vec{H} = -\operatorname{grad} u^{м} - \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial \vec{A}^{м}}{\partial t} - \sigma \vec{A}^{м}$$

Условие калибровки: $\operatorname{div} \vec{A}^{м} + \mu_0 \mu \dfrac{\partial u^{м}}{\partial t} = 0$

Получаемые волновые уравнения:

$$\nabla^2 \vec{A}^{м} - \varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu \frac{\partial^2 \vec{A}^{м}}{\partial t^2} - \sigma \mu_0 \mu \frac{\partial \vec{A}^{м}}{\partial t} = -\vec{j}^{м} \qquad \nabla^2 u^{м} - \frac{\partial^2 u^{м}}{\partial t^2} - \sigma \frac{\partial u^{м}}{\partial t} = \frac{\rho^{м}}{\mu_0 \mu}$$

3 Векторный и скалярный потенциалы для комплексных амплитуд. Уравнения Гельмгольца относительно векторных потенциалов

Введение потенциалов для гармонических сигналов

Электрического типа

$$\vec{H}_m(\vec{r}) = \frac{1}{\mu_0 \mu} \operatorname{rot} \vec{A}^{э}_m(\vec{r})$$

$$\vec{E}_m(\vec{r}) = -\operatorname{grad} u^{э}_m(\vec{r}) - i\omega\mu_0\,\mu \vec{A}^{э}_m(\vec{r})$$

Магнитного типа

$$\vec{E}_m(\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} \operatorname{rot} \vec{A}^{м}_m(\vec{r})$$

$$\vec{H}_m(\vec{r}) = -\operatorname{grad} u^{м}_m(\vec{r}) - \tilde{\varepsilon}_a \vec{A}^{м}_m(\vec{r})$$

Волновые уравнения (неоднородные уравнения Гельмгольца):

$$\nabla^2 \vec{A}^{э}_m(\vec{r}) + \gamma^2 \vec{A}^{э}_m(\vec{r}) = -\vec{j}^{\,э\,ст}$$

$$\nabla^2 u^{э}_m(\vec{r}) + \gamma^2\, u^{э}_m(\vec{r}) = -\frac{\rho^{\text{э.ст}}}{\varepsilon_0 \varepsilon}$$

$$\nabla^2 \vec{A}^{м}_m(\vec{r}) + \gamma^2 \vec{A}^{м}_m(\vec{r}) = -\vec{j}^{\,м\,ст}_m$$

$$\nabla^2 u^{м}_m(\vec{r}) + \gamma^2 u^{м}_m(\vec{r}) = -\frac{\rho^{м.сс}_m}{\mu_0 \mu}$$

$\gamma = ik = \omega\sqrt{\tilde{\varepsilon}_a \tilde{\mu}_a} = k_\alpha - ik_\beta$ - коэффициент распространения;

k_α - коэффициент затухания;

k_β - коэффициент фазы.

Уравнения связи:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{E} &= -i\omega\mu_a \vec{A}^{э} + \frac{1}{i\omega\tilde{\varepsilon}_a}\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{A}^{э} - \mathrm{rot}\,\vec{A}^{м} \\ \vec{H} &= \mathrm{rot}\,\vec{A}^{э} - i\omega\tilde{\varepsilon}_a \vec{A}^{м} + \frac{1}{i\omega\mu_a}\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{A}^{м} \end{aligned}}$$

$\tilde{\varepsilon}_a = \varepsilon_0\varepsilon - i\sigma^{э}/\omega$ - комплексная диэлектрическая проницаемость (для реальных сред с потерями)

Достоинство: 1) в правые части входят сторонние источники тока, а не их производные;

2) число неизвестных сокращается с 6 до 4.

4 Решение неоднородных уравнений Гельмгольца. Теорема запаздывающих потенциалов

Решение рассмотрим на примере источников электрического типа – потенциалы электрические.

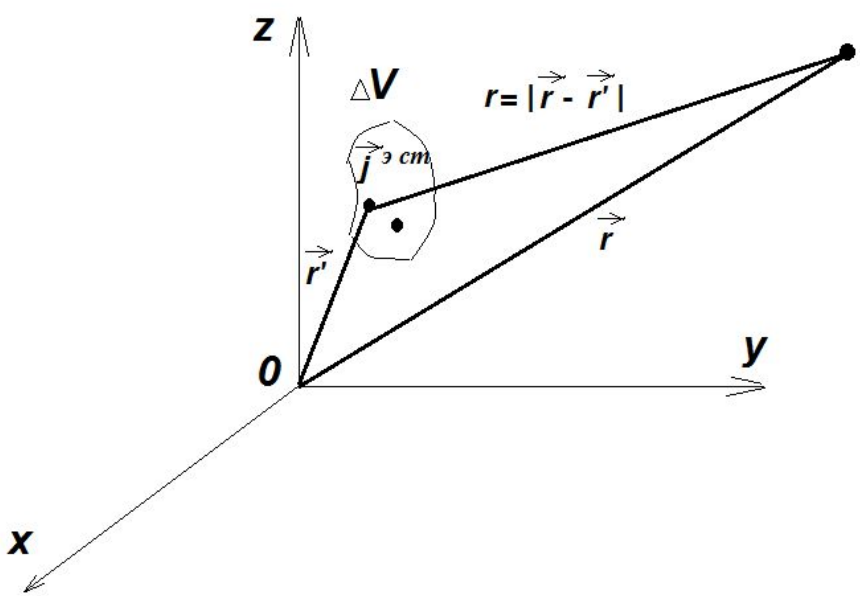

Рисунок 1 – Геометрия задачи

Допущения: 1) среда изотропная;
2) волновое число определяется выражением

$$\tilde{k} = k_\beta - ik_\alpha$$

Вид волновых уравнений:

$$\nabla^2 \vec{A}_m^{э}(\vec{r}) - \tilde{k}^2 \vec{A}_m^{э}(\vec{r}) = -\vec{J}^{\,э\,ст}$$

$$\nabla^2 u_m^{э}(\vec{r}) - \tilde{k}^2 u_m^{э}(\vec{r}) = -\frac{\rho^{э.ст}}{\varepsilon_0 \varepsilon}$$

Последовательность решения:

1. Предположим, что
   - сторонний электрический ток занимает весьма малую область $\Delta V \to 0$ вблизи начала координат;
   - остальное пространство удовлетворяет однородным волновым уравнениям;
   - решение симметрично в сферической системе координат (не зависит от углов θ, ϕ).
2. С учетом предположений решение имеет вид: $u_m^{э}(\vec{r}) = \dfrac{B}{r}\exp(-i\widetilde{k}r)$
3. Нахождение коэффициента B, описывающего интенсивность источника. 1) Понижаем частоту излучения ($\widetilde{k} = \omega\sqrt{\varepsilon_a \mu_a} \to 0$). В пределе получаем поле электростатического заряда:

$$B = \frac{\rho_m^{\text{э.ст}} \Delta V}{4\pi\varepsilon_{\text{а}}}$$

2) Возвращаемся к произвольной частоте и произвольному объему:

$$u_m^{э}(\vec{r}) = \int_V \frac{\rho_m^{\text{э.ст}} \exp(-i\widetilde{k}r)}{4\pi\varepsilon_{\text{а}} r} dv$$

Последовательность решения:

4. Представляем векторное уравнение тремя скалярными проекциями и используем замены типа:

$$\frac{\rho_m^{\text{э.ст}}}{\tilde{\varepsilon}_{\text{а}}} \to \tilde{\mu}_a \vec{J}_{m,x,y,z}^{\text{э.ст}} \qquad u_m^{\text{э}} \to A_{m,x,y,z}^{\text{э}}$$

5. Решение после преобразований принимает вид ***интеграла Кирхгофа для запаздывающих потенциалов***:

$$\vec{A}_m^{\text{э}}(\vec{r}) = \frac{\tilde{\mu}_a}{4\pi} \int_V \overrightarrow{\dot{j}_m^{\text{э.ст}}(\vec{r}\,')} \frac{\exp(-i\tilde{k}r)}{r} dv$$

Векторный ***потенциал*** называется ***запаздывающим***.

Экспоненциальный множитель соответствует конечной скорости распространения волны до источника со скоростью $v = \omega / \beta$.

Время запаздывания воздействия

$$t_{\text{з}} = \frac{r}{v} = \frac{k_\beta\, r}{\omega}$$

Теорема запаздывающих потенциалов:

Векторный потенциал в точке с радиус-вектором $\vec{r}$ в момент времени t является функцией токов в точке расположения источников, существовавших в более ранний момент времени.

Токи и заряды меняются по гармоническому закону. В связи с этим экспоненциальный множитель в среде без потерь имеет вид:

$$\exp[i\omega(t - r/v)] = \exp(i\omega t)\exp(-i\omega r/v) = \exp(i\omega t)\exp(-ik_\beta r)$$

Вывод: применительно к гармоническим процессам запаздывание

на время $t_з = \dfrac{r}{v} = \dfrac{k_\beta r}{\omega}$ учитывается множителем $\exp(-ik_\beta r)$ и

означает сдвиг по фазе на величину $\omega r / v$.