1. КИНЕМАТИКА

1.1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Кинематикой называют раздел механики, изучающий способы (не причины!) описания движений и связь между величинами, характеризующими эти движения.

МОДЕЛИ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ:

Материальная точка (МТ) – любой объект, формой и размерами которого в данной задаче (в данных условиях) можно пренебречь;

Набор конечного числа материальных точек – достаточно общая модель произвольной механической системы.

Абсолютно твёрдое тело (АТТ) – тело, форма и размеры которого при наличии тех воздействий, что описаны в условиях задачи, могут считаться неизменными. АТТ можно рассматривать как набор материальных точек с неизменными расстояниями между ними.

Тело отсчёта, жёстко связанная с ним система координат и часы образуют **систему отсчёта (СО).**

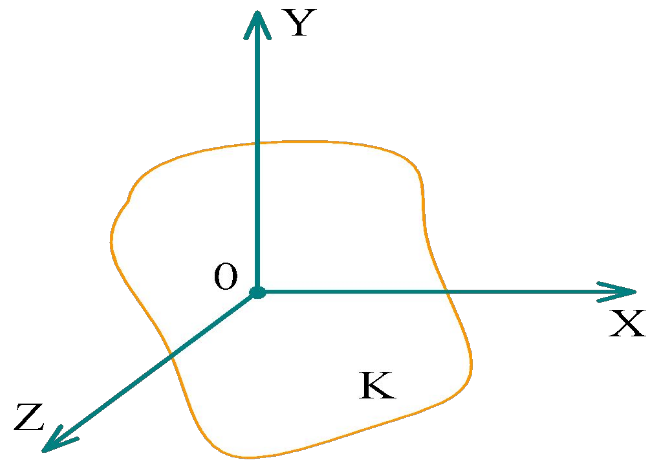

Рис. 1. 1

O – начало координат (начало отсчёта); K – название системы отсчёта.
Положение МТ в пространстве в определённый момент времени задаётся тремя её координатами (например, декартовыми,) или радиус-вектором :

$$r_x = x\ ,\ r_y = y,\ r_z = z\ . \qquad (1.1)$$

При движении МТ её координаты становятся функциями времени:

$$x = x(t),\ y = y(t),\quad z = z(t). \qquad (1.2\ а,\ б,\ в)$$

Аналогично,

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \qquad (1.3)$$

Закон движения МТ– правило, по которому можно определить её положение в любой момент времени.
P.S. Закон движения (1.2 а, б, в) можно рассматривать как уравнения траектории, заданной в параметрическом виде (в роли параметра t).

ОСНОВНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ, ОПИСЫВАЮЩИЕ ДВИЖЕНИЕ МТ (m)

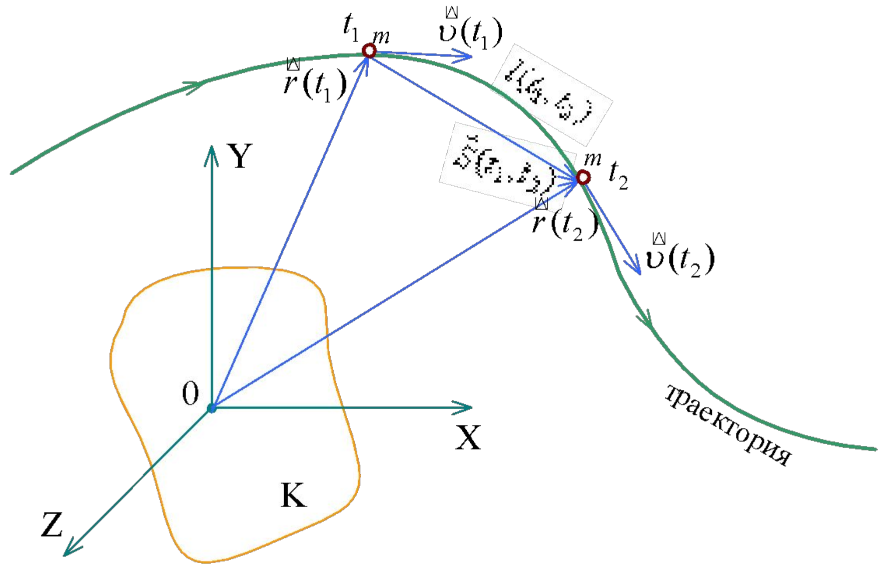

Рис.1.2

$\vec{r}(t_1)$ *– радиус-вектор в момент* t_1*,* $\vec{r}(t_2)$ *– в момент* t_2*,*

$\vec{s}(t_1,t_2)$ *– перемещение за промежуток времени* (t_1,t_2)

$l(t_1,t_2)$ *– путь за* (t_1,t_2) *(длина отрезка траектории),*

$\vec{\upsilon}(t_1)$ *– мгновенная скорость в момент времени* t_1*,*

$\vec{\upsilon}(t_2)$ *– мгновенная скорость в момент* t_2*.*

PS. Векторы скорости $\vec{\upsilon}(t_1)$ и $\vec{\upsilon}(t_2)$ – касательные к траектории.

Очевидно:

$$\vec{s}(t_1, t_2) = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) \equiv \Delta\vec{r} \quad . \qquad (1.4)$$

При малых $\Delta t \equiv t_2 - t_1$ очевидно, что

$$\left|\vec{s}(t_1, t_2)\right| \approx l(t_1, t_2) \quad . \qquad (1.5)$$

Средняя скорость

$$\vec{\upsilon}_{cp}(t_1, t_2) \equiv \frac{\vec{s}(t_1, t_2)}{t_2 - t_1} \equiv \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \quad . \qquad (1.6)$$

Мгновенная скорость

$$\vec{\upsilon}(t) \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \vec{\upsilon}_{cp}(\mathrm{t}, \mathrm{t} + \Delta t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} . \qquad (1.7\ а)$$

PS. Другой вид математической записи («точка» обозначает производную по времени)

$$\vec{\upsilon}(t) \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \dot{\vec{r}} . \qquad (1.7\ б)$$

Средняя путевая скорость

$$\upsilon_{cp}^{(l)} \equiv \frac{l(t_1, t_2)}{t_2 - t_1} \equiv \frac{\Delta l}{\Delta t} \quad , \qquad (1.8)$$

$\Delta l \equiv l(t_2, t_1)$ – *путь, пройденный за* $\Delta t \equiv t_2 - t_1$. При $\Delta t \to 0$ получаем:

Мгновенная путевая скорость (при $\Delta t \to 0$**):**

Или

$$\upsilon^{(\ )} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta l}{\Delta t} \cdot \qquad (1.9)$$

$$\upsilon^{(\ )} \equiv \frac{dl}{dt} \,. \qquad (1.10)$$

Из (1.5), (1.6), (1.7а), (1.8) и (1.9), следует, что мгновенная путевая скорость совпадает с модулем вектора мгновенной скорости $|\vec{\upsilon}| \equiv \upsilon$ (*подумать!*):

$$\upsilon^{(\ )} \equiv \upsilon \,. \qquad (1.11)$$

Среднее ускорение за промежуток времени (t_1, t_2) :

$$\vec{a}_{cp}(t_1, t_2) \equiv \frac{\vec{\upsilon}(t_2)\text{-}\vec{\upsilon}(t_1)}{t_2\text{-}t_1} \equiv \frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t} \,. \qquad (1.12)$$

Мгновенное ускорение (в момент t) :

$$\vec{a}(t) \equiv \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} \equiv \dot{\vec{\upsilon}} \,. \qquad (1.13)$$

Очевидно:

$$\vec{a} \equiv \ddot{\vec{r}} \equiv \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \,. \qquad (1.14)$$

***PS.*1** Если закон движения задан, например, известна зависимость $\vec{r}(t)$, то мы имеем о движении **полную информацию**, и все величины, определённые равенствами (1.6) – (1.14) легко вычисляются, точно так же, как и их проекции на декартовы оси.

***PS.*2** Переход $\vec{r}(t) \to \vec{\upsilon}(t)$ и $\vec{\upsilon}(t) \to \vec{a}(t)$ выполняется с помощью дифференцирования.

Обратно: $\vec{\upsilon}(t) \to \vec{r}(t)$, $\vec{a}(t) \to \vec{\upsilon}(t)$ выполняется с помощью интегрирования.
Чтобы найти $\vec{r}(t)$ по заданной $\vec{\upsilon}(t)$, необходимо знать начальное значение $\vec{r}_0 \equiv \vec{r}(0)$;

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \int_0^t \vec{\upsilon}(t')dt' = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{\upsilon}(t')dt' \quad (1.15)$$

Аналогично:

$$\vec{\upsilon}(t) = \vec{\upsilon}(0) + \int_0^t \vec{a}(t')dt' = \vec{\upsilon}_0 + \int_0^t \vec{a}(t')dt' \quad (1.16)$$

Пример 1.
Пусть МТ движется с $\vec{a} = const$. Тогда с помощью (1.16) можно найти

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + \vec{a}t \quad (1.17)$$

Интегрируя ещё раз, получаем закон движения:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{\upsilon}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2} \quad (1.18)$$

Это равенства, связывающие кинематические величины в общем случае, т.е. при произвольном движении МТ.
Пример 2. (из школьной жизни!). Прямолинейное равноускоренное движение.

$$2as = \upsilon^2 - \upsilon_0^{\ 2};$$
$$s = \upsilon_0 t + at^2/2;$$
$$\upsilon = \upsilon_0 + at;$$
$$a = const.$$

Очевидно, что

$$\upsilon = s'(t); \quad (1.19)$$
$$a = \upsilon'(t) = s''(t).$$

Векторные равенства можно записать в проекциях на оси координат:

$$(\upsilon_x)_{ср} = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad \upsilon_x = \frac{dx}{dt}, \qquad (1.20а,б)$$

$$(a_x)_{ср} = \frac{\Delta \upsilon_x}{\Delta t}, \quad a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt}, \qquad (1.21а,б)$$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t \upsilon_x(t')dt' \qquad (1.22)$$

$$\upsilon_x(t) = \upsilon_{0x} + \int_0^t a_x(t')dt' \qquad (1.23)$$

и т.д.

1.2. КРИВОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ НА ПЛОСКОСТИ. УСКОРЕНИЕ ПРИ КРИВОЛИНЕЙНОМ ДВИЖЕНИИ: ТАНГЕНЦИАЛЬНОЕ И НОРМАЛЬНОЕ УСКОРЕНИЯ.

Итак

$$\vec{a}(t) \equiv \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} \equiv \dot{\vec{\upsilon}}$$

Очевидно, при криволинейном движении ускорение материальной точки отлично от нуля, т.к. вектор скорости изменяется по *величине* и по *направлению.*

Представим вектор скорости МТ в виде

$$\vec{\upsilon} = \upsilon\vec{\tau} \qquad (1.24)$$

где

$$|\vec{\tau}| = 1 . \qquad (1.25)$$

т.е. $\vec{\tau}$ – единичный вектор, направленный по скорости $\vec{\upsilon}$.

Продифференцируем уравнение (1.24),:

$$\vec{a} \equiv \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d\upsilon}{dt}\vec{\tau} + \upsilon\frac{d\vec{\tau}}{dt} . \qquad (1.26)$$

Обозначим:

$$\vec{a}_\tau \equiv \frac{d\upsilon}{dt}\vec{\tau} , \qquad (1.27)$$

$$\vec{a}_n \equiv \upsilon\frac{d\vec{\tau}}{dt} . \qquad (1.28)$$

Тогда:

$$\vec a = \vec a_\tau + \vec a_n \qquad (1.29)$$

Первое слагаемое в (1.29) $\vec a_\tau$ – **касательное** или **тангенциальное** ускорение:

при $\frac{d\upsilon}{dt} > 0$, $\vec a_\tau \uparrow\uparrow \vec\upsilon$ (1.30а)

при $\frac{d\upsilon}{dt} < 0$, $\vec a_\tau \uparrow\downarrow \vec\upsilon$ (1.30б)

Второе слагаемое - $\vec a_n$ называется **нормальной составляющей**,

она нормальна, т.е. перпендикулярна, к вектору скорости (см. ниже!).

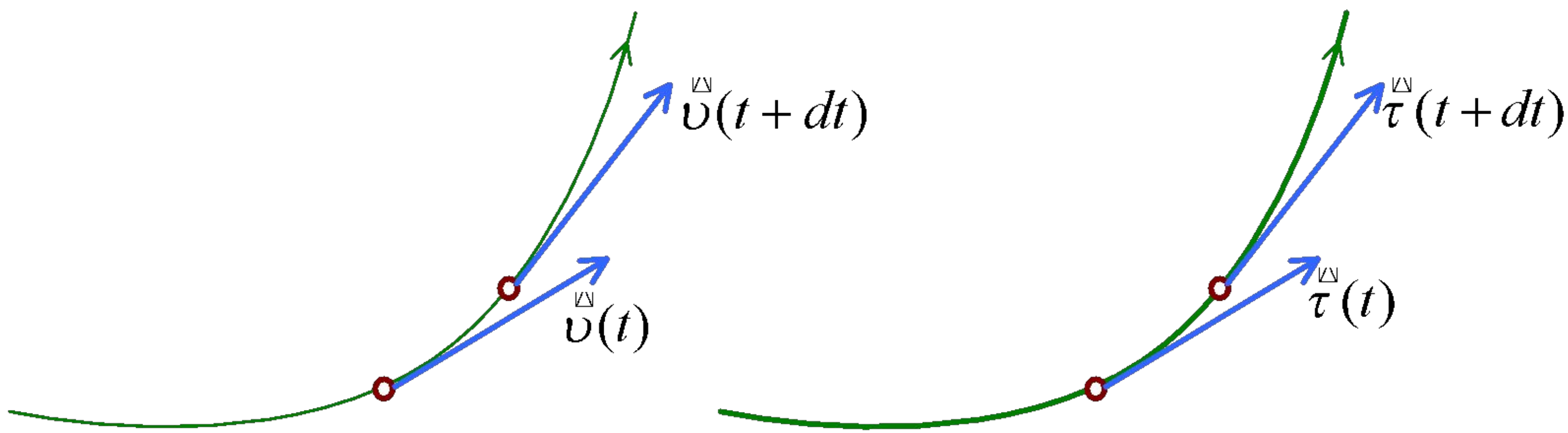

Рис.1.3

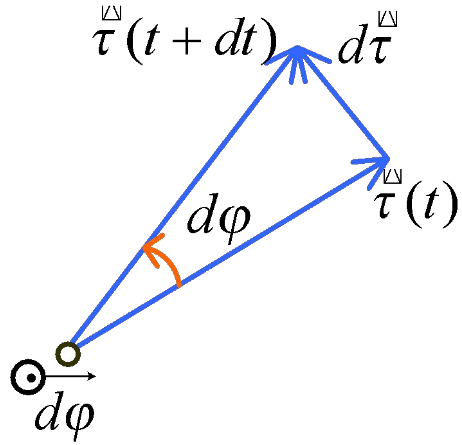

Рис.1.4

Можно считать:

$$d\vec{\tau} \perp \vec{\tau}(t) \qquad (1.31)$$

Рассматривая этот треугольник как бесконечно малый сектор, имеем

$$\frac{|d\vec{\tau}|}{|\vec{\tau}|} = |d\varphi| \qquad (1.32)$$

Но $|\vec{\tau}| = 1$. Отсюда

$$|d\vec{\tau}| = |d\varphi| \qquad (1.33)$$

Если ввести бесконечно малый вектор поворота $\overrightarrow{d\varphi}$, направление которого указано на рисунке 1.4 – «к нам», – то будем иметь с учётом (1.31) и (1.33):

$$d\vec{\tau} = \left[\overrightarrow{d\varphi}, \vec{\tau}\right] \quad (1.34)$$

Таким образом, (см. (1.31), (1.28)),

$$\vec{a}_n \perp \vec{\upsilon} \quad (1.35)$$

Следовательно, равенство (1.29) – разложение вектора ускорения на две взаимно перпендикулярные составляющие.

Далее, $\vec{a}_n$ можно представить в виде

$$\vec{a}_n = \upsilon\left[\frac{\overrightarrow{d\varphi}}{dt}, \vec{\tau}\right] = \left[\frac{\overrightarrow{d\varphi}}{dt}, \vec{\upsilon}\right] \quad (1.36)$$

Направления $\vec{a}_\tau$, $\vec{a}_n$, $\vec{a}$ в случае $d\upsilon/dt > 0$ показаны на рисунке 1.5.

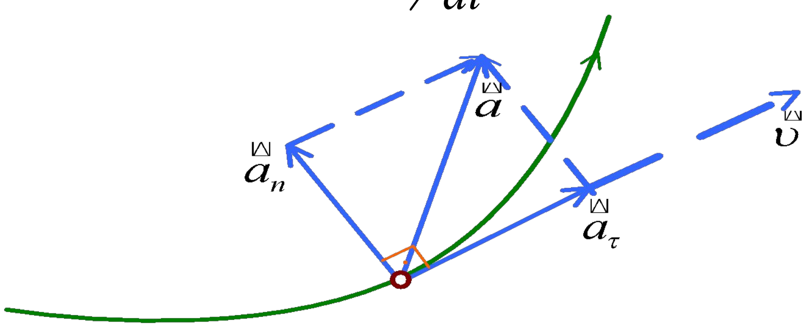

Рис.1.5

Если считать малый отрезок криволинейной траектории частью окружности, то величина

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \qquad (1.37)$$

называется **вектором угловой скорости**.

Вектор $\vec{\omega}$ определяет как направление поворота, так и величину угла поворота радиуса-вектора за единицу времени.

Направление движения МТ по окружности и направление $\vec{\omega}$ связаны **правилом буравчика**.

1.3 НЕРАВНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ПО ОКРУЖНОСТИ. УГЛОВАЯ СКОРОСТЬ И УГЛОВОЕ УСКОРЕНИЕ. СВЯЗЬ МЕЖДУ ЛИНЕЙНЫМИ И УГЛОВЫМИ ВЕЛИЧИНАМИ. РАДИУС КРИВИЗНЫ ПЛОСКОЙ ТРАЕКТОРИИ.

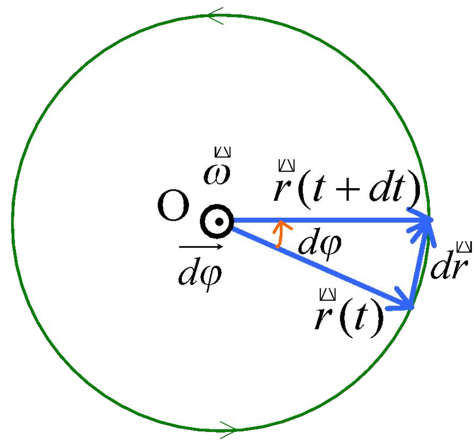

Рис.1.6

Рассмотрим окружность радиуса r, по которой движется материальная точка (рис.1.6).

PS. $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t) \neq const$. При движении против часовой стрелки $\vec{\omega}$ направлена «к нам», по часовой – «от нас».

За время dt радиус-вектор $\vec{r}$ изменится на $d\vec{r}$: от значения $\vec{r}(t)$ до значения $\vec{r}(t+dt)$. Используя аналогию треугольников, построенных из векторов, которые показаны на рис. 1.4 и 1.6, нетрудно получить равенство, аналогичное соотношению (1.34):

$$d\vec{r} = \left[d\vec{\varphi}, \vec{r}\right] \quad (1.40)$$

Поделив обе части (1.40) на dt, будем иметь

$$\vec{\upsilon} = [\vec{\omega}, \vec{r}] \qquad (1.41)$$

Дифференцируя (1.41), находим ускорение:

$$\vec{a} = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}, \vec{r}\right] + [\vec{\omega}, \vec{\upsilon}] \qquad (1.42)$$

Второе слагаемое в (1.42) (см. (1.36)) есть нормальное ускорение:

$$[\vec{\omega}, \vec{\upsilon}] = \vec{a}_n \qquad (1.43)$$

Тогда первое, очевидно, равно $\vec{a}_\tau$:

$$\vec{a}_\tau = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}, \vec{r}\right] \qquad (1.44)$$

Введём новое определение: **угловым ускорением** МТ назовём величину

$$\vec{\varepsilon} \equiv \frac{d\vec{\omega}}{dt} \qquad (1.45)$$

Теперь ускорение её запишется с учётом (1.41) в виде

$$\vec{a} = [\vec{\varepsilon}, \vec{r}] + [\vec{\omega}[\vec{\omega}, \vec{r}]] \quad (1.46)$$

Двойное векторное произведение в (1.46) вычислим по известной математической формуле

$$[\vec{a}[\vec{b}, \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{b}) \quad (1.47)$$

что даёт

$$[\vec{\omega}[\vec{\omega}, \vec{r}]] = \vec{\omega}(\vec{\omega}, \vec{r}) - \vec{r}(\vec{\omega}, \vec{\omega}) \quad (1.48)$$

Учитывая, что $\vec{\omega} \perp \vec{r}$, получаем:

$$[\vec{\omega}[\vec{\omega}, \vec{r}]] = -\omega^2 \vec{r} \quad (1.49)$$

Таким образом, в разложении (1.29)

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$$

слагаемые имеют вид:

$$\vec{a}_\tau = [\vec{\varepsilon}, \vec{r}], \qquad \vec{a}_n = -\omega^2 \vec{r} \quad (1.50\ а,б)$$

Очевидно, нормальная составляющая ускорения – это хорошо известно из школьного курса **центростремительное ускорение**.

Ускорение материальной точки , движущейся по окружности, называют также **полным ускорением**.

Рассмотрим аналогию между ускоренными прямолинейным и криволинейным движениями (на примере МТ, движущейся по окружности).

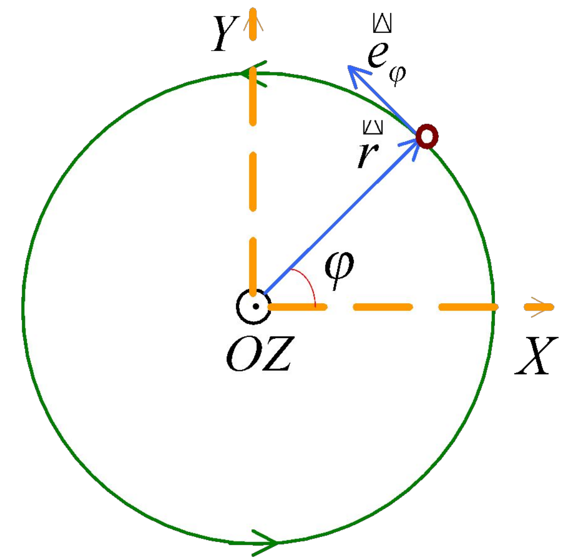

Рис.1.7

Ось OZ направлена «к нам», $\vec{e}_\varphi$ – единичный вектор, указывающий направление отсчёта положительных углов, которое связано с

направлением OZ правилом буравчика

Для движения вдоль оси *OX* имеем

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} \cdot \quad a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad (1.51а, б)$$

Для движения по окружности:

$$\omega_z = \frac{d\varphi}{dt}, \qquad \varepsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \qquad (1.52а,б)$$

Равнопеременное движение вдоль оси описывается равенствами:

$$a_x = const, \qquad (1.53\ а)$$

$$\upsilon_x = \upsilon_{0x} + a_x t, \qquad (1.53\ б)$$

$$x = x_0 + \upsilon_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}, \qquad (1.53\ в)$$

$$\Delta x = \upsilon_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}. \qquad (1.53\ г)$$

Равнопеременное движение по окружности:

, (1.54 а)

$$\varepsilon_z = const, \qquad (1.54\ б)$$

$$\omega_z = \omega_{0z} + \varepsilon_z t, \qquad (1.54\ в)$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_{0z} t + \frac{\varepsilon_z t^2}{2}, \qquad (1.54\ г)$$

$$\Delta\varphi = \omega_{0z} t + \frac{\varepsilon_z t^2}{2}$$

где $\Delta\varphi$ – угловое перемещение материальной точки.

Таблица соответствия линейных и угловых величин

линейные	$d\vec{r}$	$\vec{\upsilon}$	$\vec{a}_\tau$	x	υ_x	a_x
угловые	$\overrightarrow{d\varphi}$	$\vec{\omega}$	$\vec{\varepsilon}$	φ	ω_z	ε_z

Уравнения, связывающие линейные и угловые переменные, характеризующие движение МТ по окружности $(|\vec{r}| = R)$:

$d\vec{r} = [\overrightarrow{d\varphi}, \vec{r}]$, $\quad |d\vec{r}| = |\overrightarrow{d\varphi}| \cdot R$ (1.55а, б)

$\vec{\upsilon} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$, $\quad \upsilon = \omega R$; $\quad \upsilon_\varphi = \omega_z R$ (1.56а, б, в)

$\vec{a}_\tau = [\vec{\varepsilon}, \vec{r}]$, $\quad a_\tau = \varepsilon R$; $\quad a_\varphi = \varepsilon_z R$ (1.57а, б, в)

Здесь $\upsilon_\varphi, a_\varphi$ – проекции скорости и ускорения на вектор $\vec{e}_\varphi$,

$|\upsilon_\varphi| = \upsilon$; $\quad |a_\varphi| = |\vec{a}_\tau|$ (1.58 а, б)

$\vec{a}_n = -\omega^2 \vec{r}$, $\quad a_n = \omega^2 R = \dfrac{\upsilon^2}{R}$ (1.59 а, б)

Малую окрестность точки плоской криволинейной траектории материальной точки можно рассматривать как малую дугу некоторой окружности. Радиус этой окружности – **радиус кривизны траектории** в окрестности данной точки, $R_{кр}$. Эта величина удовлетворяет равенству аналогичному (1.59 б).

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R_{кр}}. \quad (1.60)$$