План

1. Предисловие. Закон сохранения заряда
2. Взаимодействие электрических зарядов в вакууме. Закон Кулона
3. Электростатическое поле. Напряжённость поля. Принцип суперпозиции
4. Поток вектора напряжённости. Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме
5. Применение теоремы Гаусса
   1) Поле бесконечной равномерно заряженной нити (цилиндра)
   2) Поле сферы, равномерно заряженной по объёму
   3) Поле бесконечной равномерно заряженной плоскости
   4) Поле двух параллельных бесконечных равномерно заряженных плоскостей

Предисловие. Закон сохранения заряда

- Тела при трении способны электризоваться
- Существует 2 сорта зарядов: + и –
- Носители заряда – элементарные частицы (протоны, электроны)
- Все заряженные частицы имеют заряд, кратный элементарному e=1.6·10^{-19} Кл : $\mathbf{q=\pm N\cdot e}$
- В электрически нейтральных телах сумма отрицательных зарядов по модулю равна сумме положительных
- При трении электроны переходят с одного тела на другое ; тела заряжаются равными противоположными по знаку зарядами
- Заряд не зависит от системы отсчёта
- Заряды рождаются и исчезают парами:

$$e^- + e^+ \to 2\gamma \qquad \gamma + X \to e^- + e^+ + X$$

- В электрически изолированной системе

$$\mathbf{\Sigma q = const}$$

Взаимодействие электрических зарядов в вакууме
Закон Кулона

Определение:

Точечным зарядом называется заряженное тело, размерами которого можно пренебречь по сравнению с расстоянием до других тел

Закон Кулона:

$$F = k\frac{|q_1|\cdot|q_2|}{r^2}$$

Только для точечных зарядов

Сила взаимодействия двух точечных неподвижных зарядов в вакууме прямо пропорциональна величине каждого заряда и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними

Закон Кулона:

$$F = k\frac{|q_1|\cdot|q_2|}{r^2}$$

$$F = \frac{|q_1|\cdot|q_2|}{4\pi\varepsilon_0\cdot r^2}$$

В системе единиц СИ

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 9\cdot10^9\,\frac{Н\cdot м^2}{Кл^2} = 9\cdot10^9\,\frac{м}{Ф}$$

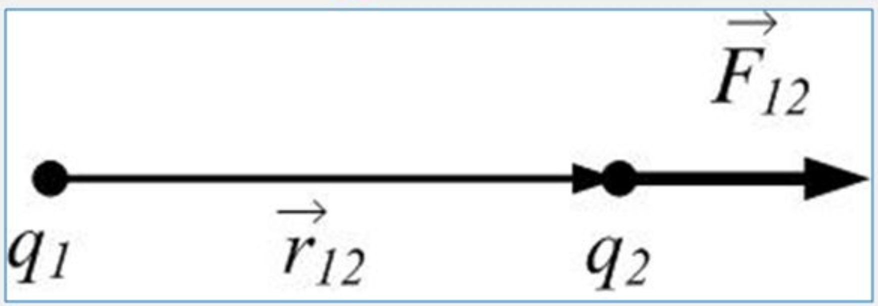
$$\varepsilon_0 = 8.85\cdot10^{-12}\,\frac{Ф}{м}$$

$$F = \frac{|q_1|\cdot|q_2|}{r^2}$$

В системе единиц CGSE $k=1$

Дальше будет только СИ

Закон Кулона в векторном виде:



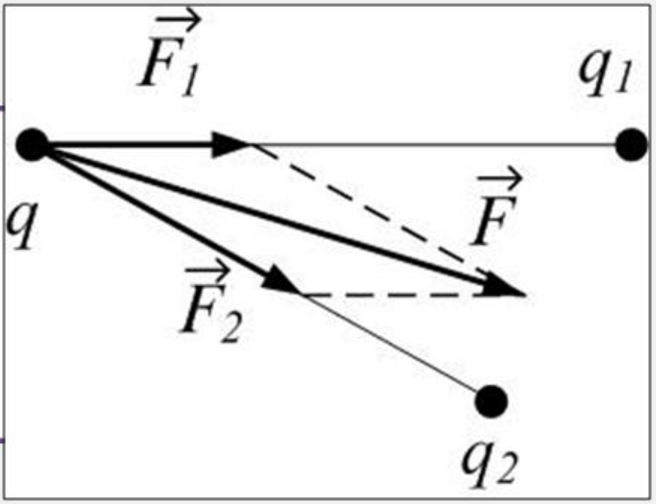
$$\vec{F}_{12} = \frac{q_1\cdot q_2}{4\pi\varepsilon_0\cdot r_{12}^3}\,\vec{r}_{12}$$

Одноимённые заряды отталкиваются, разноимённые - притягиваются

Свойства Кулоновских сил:

1. Силы центральные

2. Сила взаимодействия двух зарядов между собой не изменится, если рядом поместить третий; то есть силы можно складывать: $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$



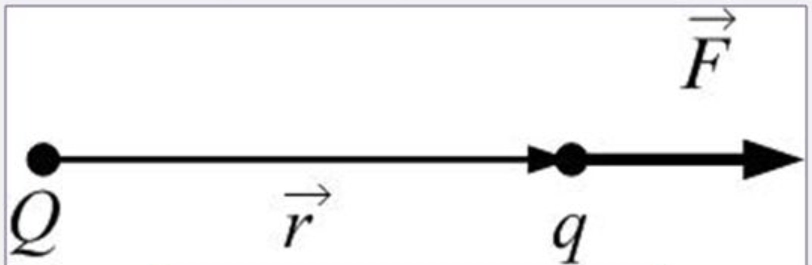
3. <u>По теории близкодействия</u>, заряды взаимодействуют посредством полей. На данный заряд действует поле, созданное другим зарядом

<u>**Теория дальнодействия** (о том, что взаимодействия распространяются мгновенно, без посредников) **неверна**</u>

Электростатическое поле. Напряжённость поля

Любой заряд создаёт в окружающем пространстве электростатическое поле
Электростатическое поле – это пространство с особыми свойствами: оно действует на другие заряды, помещённые в поле

Пусть поле создаётся точечным зарядом Q, а q – пробный заряд (то есть не искажающий поле)



$$\vec{F} = \frac{Q \cdot q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

Отношение $\dfrac{\vec{F}}{q} = \dfrac{\vec{F}_0}{q_0} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^2} \dfrac{\vec{r}}{r}$ одно и то же для любого пробного заряда

$$\Downarrow$$

Назовём напряжённостью отношение: $\vec{E} = \dfrac{\vec{F}}{q}$

Характеризует точку ПОЛЯ; не зависит от пробного заряда

Электростатическое поле. Напряжённость поля

Определение:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

$$[E] = \frac{Н}{Кл} = \frac{В}{м}$$

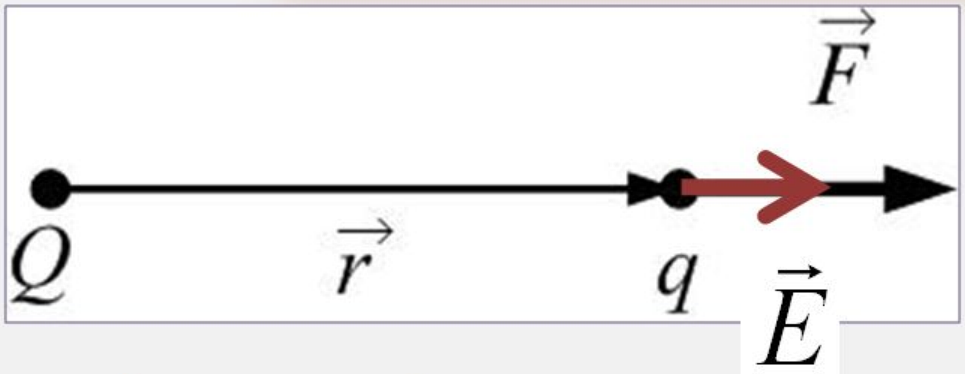
Напряжённость электростатического поля в данной точке численно равна силе, действующей на единичный положительный пробный точечный заряд, помещённый в данную точку поля

Напряжённость – ***силовая векторная характеристика поля***

Если в точку поля с напряжённостью $\vec{E}$ поместить точечный заряд q, то на него со стороны поля будет действовать сила, равная $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$

Электростатическое поле. Напряжённость поля

Напряжённость поля точечного заряда

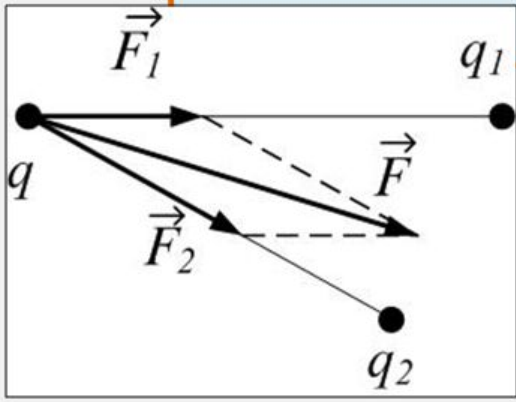


$$\vec{F} = \frac{Q \cdot q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

$$\vec{E}_{\text{т.з.}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

Электростатическое поле. Напряжённость поля
Принцип суперпозиции



Найдём напряжённость поля, созданного системой точечных зарядов q_i
Сила, действующая на пробный заряд *q* со стороны системы точечных зарядов:

$$\begin{cases} \vec{F} = \sum\limits_i \vec{F}_i = \sum\limits_i \left(q\vec{E}_i\right) = q \cdot \sum\limits_i \vec{E}_i \\ \vec{F} = q \cdot \vec{E} \end{cases} \Rightarrow \quad \vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$$

Это принцип суперпозиции:

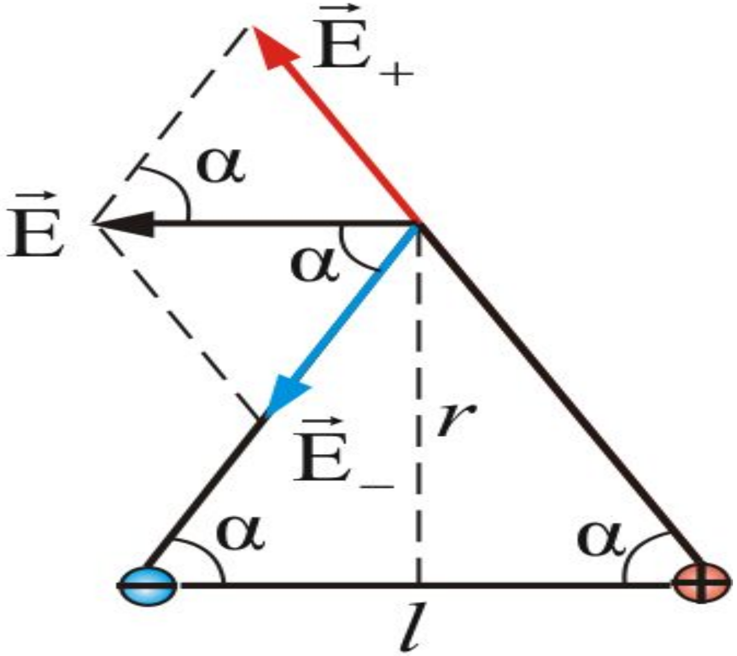
Напряжённость поля, созданного в данной точке системой зарядов, равна векторной сумме напряжённостей полей, созданных в этой точке каждым зарядом

- Результирующая напряженность поля в точке, где расположен пробный заряд, так же **подчиняется принципу суперпозиции**:

- Напряженность результирующего поля, системы точечных зарядов равна векторной сумме напряженностей полей, созданных в данной точке каждым из них в отдельности.

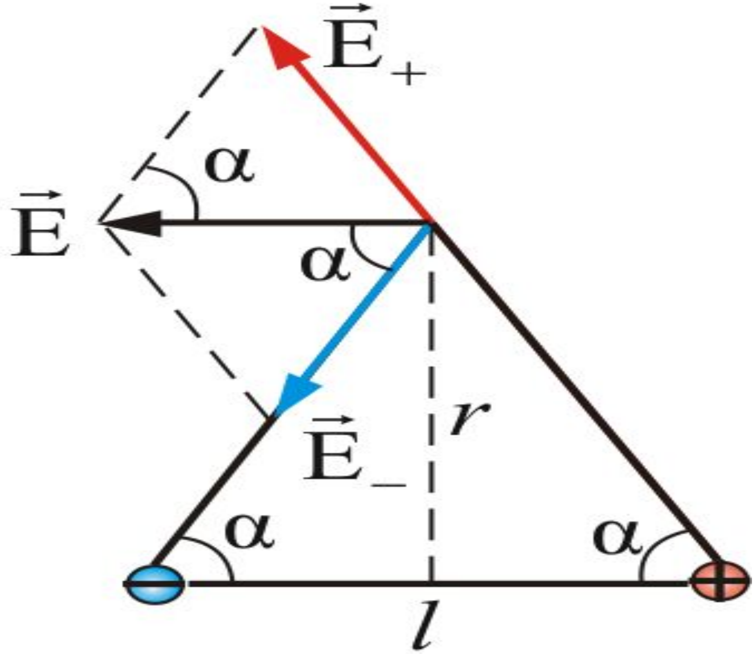
$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots = \sum_k \vec{E}_k .$$

Пример 1



$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \ldots = \sum_k \vec{E}_k$$ т. е. $$\vec{E} = \sum_k \vec{E}_k$$

- $\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$ $\quad \left|\vec{E}_+\right| = \left|\vec{E}_-\right|$ и $E = 2E_+ \cos\alpha$



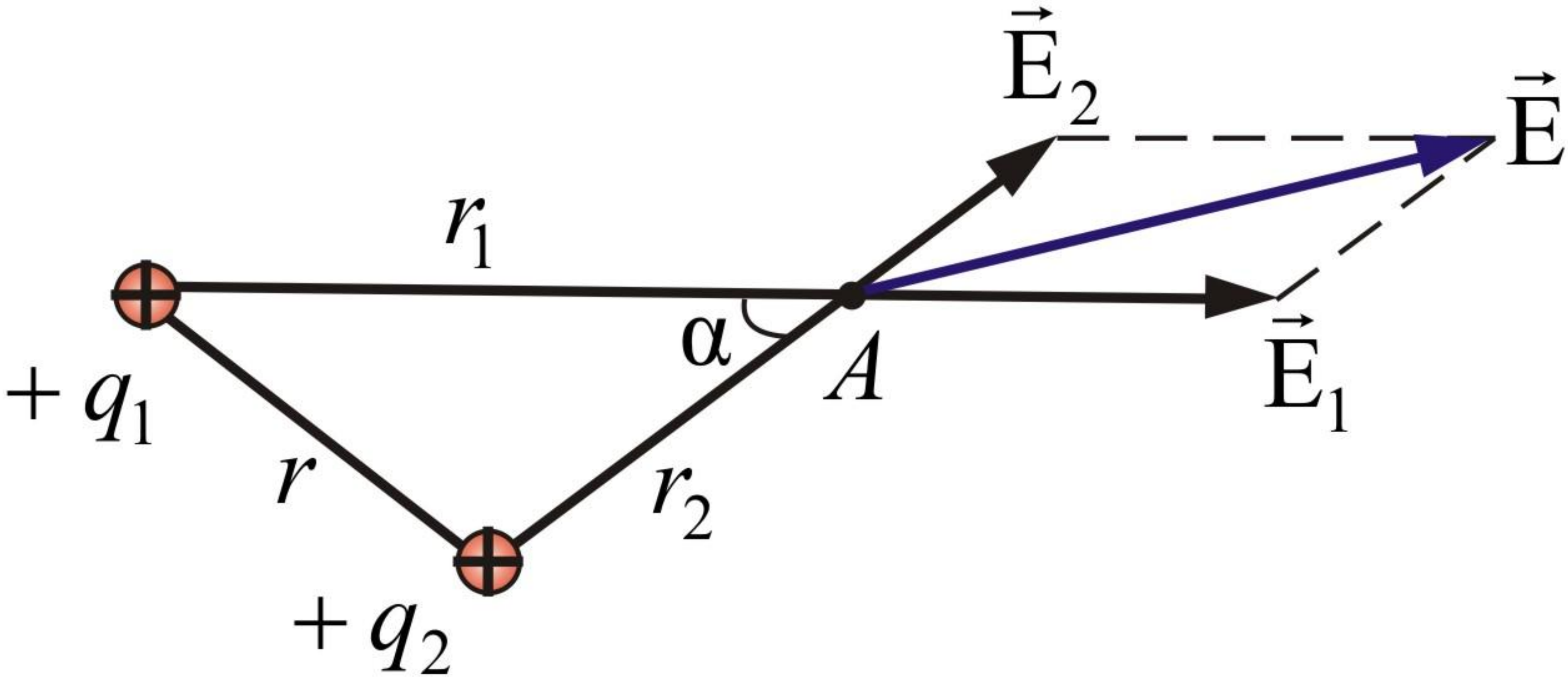
- В данном случае:

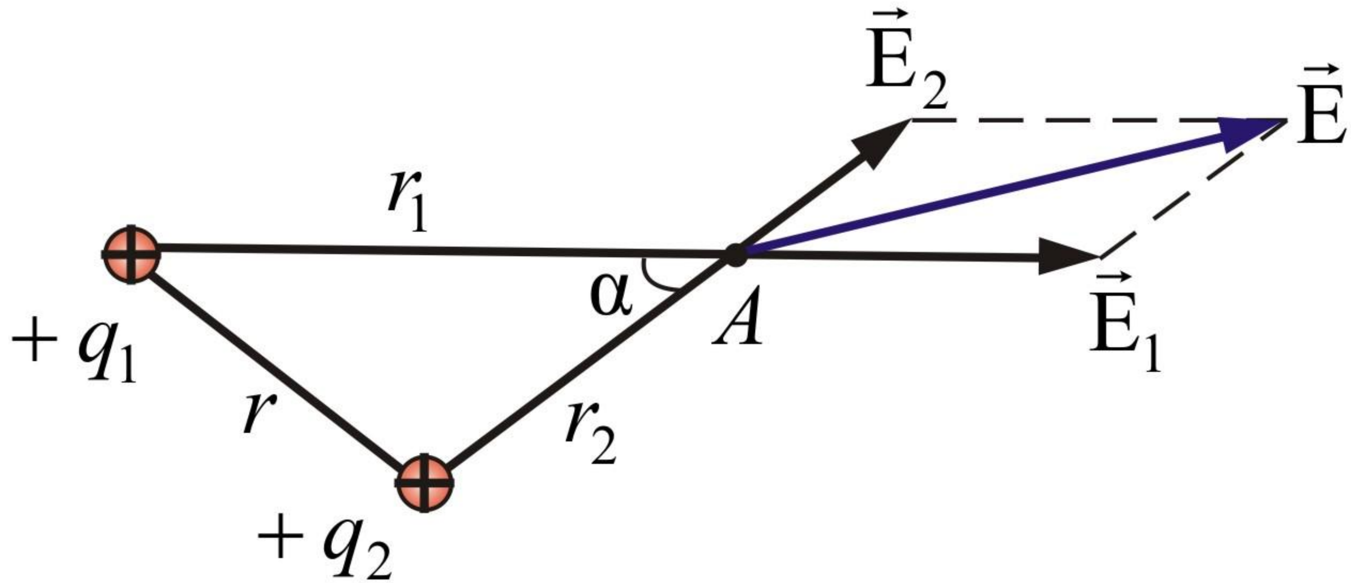
$$E_- = E_+ = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(r^2 + \frac{l^2}{4})}$$ и $$\cos\alpha = \frac{l}{2\sqrt{\left(r^2 + \frac{l^2}{4}\right)}}$$

Следовательно,

$$\boxed{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{ql}{\left(r^2 + \frac{l^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}.}$$

• Пример 2.





$$E_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2} \qquad E_2 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}$$

Воспользуемся теоремой косинусов:

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos\alpha} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sqrt{\frac{q_1^2}{r_1^4} + \frac{q_2^2}{r_2^4} + \frac{2q_1q_2}{r_1^2r_2^2}\cos\alpha},$$

где $$\cos\alpha = \frac{r^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1r_2}.$$

Электростатическое поле. Напряжённость поля Принцип суперпозиции

Во многих случаях заряды можно считать распределёнными непрерывно по объёму, по поверхности или по некоторой линии

Вводят понятия объёмной, поверхностной или линейной плотности заряда

$$\rho = \frac{dq}{dV}$$ ***Объёмная плотность заряда*** *– заряд единицы объёма*

$$\sigma = \frac{dq}{dS}$$ ***Поверхностная плотность заряда*** *– заряд единицы площади*

$$\tau = \frac{dq}{dl}$$ ***Линейная плотность заряда*** *– заряд единицы длины*

Электростатическое поле. Напряжённость поля
Принцип суперпозиции

Если заряды распределены непрерывно (например, по объёму), выделяют малый (почти точечный) объём dV, несущий точечный заряд $\boldsymbol{dq=\rho\cdot dV}$

Напряжённость поля, созданного зарядом ***dq***, равна:

$$d\vec{E}=\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0\cdot r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}$$

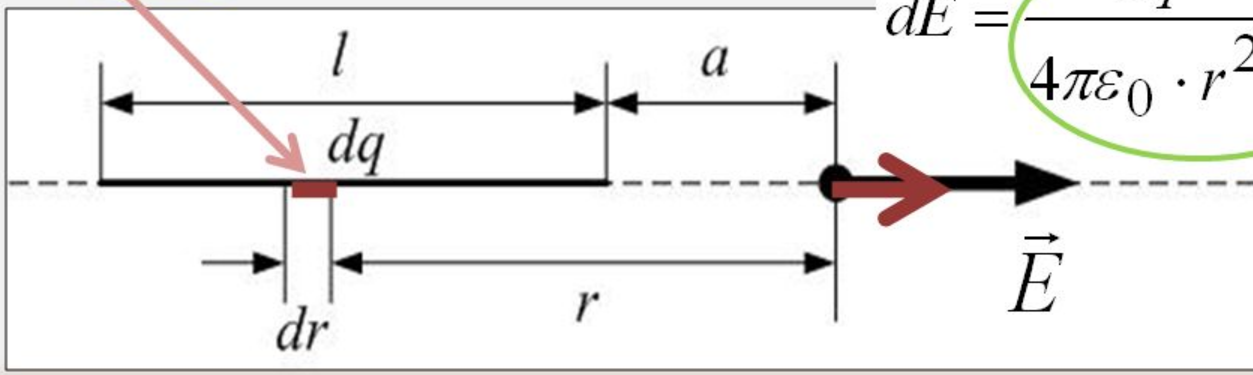
По принципу соперпозиции рассчитыват поле, созданное распределённым зарядом:

$$\vec{E}=\int\limits_V d\vec{E}$$

Интеграл надо брать по ВСЕЙ области, в которой локализованы создающие поле заряды

Пример: **Расчёт напряжённости поля,** созданного зарядом *q*, равномерно распределённым по тонкому прямому стержню длиной ***l***, в точке, лежащей на продолжении оси стержня на расстоянии ***a*** от ближайшего конца

$$dq = \tau \cdot dr$$



$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

$$a \le r \le a + l$$

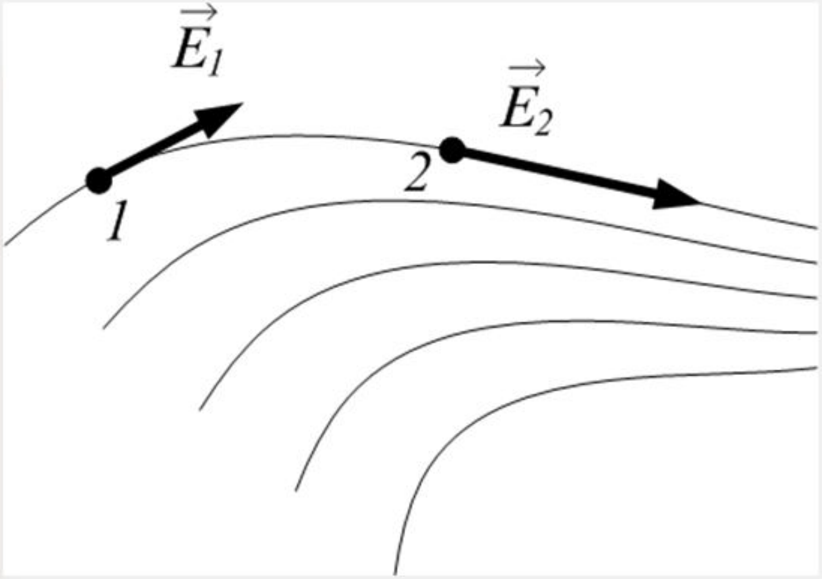
$$E = \int_a^{a+l} dE = \int_a^{a+l} \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^2} = \int_a^{a+l} \frac{\tau \cdot dr}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^2} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \int_a^{a+l} \frac{dr}{r^2} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(-\frac{1}{r} \right) \Bigg|_a^{a+l}$$

$$E = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(-\frac{1}{a+l} + \frac{1}{a} \right) = \frac{q}{l} \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+l} \right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot a(a+l)}$$

Электростатическое поле. Линии напряжённости

Поля можно изображать графически
Линии напряжённости проводят так, что:

- Касательная к линии в каждой точке совпадает по направлению с вектором E
- Густота линий пропорциональна E

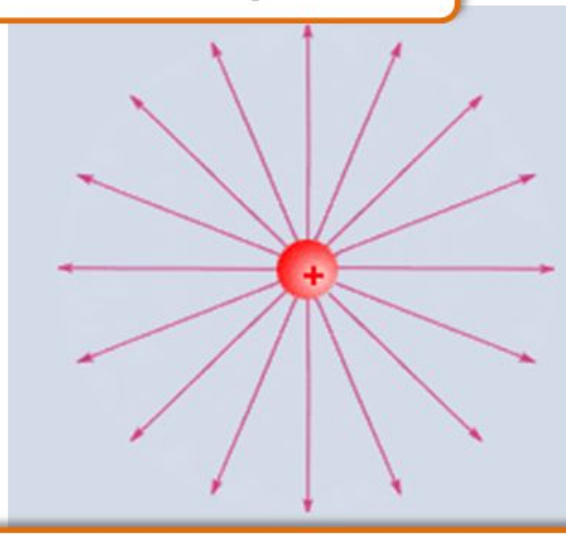


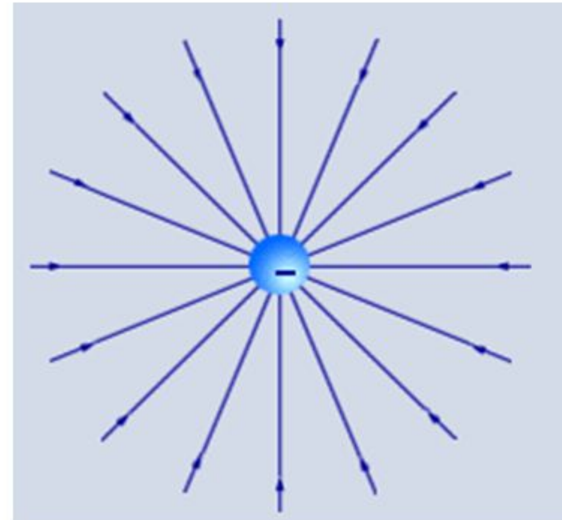
Свойства линий напряжённости:

- **начинаются на положительных зарядах или в бесконечности;**
- **заканчиваются на отрицательных зарядах или в бесконечности;**
- **не могут обрываться нигде, кроме зарядов;**
- **не могут пересекаться (иначе напряжённость в точке пересечения была бы определена неоднозначно)**

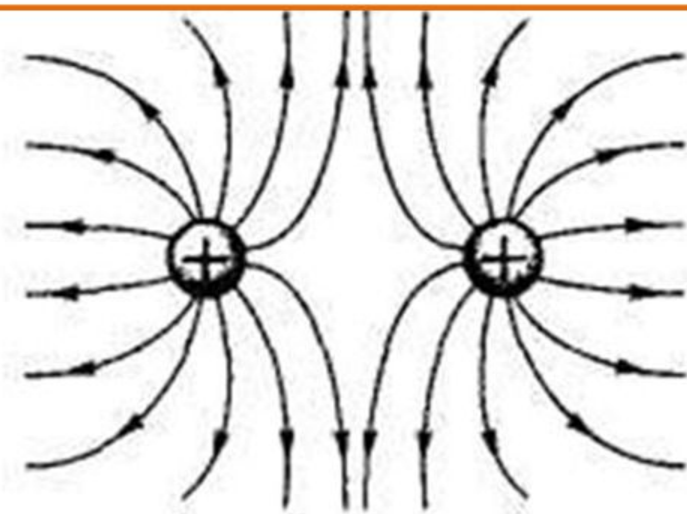
Линии напряжённости. Примеры

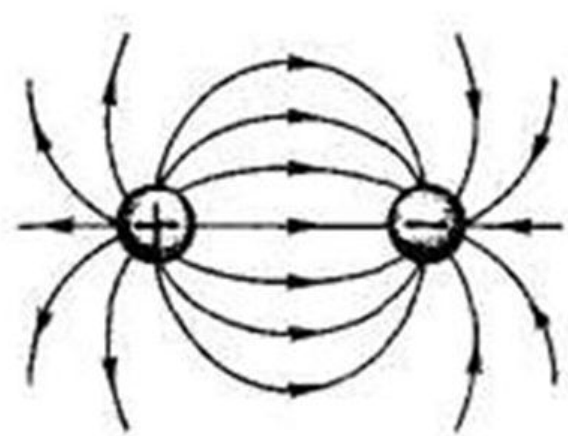
Поле точечного заряда





Поле системы двух зарядов

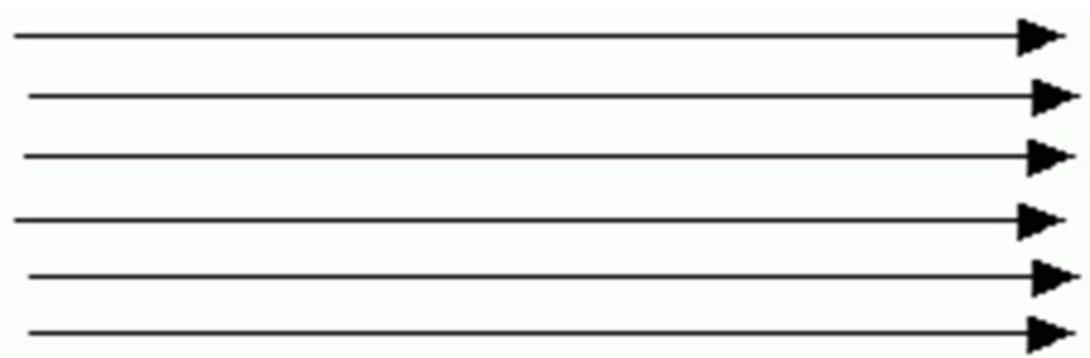




Линии напряжённости. Примеры

Поле конденсатора

Однородное поле: $\vec{E} = const$

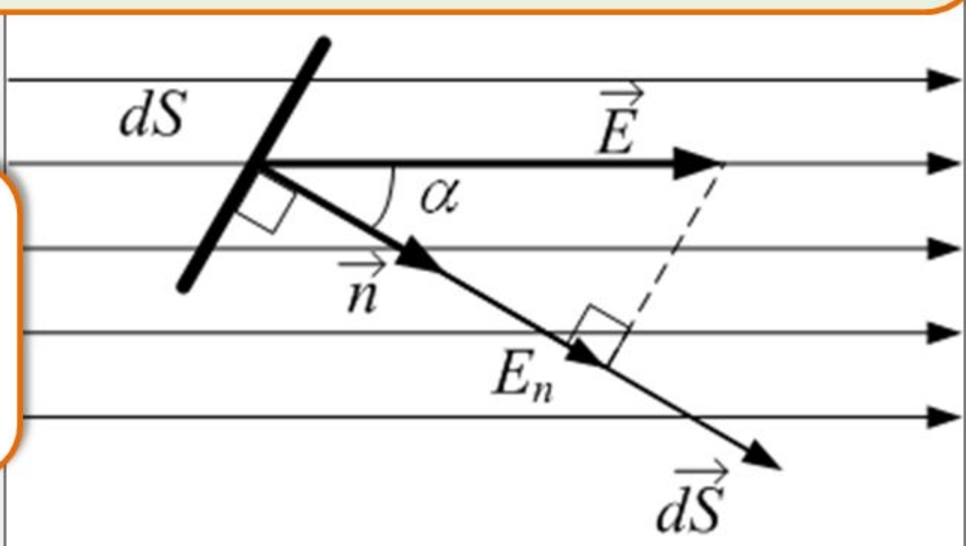


Поток вектора напряжённости

Рассматривается некоторое поле
Площадка ***dS*** так мала, что в её пределах поле однородно
α – угол между единичным вектором нормали к площадке и вектором напряжённости; вектор $d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}$

Определение:

Потоком $\boldsymbol{d\Phi_E}$ вектора напряжённости ***E*** через площадку ***dS*** называется:



$$d\Phi_E = \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot dS \cdot \cos\alpha = E_n \cdot dS$$

Поток вектора напряжённости равен числу линий напряжённости, пронизывающих площадку

Поток вектора напряжённости

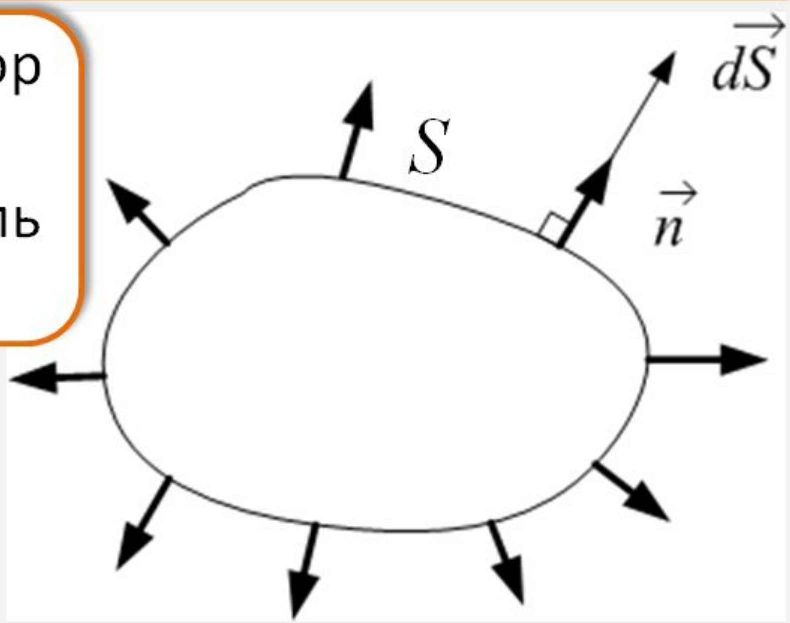
Поток вектора напряжённости через любую поверхность ***S***:

$$\Phi_E = \int\limits_S d\Phi_E = \int\limits_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int\limits_S E_n \cdot dS$$

Интегрирование ведётся по всей поверхности

Для незамкнутой поверхности выбор нормали неоднозначен

Для замкнутой поверхности нормаль - всегда внешняя



$$\Phi_E = \oint\limits_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oint\limits_S E_n \cdot dS$$

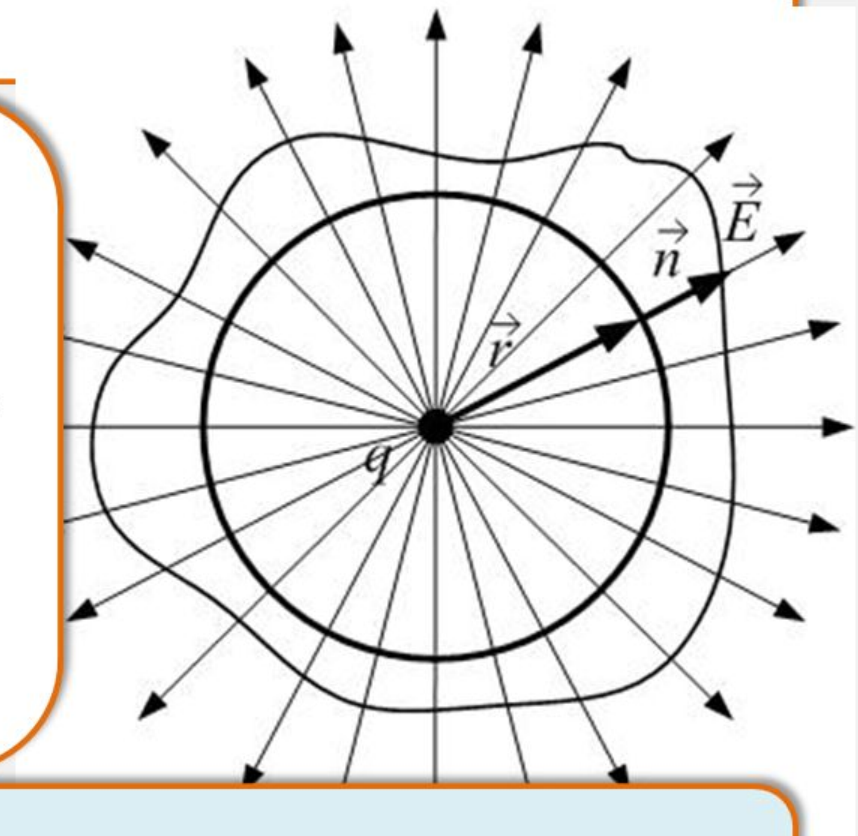
Поток вектора напряжённости. Теорема Гаусса

Найдём поток через сферу, описанную вокруг точечного заряда:

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^2}$$

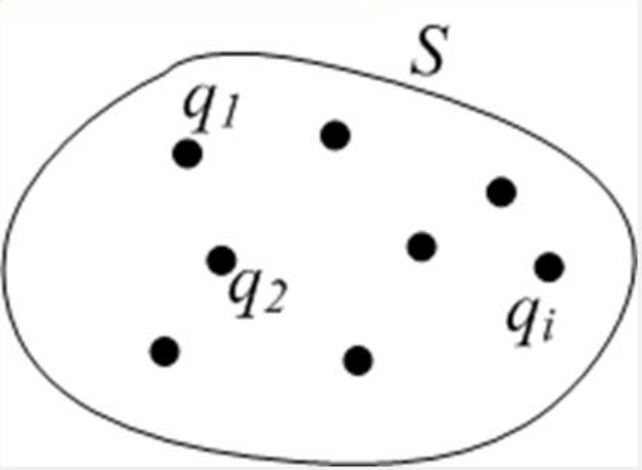
$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S E \cdot dS = E \cdot \oint_S dS =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$



Линии нигде не обрываются $\longrightarrow$ поток такой же через любую замкнутую поверхность, охватывающую заряд

Поток вектора напряжённости. Теорема Гаусса



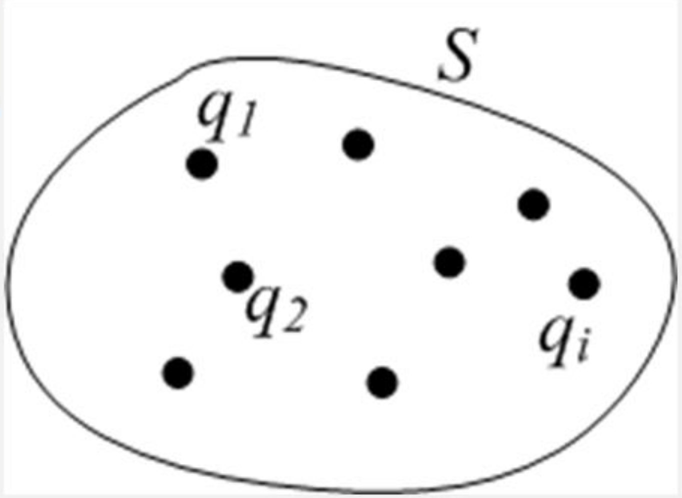
Если поверхность охватывает систему точечных зарядов:

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E}d\vec{S} = \oint_S \left(\sum_i \vec{E}_i \right) \cdot d\vec{S} = \sum_i \left(\oint_S \vec{E}_i d\vec{S} \right) = \sum_i \frac{q_i}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i q_i$$

Это – <u>**теорема Гаусса:**</u>

$$\boxed{\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i q_i}$$

Теорема Гаусса



$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i q_i$$

Поток вектора напряжённости электростатического поля в вакууме через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме электрических зарядов, охваченных этой поверхностью, делённой на электрическую постоянную ε_0

Поток определяется суммарным зарядом внутри объёма, ограниченного поверхностью

Применение теоремы Гаусса

Поле заряженной нити

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i q_i$$

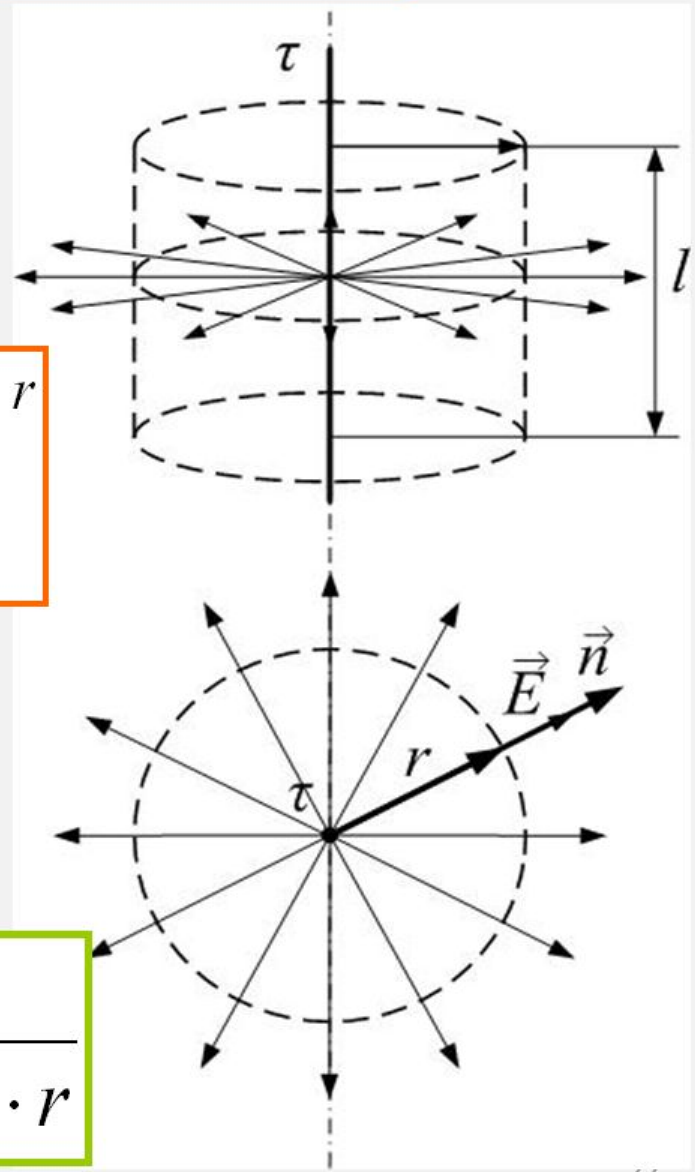
$$\Phi_E = \oint_S E \cos\alpha dS = E \cdot \int\limits_{\substack{\text{по} \\ \text{боковой} \\ \text{поверхности}}} dS = E \cdot l \cdot 2\pi \cdot r$$

$$\sum_i q_i = \tau \cdot l$$

$$\tau = \frac{q}{l}$$

$$E \cdot l \cdot 2\pi \cdot r = \frac{1}{\varepsilon_0} \tau \cdot l$$

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 \cdot r}$$



Применение теоремы Гаусса

Поле заряженного цилиндра радиусом R

1) $r > R$

Вне цилиндра то же, что и для нити:

$$\boxed{E \cdot l \cdot 2\pi \cdot r = \frac{1}{\varepsilon_0} \tau \cdot l}$$

$$\boxed{E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 \cdot r}}$$

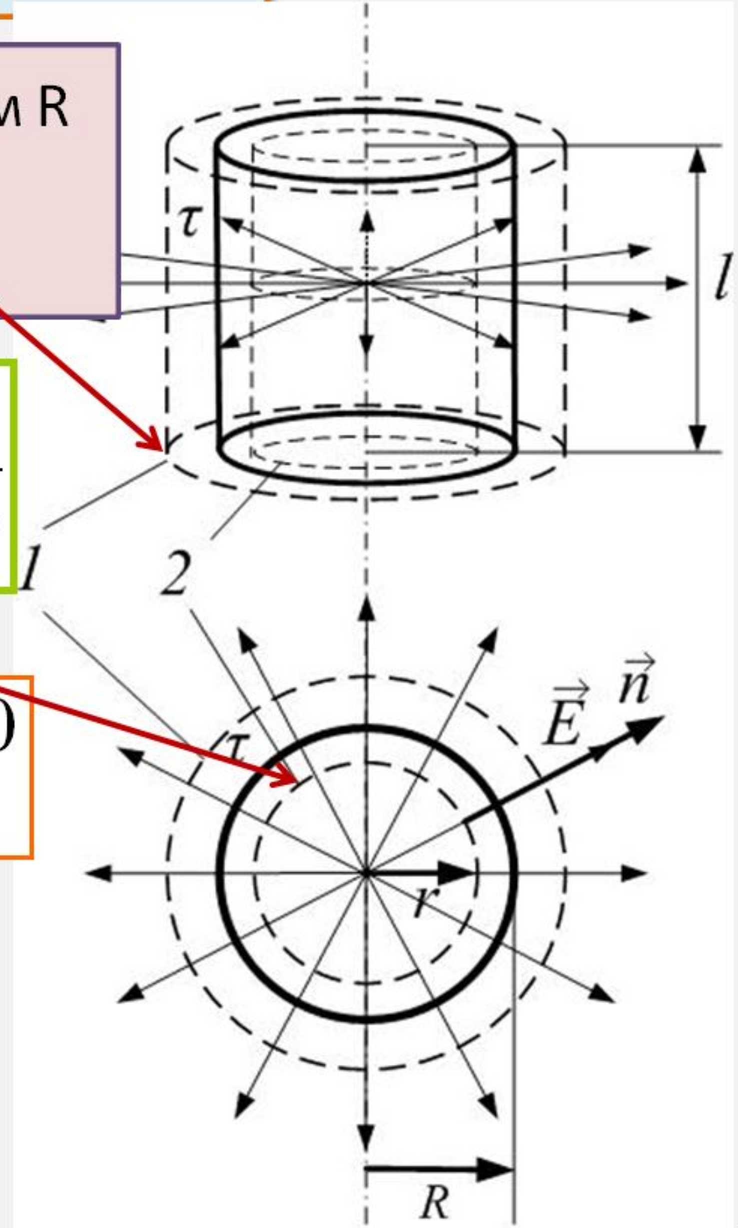
2) $r < R$

Внутри цилиндра (трубки):

$$\boxed{\sum_i q_i = 0}$$

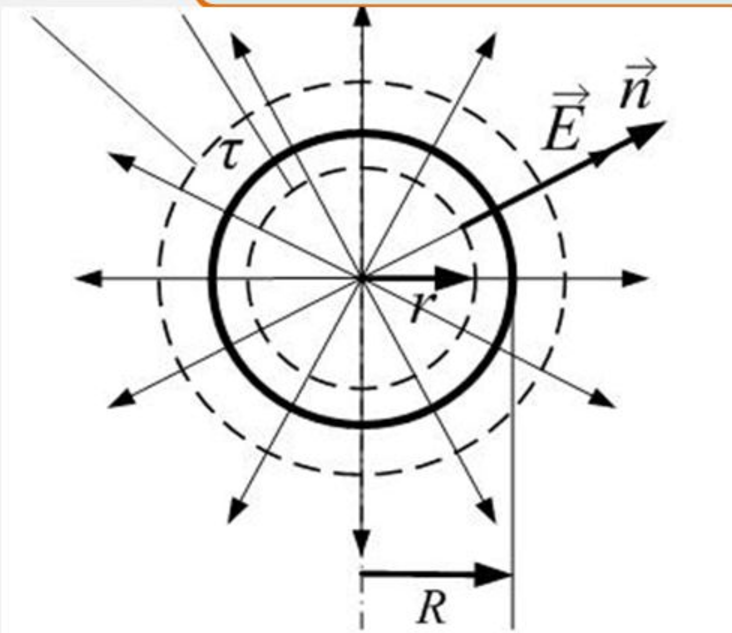
$$\boxed{E \cdot l \cdot 2\pi \cdot r = 0}$$

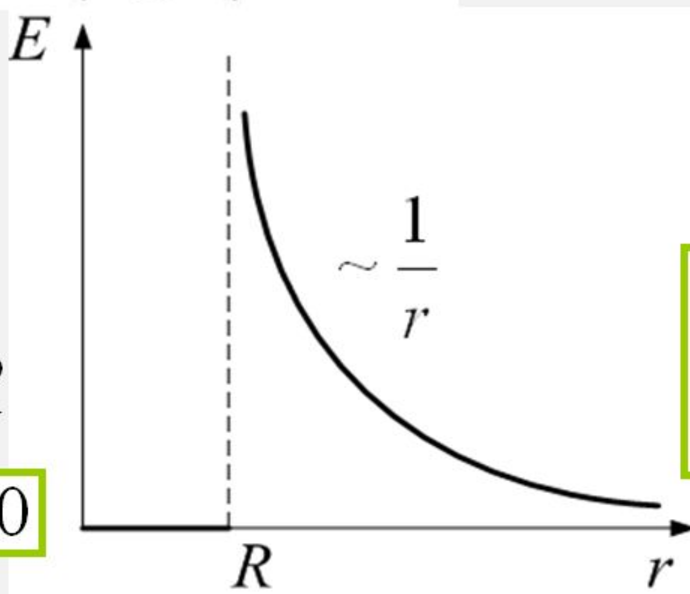
$$\boxed{E = 0}$$



Применение теоремы Гаусса

Поле заряженного цилиндра (трубки)





$$r > R$$

$$\boxed{E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 \cdot r}}$$

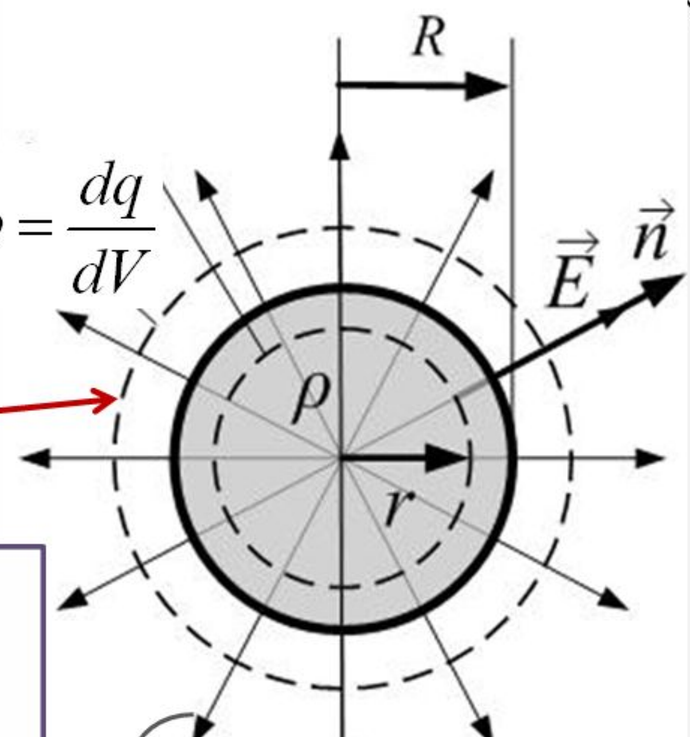
$$r < R$$

$$\boxed{E = 0}$$

Применение теоремы Гаусса

Поле сферы (шара), равномерно заряженного по объёму с объёмной плотностью заряда ρ

$$\rho = \frac{dq}{dV}$$



1) Проводим Гауссову поверхность вне заряженной сферы: $r > R$

$$\Phi_E = E \cdot S_{\text{гаусс.сферы}} = E \cdot 4\pi \cdot r^2$$

$$\Phi_E = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \rho \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot R^3$$

$$E \cdot 4\pi \cdot r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot q = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \rho \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot R^3$$

$$E_{\text{вне}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^2}$$

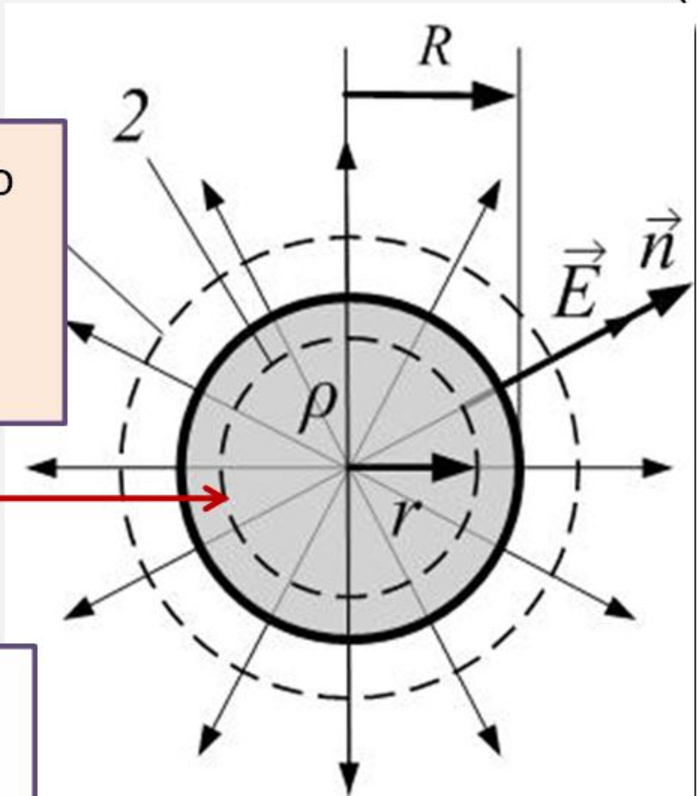
$$E_{\text{вне}} = \frac{\rho \cdot R^3}{3 \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2}.$$

Поле вне заряженной сферы определяется её полным зарядом

Применение теоремы Гаусса

Поле сферы (шара), равномерно заряженного по объёму с объёмной плотностью заряда ρ;

$$\rho = \frac{dq}{dV}$$



2) Проводим Гауссову поверхность внутри заряженной сферы: $r < R$

$$\Phi_E = E \cdot S_{\text{гаусс.сферы}} = E \cdot 4\pi \cdot r^2$$

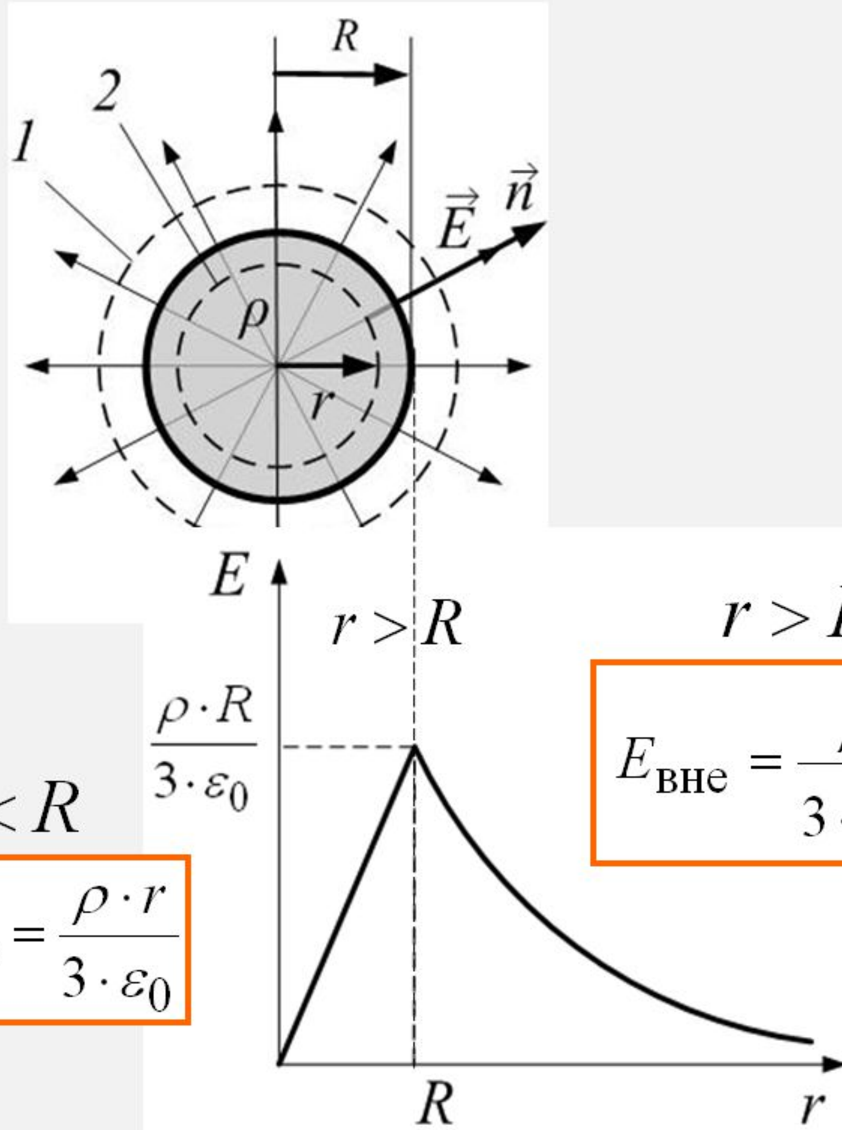
$$\Phi_E = E \cdot 4\pi \cdot r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i q_i = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \rho \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$$

$$E_{\text{внутри}} = \frac{\rho \cdot r}{3 \cdot \varepsilon_0}$$

При $r=R$:

$$E_{(r=R)} = \frac{\rho \cdot R}{3 \cdot \varepsilon_0}$$

Применение теоремы Гаусса
Поле сферы, равномерно заряженной по оъёму



$r > R$

$$\boxed{E_{\text{вне}} = \frac{\rho \cdot R^3}{3 \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2}}.$$

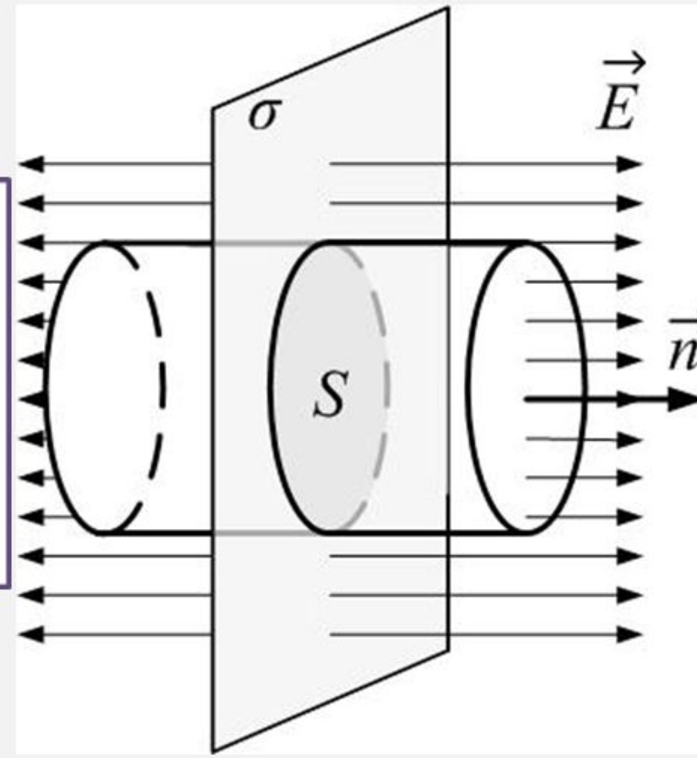
$r < R$

$$\boxed{E_{\text{внутри}} = \frac{\rho \cdot r}{3 \cdot \varepsilon_0}}$$

Применение теоремы Гаусса

Поле бесконечной равномерно заряженной плоскости

$$\sigma = \frac{dq}{dS} > 0$$

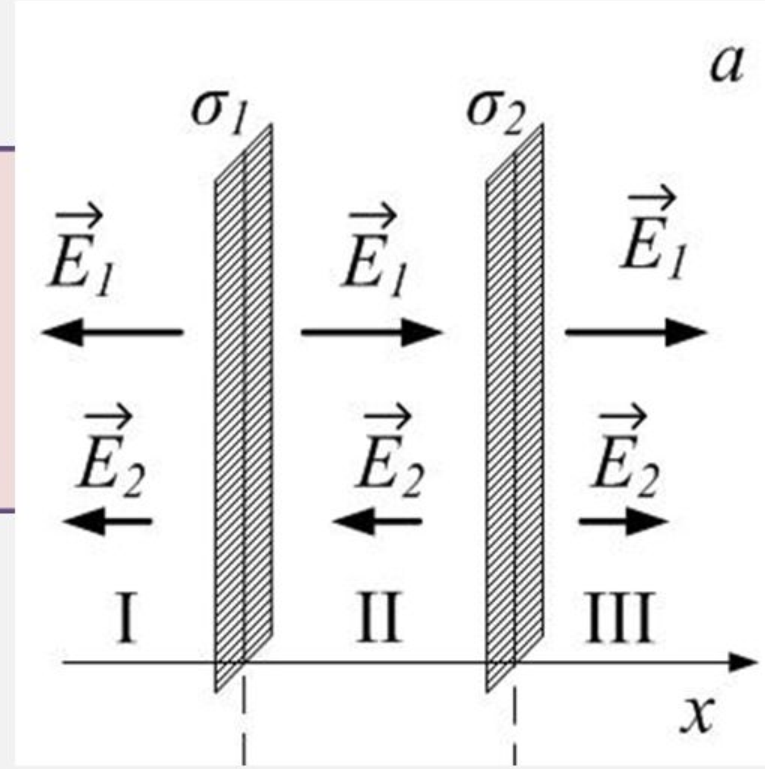


$$\left.\begin{aligned} \Phi_E &= E \cdot 2S \\ \Phi_E &= \frac{1}{\varepsilon_0} q \end{aligned}\right\} \quad E \cdot 2S = \frac{1}{\varepsilon_0} \sigma \cdot S$$

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2 \cdot \varepsilon_0}}$$

Применение теоремы Гаусса

Поле двух параллельных бесконечных равномерно заряженных плоскостей
(расчёт по принципу суперпозиции)



$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

$$\begin{cases} E_{\mathrm{I}x} = -E_1 - E_2 = -\dfrac{\sigma_1 + \sigma_2}{2 \cdot \varepsilon_0} \\ E_{\mathrm{II}x} = E_1 - E_2 = \dfrac{\sigma_1 - \sigma_2}{2 \cdot \varepsilon_0} \\ E_{\mathrm{III}x} = E_1 + E_2 = \dfrac{\sigma_1 + \sigma_2}{2 \cdot \varepsilon_0} \end{cases}$$

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{2 \cdot \varepsilon_0}$$

$$E_2 = \frac{\sigma_2}{2 \cdot \varepsilon_0}$$

Применение теоремы Гаусса
Поле <u>двух параллельных</u> бесконечных равномерно заряженных <u>плоскостей</u>

$$E_{\mathrm{I}x} = -E_1 - E_2 = -\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2 \cdot \varepsilon_0}$$

$$E_{\mathrm{II}x} = E_1 - E_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2 \cdot \varepsilon_0}$$

$$E_{\mathrm{III}x} = E_1 + E_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2 \cdot \varepsilon_0}$$