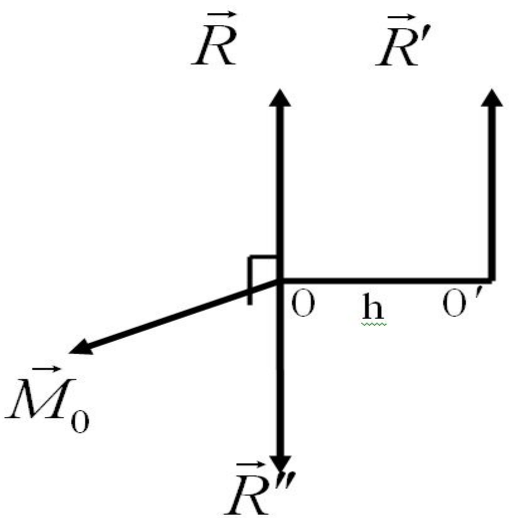
Возможные случаи приведения к равнодействующей сил произвольно расположенных в пространстве.

- По инвариантам статики можно судить о возможных частных случаях приведения исходных системы сил. $\vec{R} \neq 0, \vec{M}_0 = 0$
- Система сил приводится к одной силе – равнодействующей, при этом линия действия равнодействующей проходит через центр приведения. $\vec{R} = 0, \vec{M}_0 \neq 0.$
- Исходную систему сил можно заменить двумя силами, образующими пару сил.

$$\vec{R} \neq 0, \vec{M}_0 \neq 0.$$

Система сил приводится к силе и паре.

а) $\vec{R}\cdot\vec{M}_0 = 0$, т.е. $\vec{R}\perp\vec{M}_0$ - пара и сила лежат в одной плоскости.

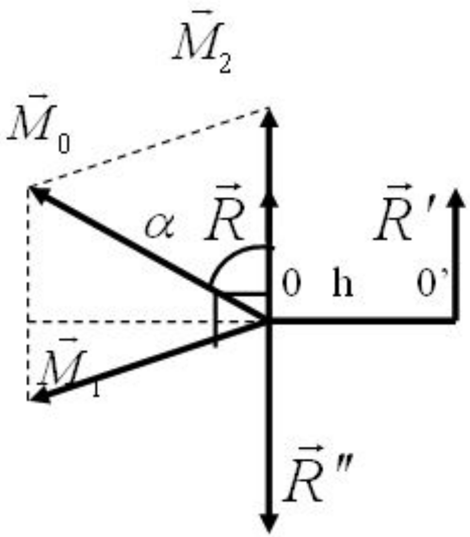


Выбирая силы, составляющие пару $\{\vec{R}', \vec{R}''\}$; $\vec{R}' = -\vec{R}'' = \vec{R}$ находим её плечо $h\cdot R = M_0$; $h = \dfrac{M_0}{R}$.

Силы образуют уравновешенную систему сил. В результате исходная система сил приводится к равнодействующей $\{\vec{R}, \vec{R}', \vec{R}''\} \sim \{\vec{R}',\}$, которая проходит через т. O', отстоящую от центра приведения на расстоянии, равном отношению главного момента к главному вектору.

Этот случай всегда реализуется у плоской системы сил при отличных от нуля главном векторе и главном моменте.

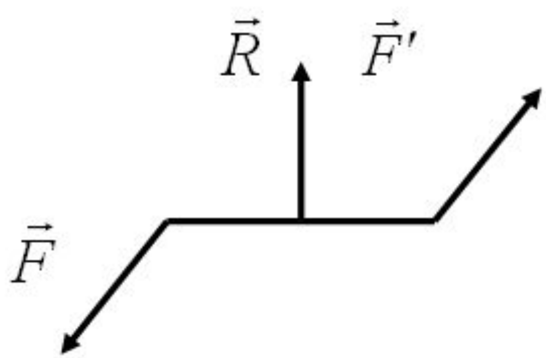
б) $R \cdot M_0 \neq 0$ - система сил приводится к силе и паре, не лежащих в одной плоскости.



Разложим главный момент так, чтобы $\vec{M}_0 = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$, $\vec{M}_1 \perp \vec{R}$. Для составляющей $\vec{M}_1$ проводим аналогичные предыдущему случаю рассуждения.

Тогда $h \cdot R = M_1$. $h = \dfrac{M_1}{R} = \dfrac{M_0 \sin\alpha}{R}$

и в центре $0'$ имеем силу и пару, лежащую в плоскости, перпендикулярной силе, которые образуют силовой (динамический) винт. Момент этой пары равен проекции главного момента на направление главного вектора и не зависит от выбора центра приведения.



$$m(\vec{F}, \vec{F}') = M_0 \cdot \cos\alpha.$$

IV) $\vec{R} = 0, \vec{M}_0 = 0$ - уравновешенная система сил.

Условие равновесия пространственной системы сил.

Произвольной пространственной системой сил называется система сил линии действия которых не лежат в одной плоскости.

Согласно основной теоремы статики (теореме Пуансо), любую произвольную систему сил, действующих на твердое тело, можно заменить эквивалентной системой, состоящей из силы (главного вектора системы) и пары сил (главного момента сил).

Отсюда вытекает условие равновесия произвольной пространственной системы сил:

В геометрической форме: для равновесия произвольной пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы главный вектор и главный момент системы равнялись нулю.

$$\vec{R} = 0, \quad \vec{M}_0 = 0.$$

В аналитической форме: для равновесия произвольной пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на три координатные оси и суммы моментов всех сил относительно этих осей были равны нулю.

$$\sum F_{kx} = 0, \quad M_x(F_k) = 0$$

$$\sum F_{ky} = 0, \quad M_y(F_k) = 0$$

$$\sum F_{kz} = 0, \quad M_z(F_k) = 0.$$

Условие равновесия могут быть использованы для решения задач на равновесие при определении неизвестных величин (реакций связей).

Чтобы задача была статистически определимой, число неизвестных должно быть не более 6.

В частности для системы параллельных сил условиями равновесия являются следующие равенства:

$$\sum F_{kx} = 0$$

$$M_x(F_k) = 0$$

$$M_y(F_k) = 0.$$

Инварианты системы сил.

Физические величины инвариантны относительно данного преобразования координат, если значения этих величин не меняются при переходе к другой системе координат.

Главный вектор для любого центра приведения выражается векторной суммой:

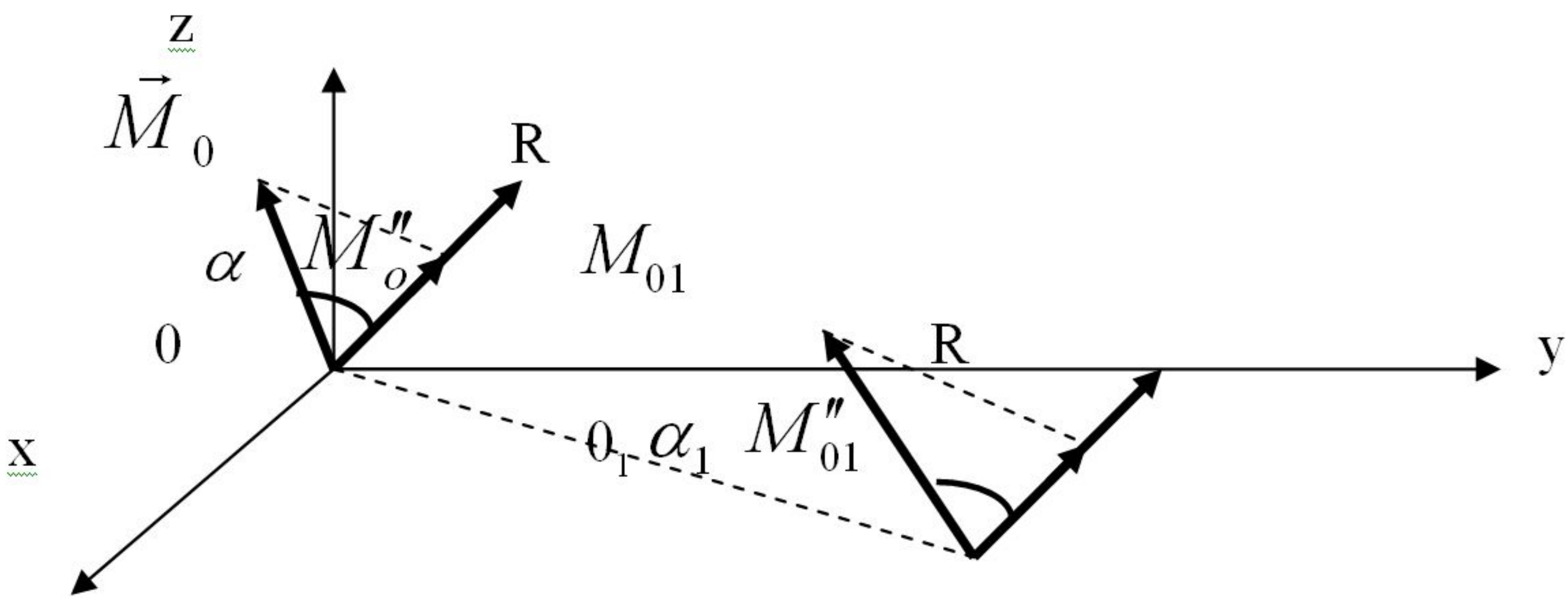
$$\vec{R} = \sum F_i \ .$$

Таким образом, главный вектор системы сил является *векторным инвариантом.* Для одной и той же системы сил он не зависит от выбора центра приведения.

Получим второй *скалярный инвариант.* Для этого умножим правую и левую части уравнения (3.1) скалярно на $\vec{R}$: $\vec{M}_{01} = \vec{M}_0 \times \vec{0}\vec{0}_1 \times R$ (3.1)

получим: $\vec{M}_{01} \cdot \vec{R} = \vec{M}_0 \cdot \vec{R} + (\vec{0}\vec{0}_1 \times \vec{R})\vec{R}$ (3.2)

Т.к. смешанное произведение векторов, содержащих два одинаковых множителя R, равно нулю, т.е $(\vec{R} \times \vec{0}\vec{0}) \cdot \vec{R} = 0.$


z
$\vec{M}_0$
R
M''_o
α
M_{01}
0
R
y
x
0_1
α_1
M''_{01}

Из формулы (3.2) видно, скалярное произведение главного момента на главный вектор не зависит от центра приведения, т.е. является вторым *скалярным инвариантом.*

$\vec{M}_{01} \cdot R\cos\alpha_1 = M_0 \cdot R\cos\alpha$, где α_1 – угол между векторами $\vec{M}_{01}$ и $\vec{R}$,

α – угол между $\vec{M}_0$ и $\vec{R}$. После сокращения на $\vec{R}$:

$$M_{01} \cdot \cos\alpha_1 = M_0 \cdot \cos\alpha \qquad (3.3).$$

Проекция главного момента на линию действия главного вектора не зависит от центра приведения.

Разложим главный момент в каждом центре приведения на две взаимно перпендикулярные составляющие, одна из которых направлена по главному вектору $\vec{R}$ (рис.). Учитывая, что главные векторы в различных центрах приведения согласно (3.3) равны, получим: $\vec{M}_0'' = \vec{M}_{01}''$.

Условие равновесия системы сходящихся сил.

Пусть на абсолютно твердое тело действует система сходящихся сил. Тогда для равновесия этой системы сил необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая системы $\vec{R}$ была равна нулю, т.е. $\vec{R} = \sum \vec{F}_i = 0$ (3.4) - это условие равновесия в векторной форме.

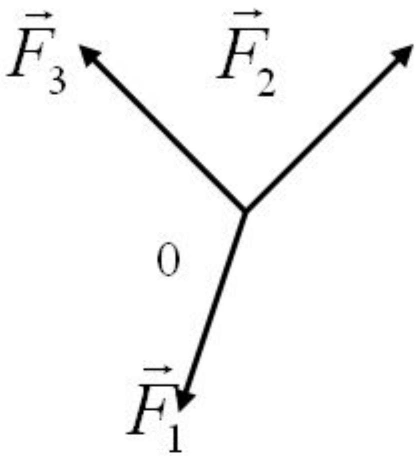
В проекциях на оси декартовых координат условие равновесия представляют так:

$$\left.\begin{aligned} \sum R_x = \sum F_{ix} = 0 \\ \sum R_y = \sum F_{iy} = 0 \\ \sum R_z = \sum F_{iz} = 0 \end{aligned}\right\} (3.5)$$

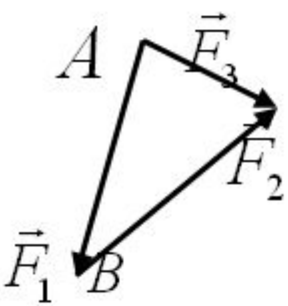
т.е. для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил на каждую из осей координат была равна нулю. Для плоской системы сил в проекциях будут только два условия равновесия.

Геометрическое условие равновесия (3.5) означает следующее: поскольку для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая равнялась нулю, то необходимо и достаточно, чтобы векторн многоугольник, построенный на этих силах, как на сторонах, был замкнут.

Пусть даны системы трех сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ из любой точки 0.



Выберем произвольную точку А, проводим вектор равный $\vec{F}_1$, через его конец B проводим прямую параллельную линии действия вектора $\vec{F}_2$ и откладываем на ней отрезок, равный $\vec{F}_2$ и т.д. строим силовой многоугольник. Если силовой, векторный многоугольник

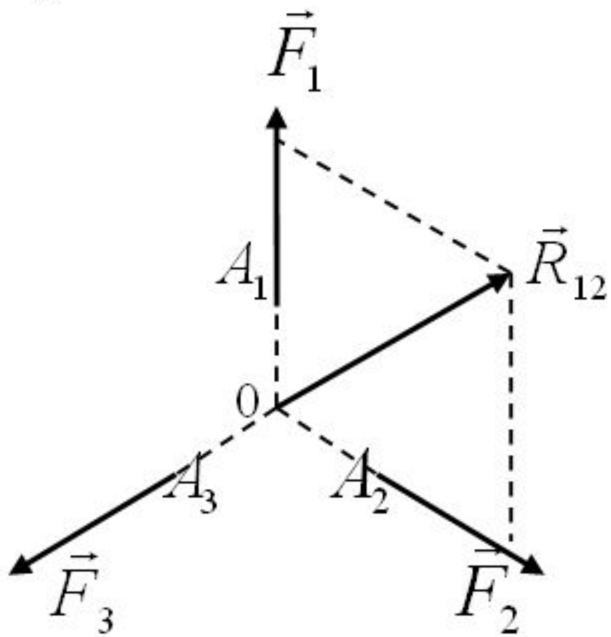


ABC окажется замкнутым, то система сил находится в равновесии.

Теорема о равновесии трех непараллельных сил. Понятие о статике определимых и неопределимых задачах.

Теорема о равновесии трех непараллельных сил.

Пусть система трех сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$, приложенных в точках $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3$, находятся в равновесии.



Предположим, что линии действия сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ пересекаются в точке *0*. Перенесем эти две силы по линиям их действия в точку пересечения *0* и по правилу параллелограмма найдем их равнодействующую $\vec{R}_{12}$.

Но система двух сил $\vec{R}_{12}$ и $\vec{F}_3$ находятся в равновесии только в том случае, если эти силы направлены по одной линии действия.

Следовательно, линии действия силы $\vec{F}_3$ должна совпадать с линией действия силы $\vec{R}_{12}$.

Итак, для равновесия трех сил, лежащих в одной плоскости, необходимо (но недостаточно), чтобы линии действия этих сил пересекались в одной точке.

Понятие о статике определимых и неопределимых задачах.

Для любой плоской системы сил, действующих на твердое тело, имеется только три независимых условия равновесия, каждые из которых не является следствием двух других.

Независимые условия равновесия можно брать в трех различных формах. В случае пространственной системы сил, действующих на твердое тело, имеется шесть независимых условий равновесия. Следовательно, для любой пространственной системы сил из условий равновесия можно найти не более 6 неизвестных.

Задачи, в которых число неизвестных не больше числа неизвестных условий равновесия для данной системы сил, приложенных к твердому телу, называется *статистически определимыми.*

В противном случае задачи *статистически неопределимы.*

Если система трех непараллельных сил находится в равновесии, то линии действия этих сил должны пересекаться в одной точке.

Теорема Вариньона для системы сходящихся сил (теорема о моменте равнодействующей).

<u>Теорема:</u> Момент относительно центра *0* равнодействующей $\vec{R}$ системы сходящихся сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n)$, расположенных в одной плоскости, равен алгебраической сумме моментов сил системы относительно того же центра.

$$M_0(\vec{R}) = M_{01}(\vec{F}_1) + M_{01}(\vec{F}_2) + ... + M_{0n}(\vec{F}_n) = \sum M_{0i}(\vec{F}_i)$$

$$R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n = \sum \vec{F}_i$$

Например, момент силы $m_0(F)$ определяется относительно начала координат по формуле $m_0(F) = -F \cdot h$, где h – неизвестно. Воспользуемся теоремой Вариньона:

$$M_0(F) = M_0(F_x) + M_0(F_y) = x_0 \cdot F_y - y_0 \cdot F_x .$$