

Лекция 2: **Волновая оптика**

Основные понятия

Интерференция

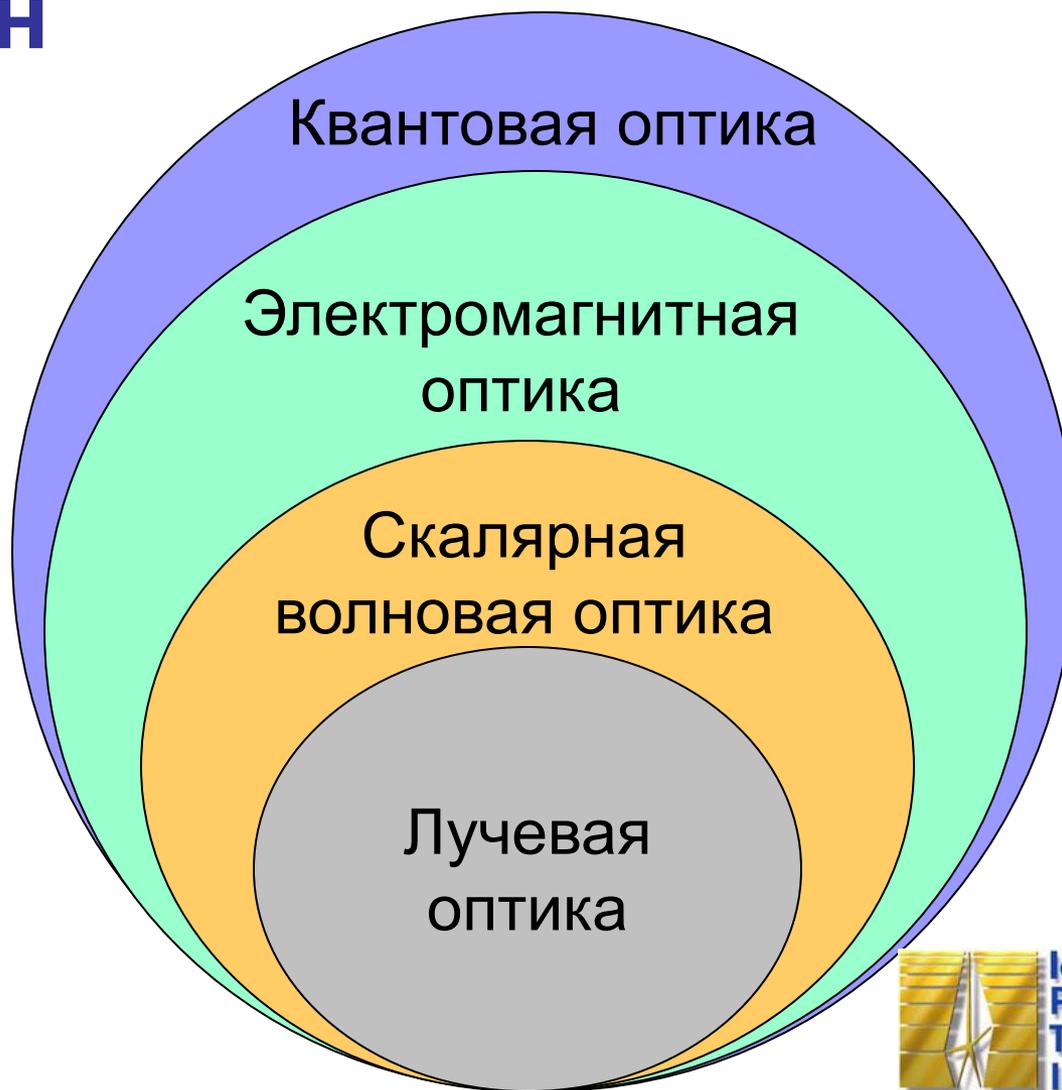
Когерентность

«Фотоника» - производная слова фотон

Условия когда
проявляются
квантовые свойства

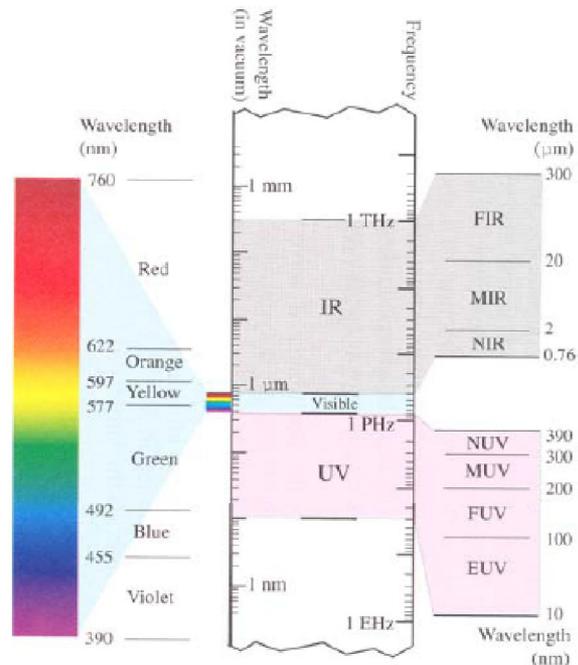
$$E_{ph} = h\nu = hc/\lambda > kT$$

при ком. темп. 300 K
 $\nu = 6 \text{ THz}$



Волновая оптика

- Свет описывается как скалярная волновая функция (решение волнового уравнения)
- Длина волны порядка размеров объектов



Постулаты волновой оптики

- Свет распространяется в виде волны со скоростью $c = c_0/n$
- Амплитуда волны в любой точке пространства $r(x,y,z)$ описывается волновой функцией $u(r,t)$

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

- Интенсивность – усредненный по времени квадрат амплитуды

$$I(r,t) \sim \langle u^2(r,t) \rangle; [W/m^2]$$

- Оптическая мощность – интеграл от интенсивности по площади

$$P(t) \sim \int_A I(r,t) dA$$

- Из линейности волнового уравнения вытекает принцип суперпозиции

$$u(r,t) = u_1(r,t) + u_2(r,t) + \dots + u_i(r,t)$$

Для определения волновой функции нужно знать граничные условия

Волновая оптика применима для неоднородных сред, с характерными размерами изменения больше длины волны (локально однородные)

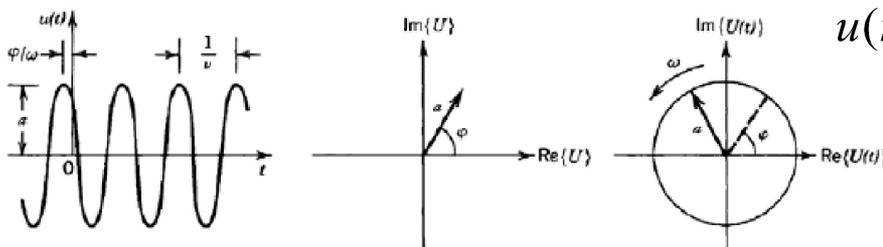
$$n(r) \Rightarrow c(r)$$

Монохроматическая волна

$$u(r, t) = a(r) \cos(2\pi\nu t + \varphi(r)); \omega = 2\pi\nu$$

- Комплексное представление $U(r, t) = a(r) \cdot \exp(j\varphi(r)) \cdot \exp(j\omega t) = U(r) \cdot \exp(j\omega t)$

$$u(r, t) = \operatorname{Re}\{U(r, t)\}$$



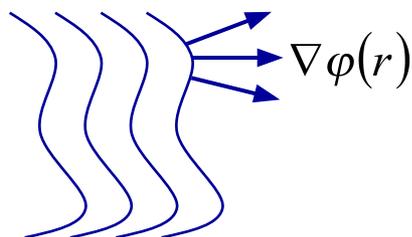
Уравнение Гемгольца:

$$\nabla^2 U(r) - k^2 U(r) = 0$$

$$k = \frac{\omega}{c}; \text{ волновой вектор}$$

$I(r) \sim |U(r)|^2$ Интенсивность монохроматической волны не изменяется во времени

Волновой фронт – плоскость постоянной фазы $\varphi(r) = \text{const}$



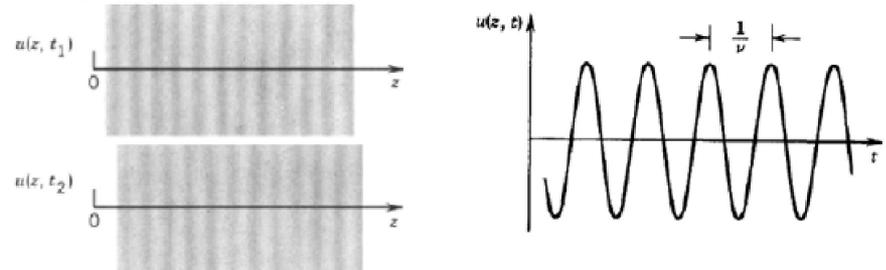
Элементарные волны

- Плоская волна (в реальности не существует)

Мощный математический аппарат Фурье анализа

$$U(\mathbf{r}) = A \exp(-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = A \exp(-j(k_x x + k_y y + k_z z)), \quad I(\mathbf{r}) = |A|^2, \quad P_{tot} = \infty$$

$$|\mathbf{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = k = \omega/c = 2\pi/\lambda \quad \rightarrow \quad \lambda = 2\pi/k = c/v$$

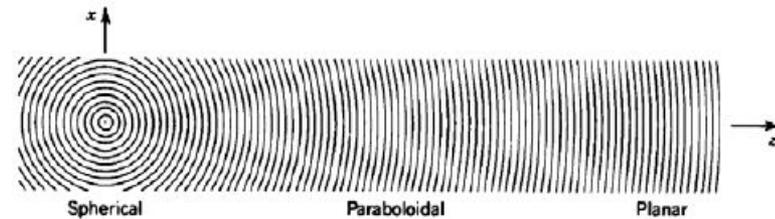


- Сферическая волна

$$U(\mathbf{r}) = (A_0/r) \exp(-jkr), \quad I(\mathbf{r}) = |A_0|^2/r^2, \quad P_{tot} = 4\pi|A_0|^2$$

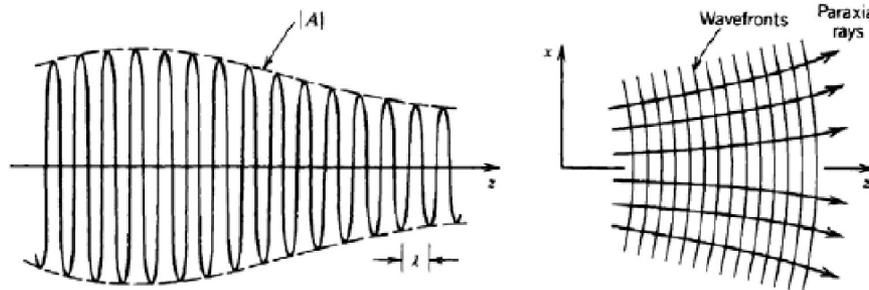
$$z \gg \sqrt{x^2 + y^2}, \quad U(\mathbf{r}) \approx (A_0/z) \exp(-jkz) \exp(-jk(x^2 + y^2)/(2z))$$

Параксиальное приближение (Френеля)



- Параксиальное приближение
 - (общий вид)

$$U(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r}) \exp(-jkz)$$



Медленно меняющаяся функция

Преломление и отражение

Волновой вектор плоской волны

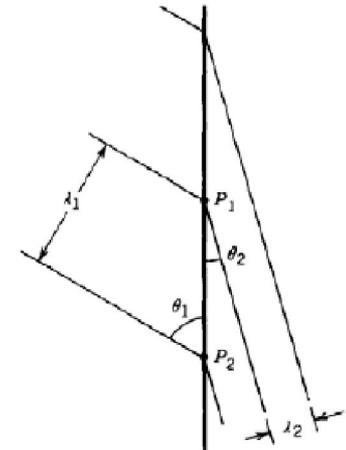
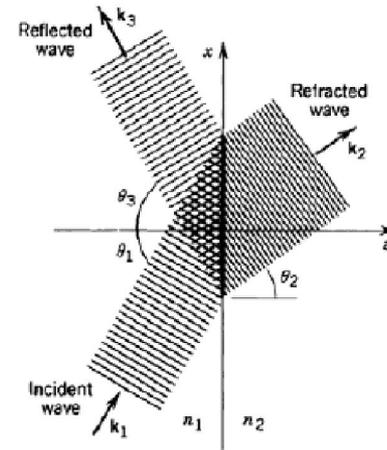
Аналог импульса

$$k = \frac{2\pi\nu}{c} = \frac{2\pi\nu}{c_0} n = \frac{2\pi}{\lambda_0} n = n \cdot k_0$$

$$k_1 = n_1 \cdot k_0 (\sin(\theta_1), 0, \cos(\theta_1))$$

$$k_2 = n_2 \cdot k_0 (\sin(\theta_2), 0, \cos(\theta_2))$$

$$k_3 = n_1 \cdot k_0 (\sin(\theta_3), 0, -\cos(\theta_3))$$



На границе раздела фаза должна сохраняться

$$k_1 r = k_2 r = k_3 r$$

$$\theta_1 = \theta_3$$

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

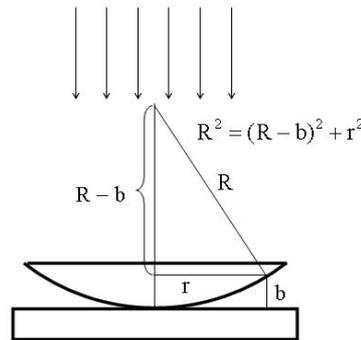
Для определения амплитуды скалярной теории недостаточно, нужно определять граничные условия на амплитуду (электромагнитная теория)

Интерференция света

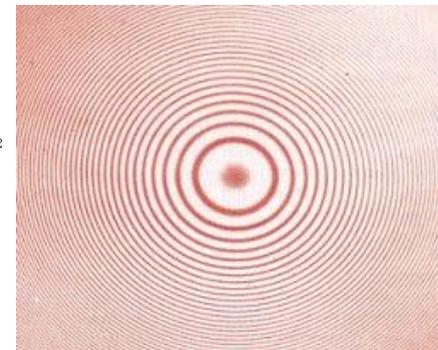
- ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ СВЕТА — пространственное перераспределение энергии светового излучения при наложении двух или нескольких световых волн.



Роберт Гук
Исследование цветов мыльных пленок и тонких пластинок из слюды.



Исаак Ньютон
Корпускулярная теория света не позволила объяснить возникновение колец



Интерференция света

- ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ СВЕТА — проявление волновых свойств (начало XIX века)



Томас Юнг

Принцип суперпозиции (линейность волнового уравнения)

$$u(r, t) = u_1(r, t) + u_2(r, t) + \dots + u_i(r, t)$$

Интенсивность не подчиняется принципу суперпозиции.

Нужно учитывать фазу волновой функции

(не объясняется лучевой оптикой).

$$I(r, t) \neq I_1(r, t) + I_2(r, t) + \dots + I_i(r, t)$$

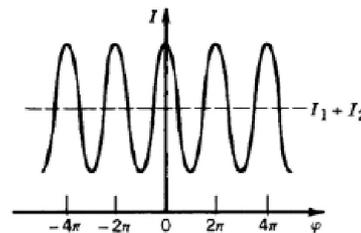
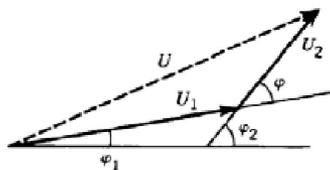
$$U_1(r) = \sqrt{I_1(r)} \cdot \exp(j\varphi_1(r));$$

Комплексное представление
монохроматических волн

$$U_2(r) = \sqrt{I_2(r)} \cdot \exp(j\varphi_2(r))$$

$$I(r) = |U_1(r) + U_2(r)|^2 = I_1(r) + I_2(r) + 2\sqrt{I_1(r)I_2(r)} \cos(\varphi(r));$$

$$\varphi(r) = \varphi_2(r) - \varphi_1(r)$$



$$2\sqrt{I_1(r)I_2(r)} \cos(\varphi(r)) > 0;$$

конструктивная интерференция

$$2\sqrt{I_1(r)I_2(r)} \cos(\varphi(r)) < 0;$$

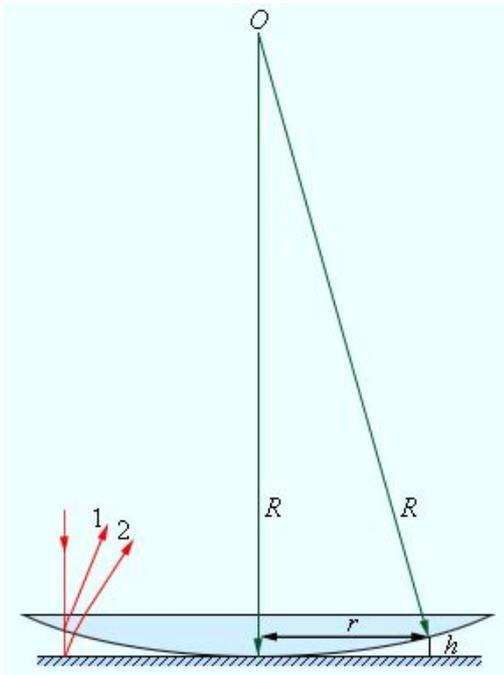
деструктивная интерференция



Огюстен Жан Френель

Интерференция объясняет пространственное перераспределение интенсивности без нарушения закона сохранения энергии (мощности)

Кольца Ньютона



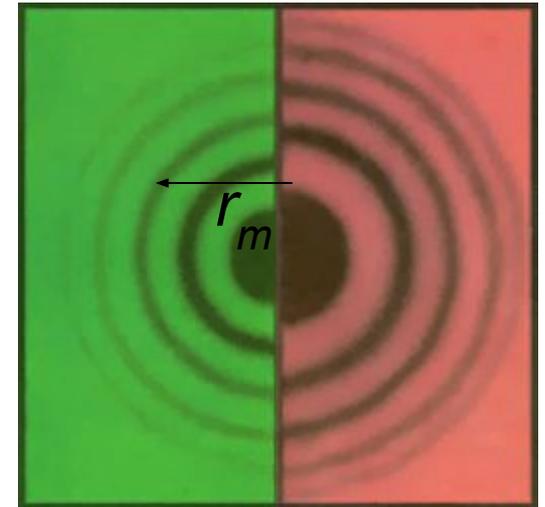
$$R \gg r; \quad n = 1$$

$$\varphi(r) \approx 2h \cdot k = 2 \frac{2\pi}{\lambda} \cdot h = \pi \cdot (2m - 1)$$

$$R^2 = (R - h)^2 + r^2$$

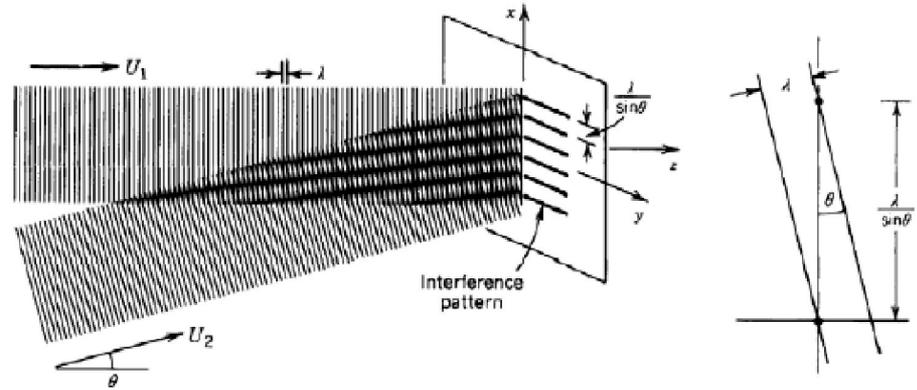
$$r \approx \sqrt{2R \cdot h}$$

$$r_m = \sqrt{(2m - 1) \frac{\lambda \cdot R}{2}}$$



Цвет определяется длиной волны

Интерференция плоских волн



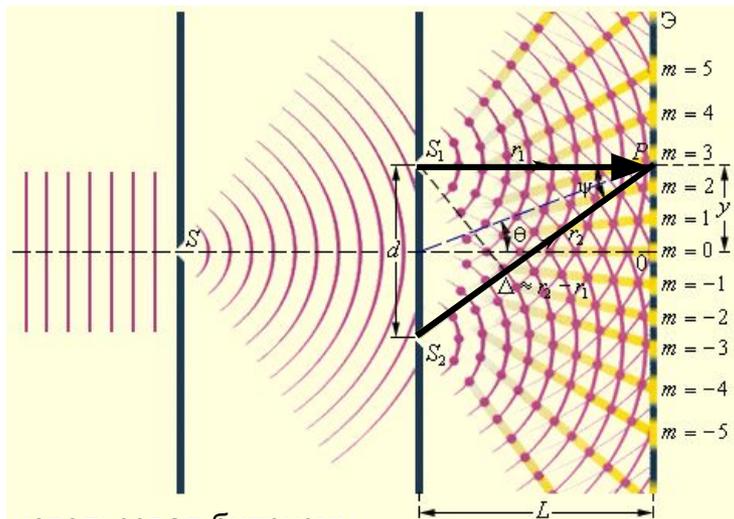
$$\left. \begin{aligned} U_1(r) &= \sqrt{I_0(r)} \cdot \exp(-jk \cdot z) \\ U_2(r) &= \sqrt{I_0(r)} \cdot \exp(-jk(x \cdot \sin \theta + z \cdot \cos \theta)) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \varphi(x,0) = k \cdot x \cdot \sin \theta;$$

$$I(x,0) = 4I_0 \cos^2\left(\frac{k \cdot x}{2} \sin \theta\right)$$

$$\Lambda = \frac{\lambda}{\sin \theta} \text{ период интерференционной картины}$$

Опыт Юнга

Узкая щель – источник сферических волн (Принцип Гюйгенса)



Френель использовал бипризму

$$L \gg d \Rightarrow \varphi(x, z = L) = k \cdot d \cdot \sin \theta;$$

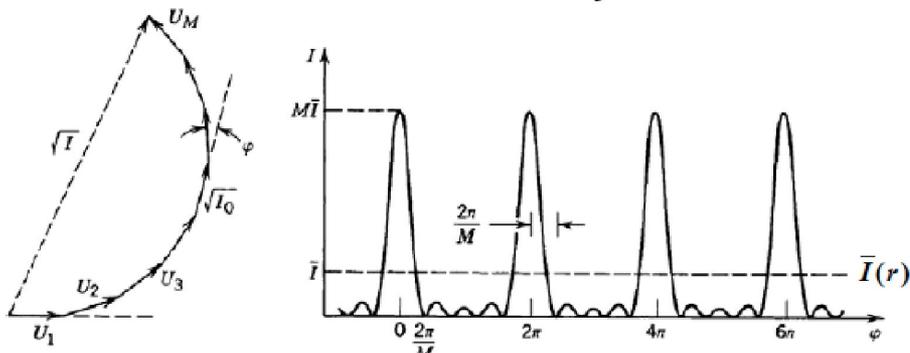
$$I(x, d) = 4 \frac{I_0}{L} \cos^2\left(\frac{k \cdot d}{2} \sin \theta\right);$$

$$\sin \theta \approx \theta \approx \frac{x}{L};$$

$$I(x, d) = 4 \frac{I_0}{L} \cos^2\left(\frac{k \cdot d \cdot x}{2L}\right); \Lambda \approx \frac{\lambda \cdot L}{d}$$



интерференция нескольких монохроматических плоских волн



$$U_m(r) = \sqrt{I_0(r)} \cdot \exp(j(m-1)\varphi(r)), m = 1, 2, \dots, M$$

$$I(r) = |U(r)|^2 = |U_1(r) + U_2(r) + \dots + U_M(r)|^2$$

$$I(r) = I_0(r) \frac{\sin^2\left(M \frac{\varphi(r)}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\varphi(r)}{2}\right)}$$

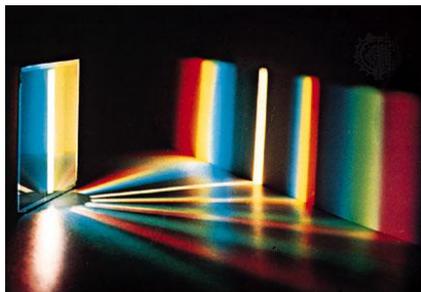
При большом M очень высока чувствительность к фазе

Амплитудная дифракционная решетка

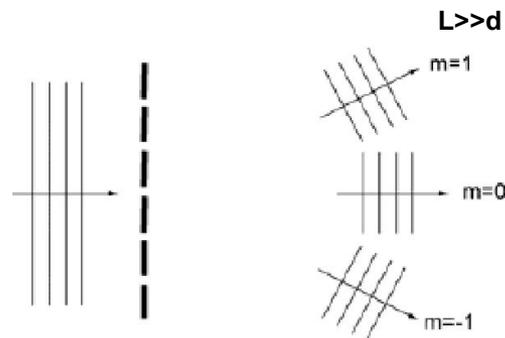
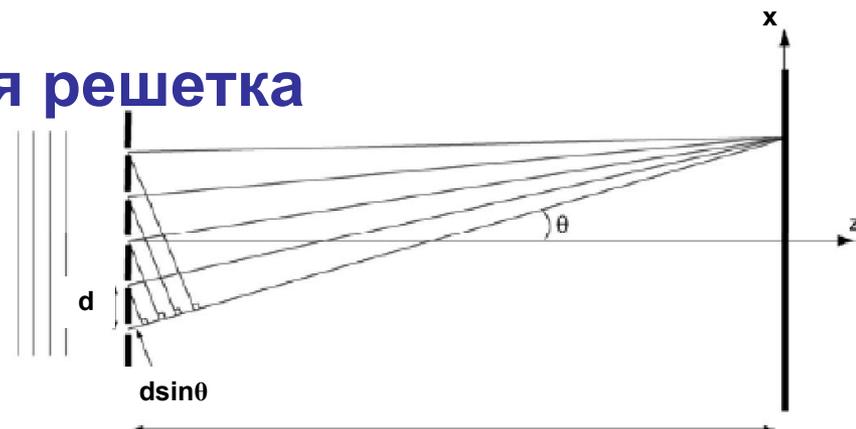
Амплитудная диф. решетка – множество щелей

$$\varphi = k \cdot d \cdot \sin \theta = 2\pi \cdot m;$$

$$\sin \theta_m = \frac{m\lambda}{d}$$

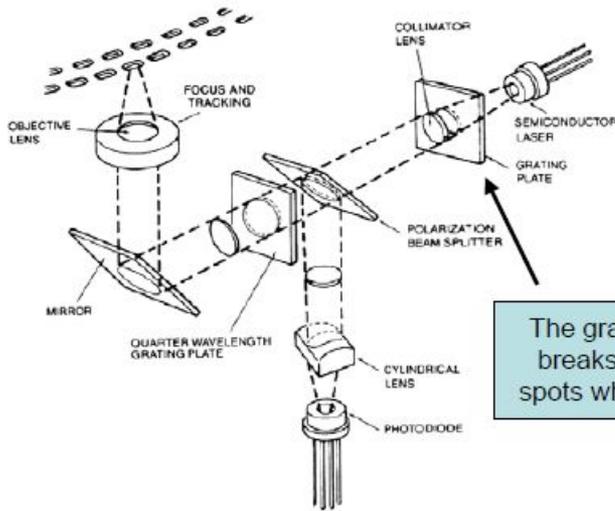
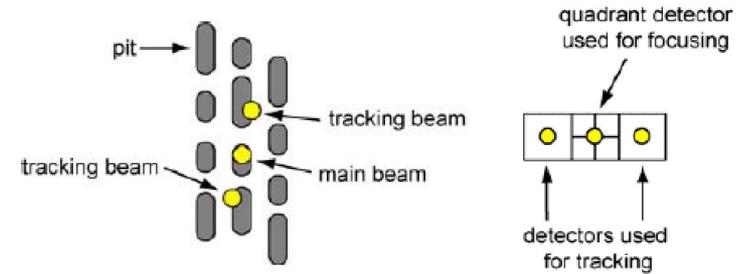


Дифракционная решетка разбивает падающую волну на набор плоских волн



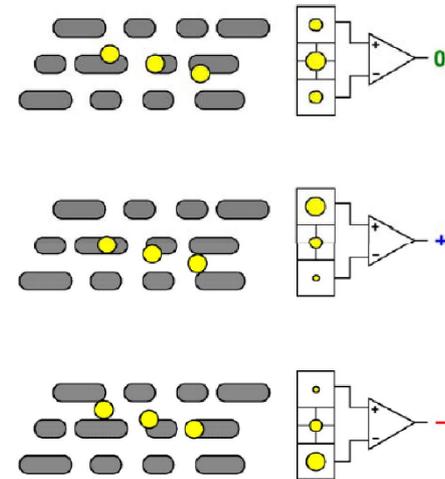
СЧИТЫВАНИЕ CD ДИСКОВ

Важно удерживать головку на треке



The grating plate after the laser breaks up the beam into three spots which are used for tracking

Принцип работы квадратурного детектора

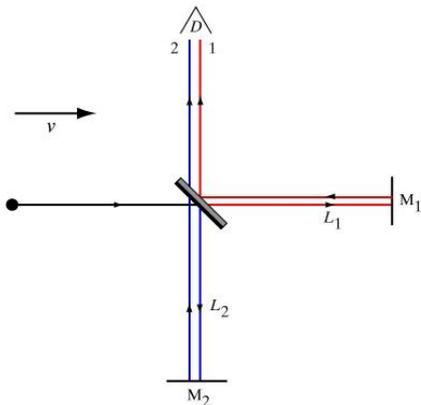


Интерферометры

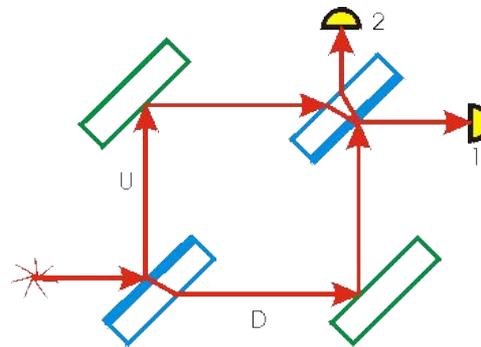
- При соосном распространении волн

$$\varphi = k \cdot d = \frac{2\pi}{\lambda} d \Rightarrow I = 2I_0 \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} d\right) \right]$$

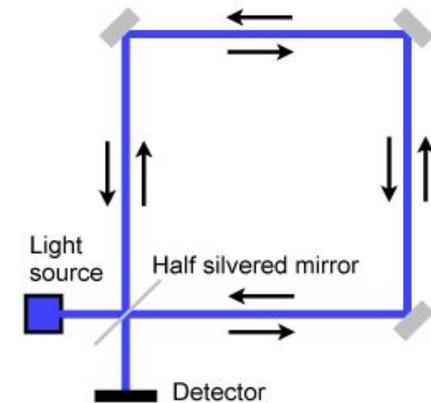
Майкельсона



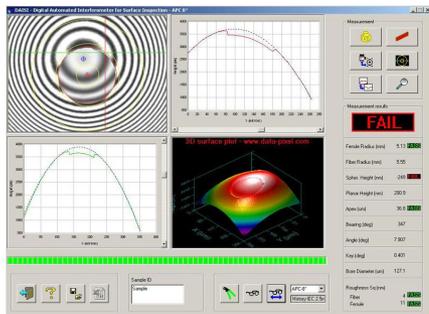
Маха - Цандера



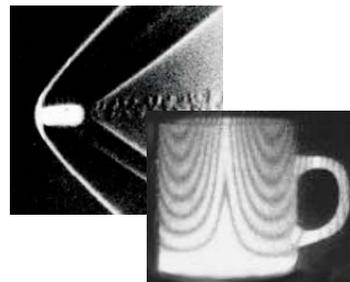
Саньяка



Интерферометры могут использоваться для точной регистрации изменения фазы (оптической разности хода)
Точность измерений порядка длины волны света $d = \lambda \Rightarrow \varphi = 2\pi$



Тестирование поверхностей



Картинки мех. напряжений и плотностей

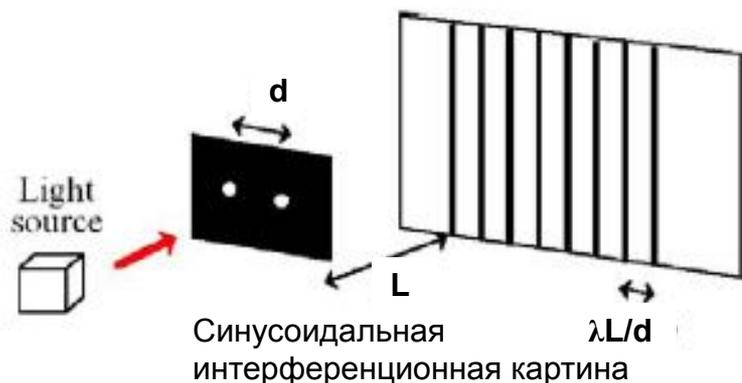


Оптические датчики

Когерентность

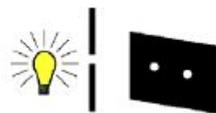
Как проявляется когерентность?

Эксперимент Юнга



Солнечный свет: $d < 70 \mu\text{m}$

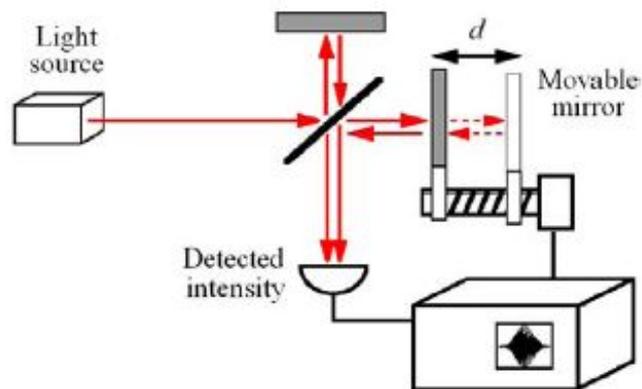
Лампа накаливания: источник отнесен на значительное расстояние



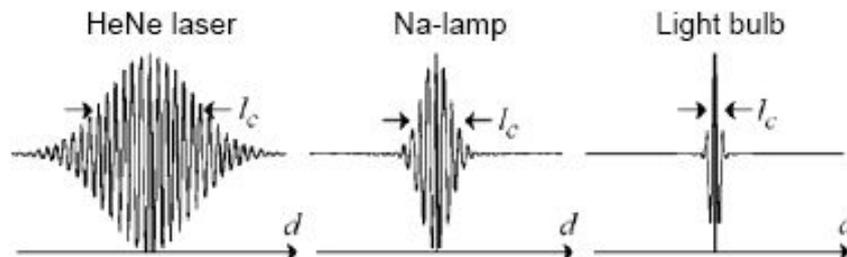
Можно расположить пинхол

Лазер: полосы видны всегда

Интерферометр Майкельсона



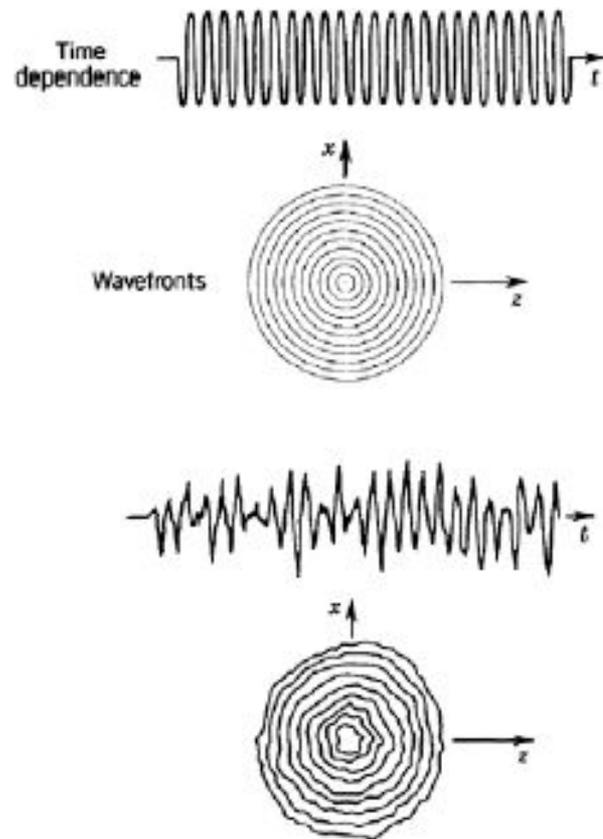
Зависимость интенсивность как функция разности хода лучей



Интерференция не наблюдается при разности хода превышающей длину l_c

Световая волна случайна по своей природе

- Флуктуации источника света.
 - Лампа накаливания дает излучения от множества нагретых атомов, находящихся в различных условиях, и излучающих независимо на разных частотах, с разной фазой.
- Рассеяние в неоднородной среде.
 - Например на турбулентной жидкости или шероховатой поверхности приводит к случайным изменениям в волновом фронте.
- Статистические методы должны использоваться для описания.
 - Квантовая теория света также описывает излучение как вероятностный процесс.



Интенсивность

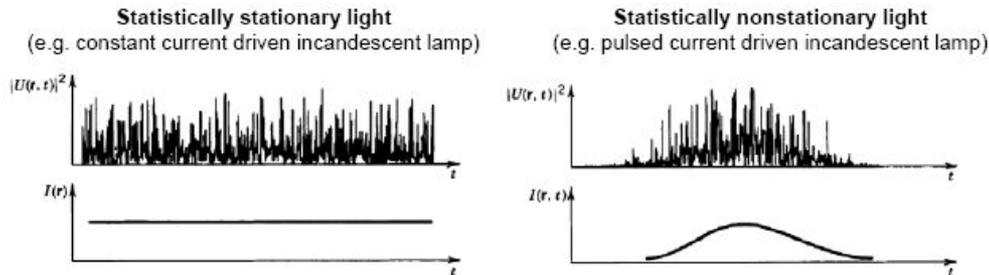
Наблюдаемые в экспериментах (измеряемые) параметры световой волны являются усреднениями случайной функции по времени измерения.

Случайная волновая функция $u(r,t)$ удовлетворяет волновому уравнению и граничным условиям. Статистические средние также удовлетворяют этим законам.

$$I(r,t) = \langle |U(r,t)|^2 \rangle$$

Символ $\langle \rangle$ обозначает усреднение по множеству реализации.

Величина $|U(r,t)|^2$ называется мгновенная интенсивность.



$$I(r,t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |U(r,t)|^2 dt$$

Для стационарного света интенсивность не зависит от времени и выражается через усреднение по длительному промежутку времени

Когерентность

Корреляционная функция между двумя случайными амплитудами световой волны, разнесенных в пространстве и времени определяет степень когерентности света

$$G(r_1, r_2, \tau) = \langle U^*(r_1, t) \cdot U(r_2, t + \tau) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T U^*(r_1, t) \cdot U(r_2, t + \tau) dt$$

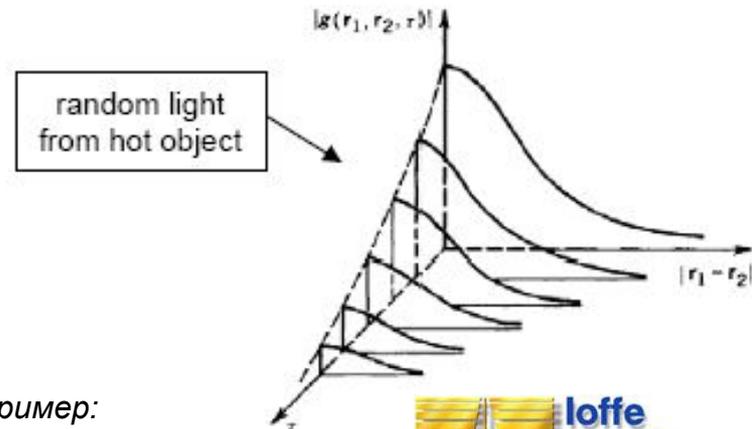
Функция взаимной когерентности

Нормированная корреляционная функция называется комплексной степенью когерентности

$$g(r_1, r_2, \tau) = G(r_1, r_2, \tau) / G(r_1, r_2, 0) = G(r_1, r_2, \tau) / \sqrt{I(r_1) \cdot I(r_2)}$$

$$0 \leq |g(r_1, r_2, \tau)| \leq 1$$

$$|g(r_1, r_2, \tau)| = 1;$$



Пример:
Степень когерентности
лампы накаливания

Временная когерентность.

Рассмотрим флуктуации стационарного света (средняя интенсивность постоянна) в фиксированной точке пространства ($r_1=r_2=r$).

$$G(\tau) = \langle U^*(t) \cdot U(t+\tau) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T U^*(t) \cdot U(t+\tau) dt \quad I = G(0)$$

$g(\tau)$ определяет насколько свет близок к монохроматической волне.

$$g(\tau) = G(\tau) / G(0) = G(\tau) / I$$

$$0 \leq |g(\tau)| \leq 1$$



$$\tau_c = \int_{-\infty}^{\infty} |g(\tau)|^2 d\tau$$

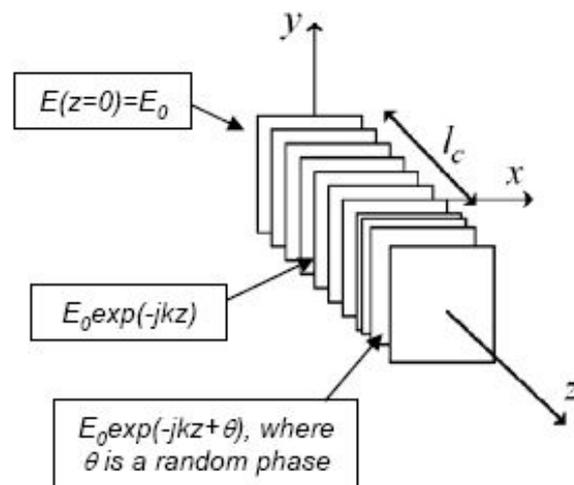
Время когерентности определяет промежуток времени на котором волна описывается синусоидой (промежуток времени между сбоями фазы)

Временная когерентность.

Расстояние которое проходит световая волна за время когерентности называется продольной длиной когерентности

$$l_c = c \cdot \tau_c$$

Если разность ходы лучей в интерферометре превосходит длину когерентности, интерференционная картина не наблюдается.



Оптический спектр.

Спектральная интенсивность случайной световой волны $\langle |\tilde{U}(\nu)|^2 \rangle$ определяется усредненное значение преобразования Фурье.

$$S(\nu) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left\langle \left| \int_{-T}^T U(t) \cdot \exp(-j2\pi\nu t) dt \right|^2 \right\rangle$$

$$S(\nu) = 0, \nu < 0$$

$$I = \int_0^{\infty} S(\nu) d\nu$$

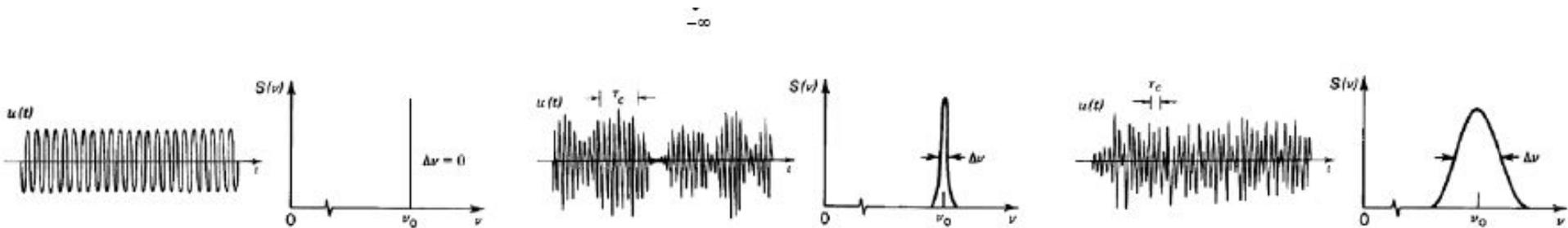
S - спектральная плотность мощности: средняя мощность через единичную площадь, переносимая волнами в бесконечно малой полосе частот $d\nu$ [Вт/(см²Гц)].

S связана с функцией временной когерентности через преобразование Фурье

$$S(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau) \cdot \exp(-j2\pi\nu\tau) d\tau$$

Оптический спектр.

Ширина спектра излучения напрямую связана с временем когерентности

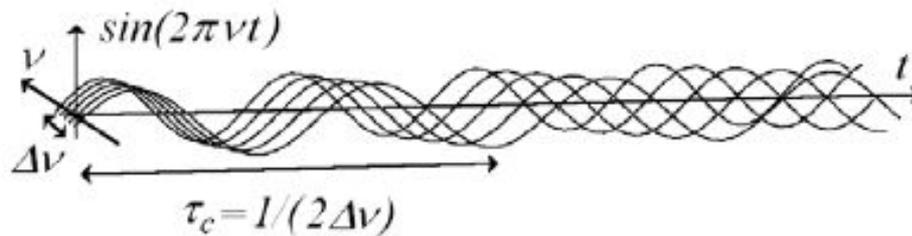


$$\Delta \nu_c = \left(\int_0^{\infty} S(\nu) d\nu \right)^2 / \int_0^{\infty} S^2(\nu) d\nu \quad \rightarrow \quad \Delta \nu_c = \frac{1}{\tau_c}$$

При определении ширины спектра как FWHM соотношение зависит от формы спектра

Источник с более узким спектром имеет большую длину когерентности.

$$\Delta \nu_c = 1/\tau_c = c/\Lambda_c$$



Через время $\tau_c = 1/(2\Delta\nu)$ спектральные компоненты приобретают сдвиг π

Пространственная когерентность.

Пространственная когерентность описывается корреляционной функцией для заданной временной задержки τ , обычно $\tau = 0$.

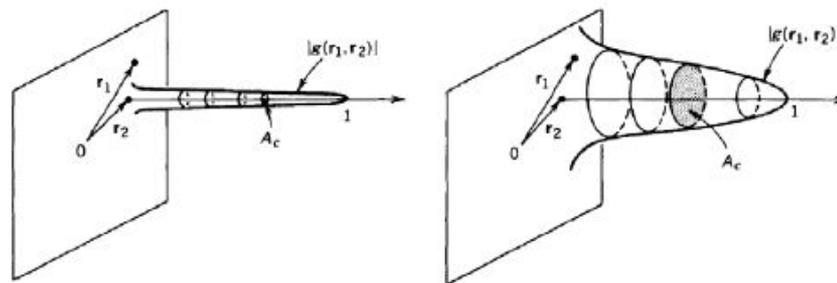
$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle U^*(\mathbf{r}_1, t)U(\mathbf{r}_2, t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T U^*(\mathbf{r}_1, t)U(\mathbf{r}_2, t) dt$$

Mutual intensity

$$g(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) / \sqrt{I(\mathbf{r}_1)I(\mathbf{r}_2)}$$

Normalized mutual intensity

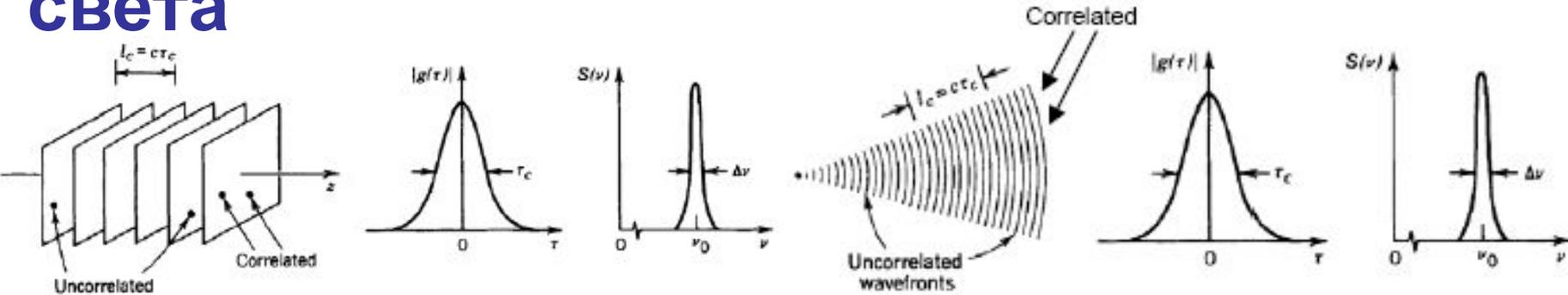
$$0 \leq |g(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)| \leq 1$$



Если область когерентности больше апертуры, то свет считают когерентным, аналогично если область когерентности меньше разрешения, то свет абсолютно некогерентный.

Для излучения разогретого тела эта площадь порядка λ^2

Интерференция частично когерентного света



Для фиксированной точки пространства интенсивность двух интерферирующих световых волн запишется как:

$$I = \langle |U_1 + U_2|^2 \rangle = \langle |U_1|^2 \rangle + \langle |U_2|^2 \rangle + \langle U_1^* U_2 \rangle + \langle U_1 U_2^* \rangle = I_1 + I_2 + G_{12} + G_{12}^* = I_1 + I_2 + 2 \operatorname{Re}(G_{12})$$

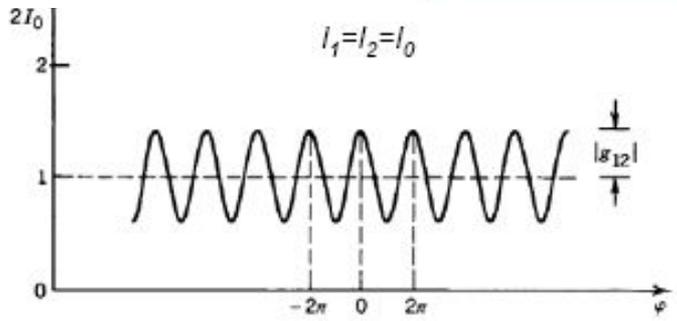
→

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} |g_{12}| \cos \varphi$$

Interference equation

$$g_{12} = \langle U_1^* U_2 \rangle / \sqrt{I_1 I_2}$$

$$\varphi = \arg(g_{12})$$

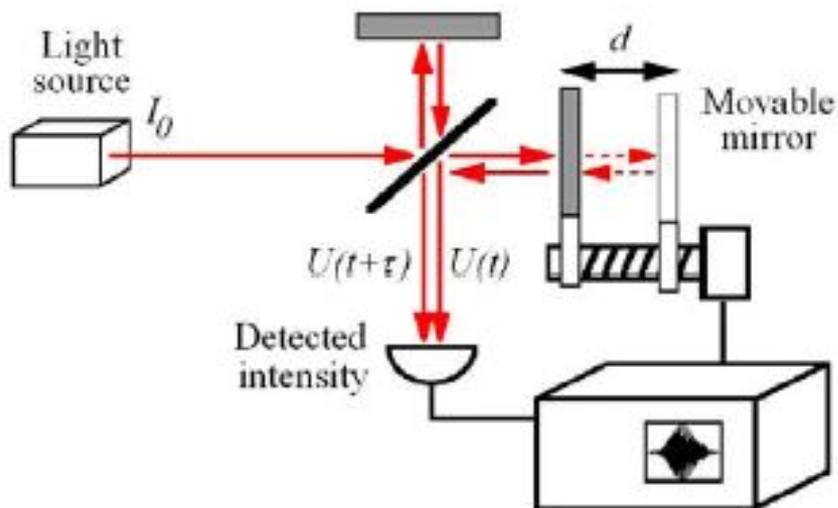


Сила интерференции выражается через видность

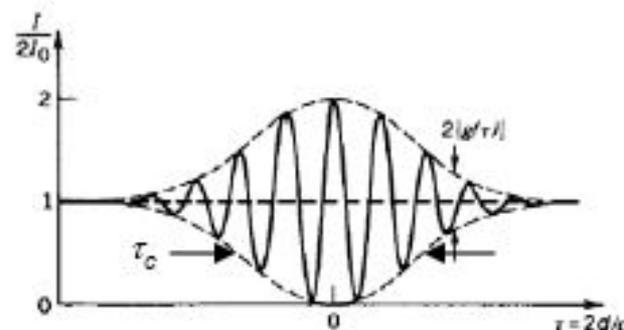
$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \quad V = |g_{12}|$$

Интерференция и временная когерентность

Michelson interferometer



Interferogram



$$I = 2I_0 \left(1 + |g_a(\tau)| \cos(2\pi\nu_0\tau + \varphi_a(\tau)) \right), \text{ where } \varphi_a(t) = \arg(g_a(\tau))$$

Временная когерентность описывает возможность интерферировать с задержанной на τ репликой

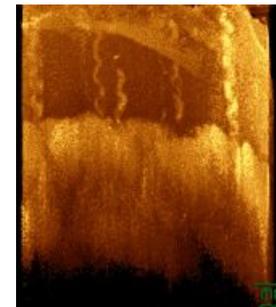
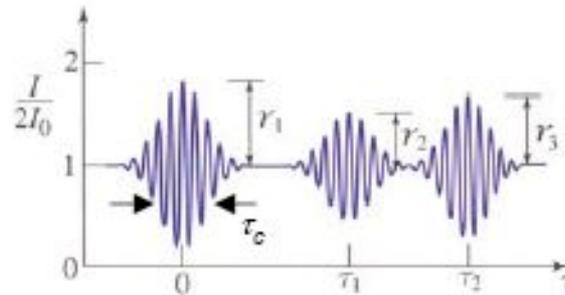
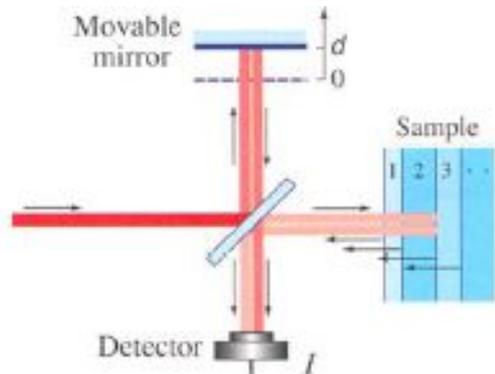
Применения

Фурье спектроскопия (FTIR)

$$S(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau) \exp(-j2\pi\nu\tau) d\tau = I_0 \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) \exp(-j2\pi\nu\tau) d\tau$$



Томография в некогерентном свете

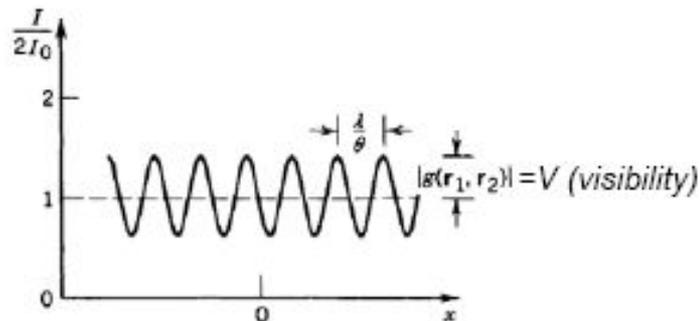
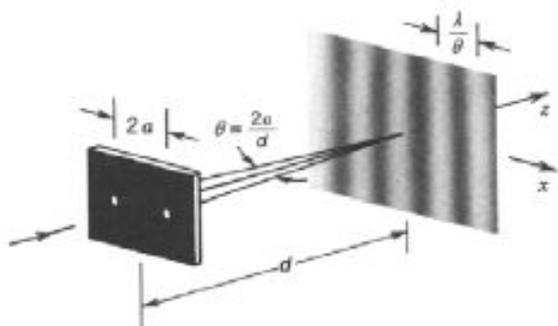


Томограмма кончика пальца

$$I/2I_0 \approx 1 + \sum_i r_i |g_a(\tau - \tau_i)| \cos(2\pi\nu_0(\tau - \tau_i) + \varphi_a(\tau - \tau_i))$$

↑ amplitude reflectivity of boundary i
↑ Time delay due to movable mirror and boundary i , respectively

Интерференция и пространственная когерентность



$$g_{12} = \frac{\langle U_1^*(\mathbf{r}, t) U_2(\mathbf{r}, t) \rangle}{I_0} = g(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau(\mathbf{x})),$$

$$\tau(\mathbf{x}) = \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|}{c} \approx \frac{(x+a)^2 - (x-a)^2}{2dc} = \frac{\theta}{c} x$$

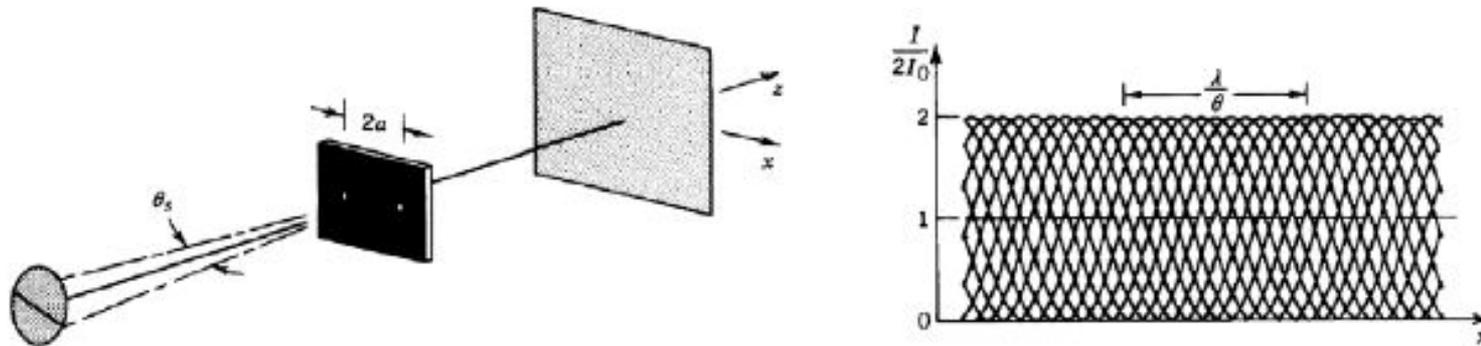
$$g(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) \approx g(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \exp(j2\pi\nu_0\tau)$$

Квазимонохроматический свет

$$I(x) \approx 2I_0 \left(1 + |g(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)| \cos\left(\frac{2\pi\theta}{\lambda} x + \varphi\right) \right) \quad \varphi = \arg(g(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2))$$

constant

Протяженный источник света



$$2a < \lambda / \theta_s.$$

Связь между угловым размером источника и расстоянием между отверстиями

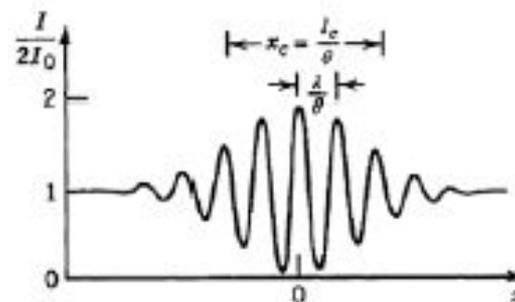
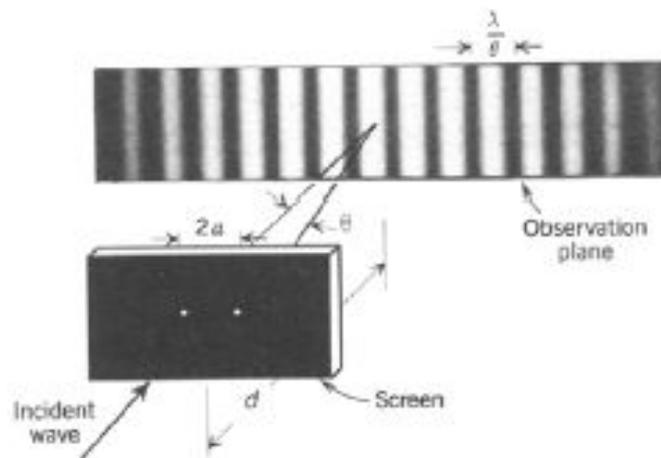
$$A_c = \frac{\pi \rho_c^2}{4} \approx \rho_c^2 = \left(\frac{\lambda}{\theta_s} \right)^2$$

Где ρ_c - поперечная длина когерентности

Влияние ширины спектра

$$I(x) \approx 2I_0 \left(1 + |g_a(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau(x))| \cos \left(\frac{2\pi\theta}{\lambda} x + \varphi(\tau(x)) \right) \right)$$

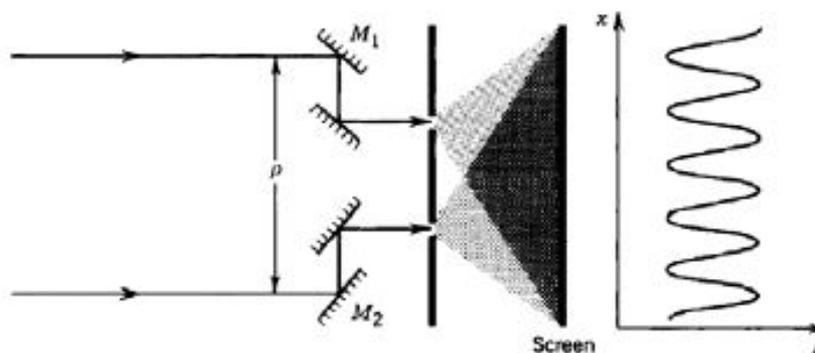
where $\varphi(\tau(x)) = \arg(g_a(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau(x)))$, and $\tau(x) = \theta x / c$.



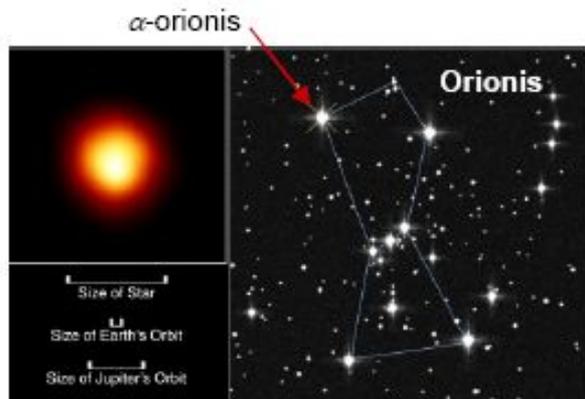
$$\tau < \tau_c = 1/\Delta\nu_c \quad x_c = \tau_c c / \theta = l_c / \theta.$$

Применения

Звездный интерферометр Майкельсона



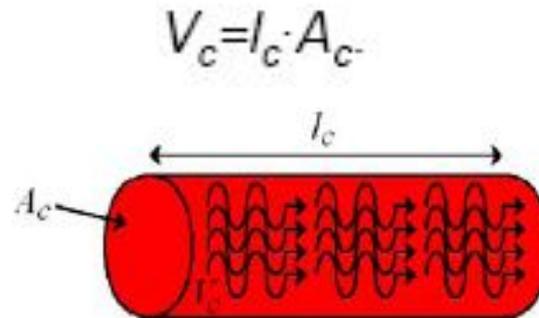
$$\theta_s = 1.22 \lambda / \rho_c$$



α -Орион, $\rho_c = 3.1 \text{ m}$, $\lambda = 0.57 \mu\text{m}$, $\theta_s = 22.6 \cdot 10^{-8} \text{ rad}$
(Michelson/Pease, 1920)

Солнце, $\lambda = 0.5 \mu\text{m}$, $\theta_s = 0.5 \text{ grad}$, $\rho_c = 70 \mu\text{m}$

Когерентный объем



Используя принцип неопределенности Гейзенберга можно показать, что внутри данного объема фотоны неразличимы (имеют одинаковую волновую функцию). Число фотонов в данном объеме зависит от источника, для лазера $\sim 10^9$

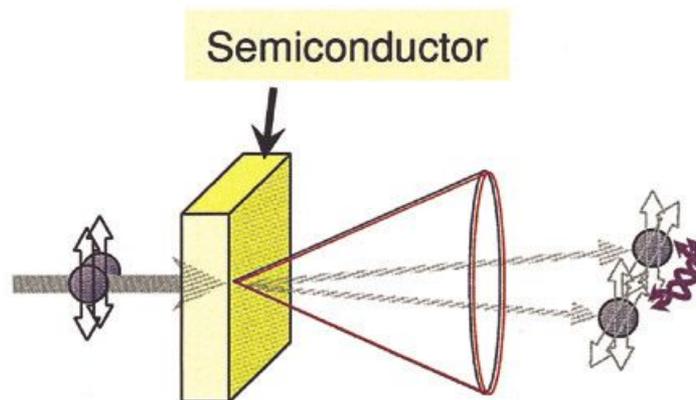
Спутанные фотоны

(entangled photons)

Пара фотонов описывается общей волновой функцией
(на примере состояния поляризации)

$$|\phi\rangle = (1/2)^{0.5} (|1,n\rangle|2,n\rangle + |1,m\rangle|2,m\rangle); \quad n \perp m$$

Измерение поляризации одного фотона строго задает поляризацию второго

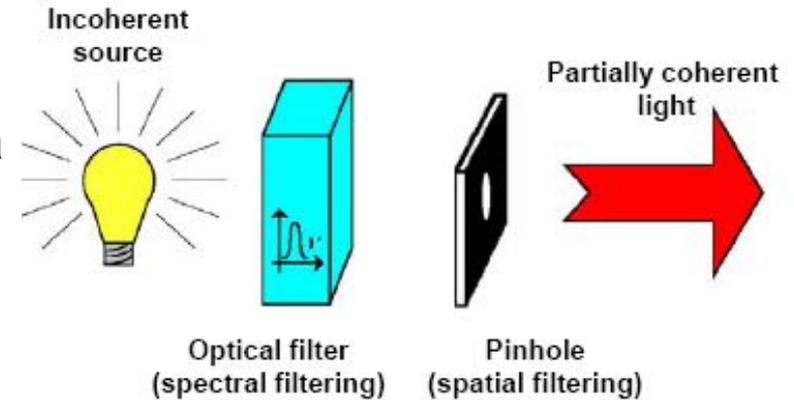


Созданы источники на основе понижения частоты в нелинейных кристаллах

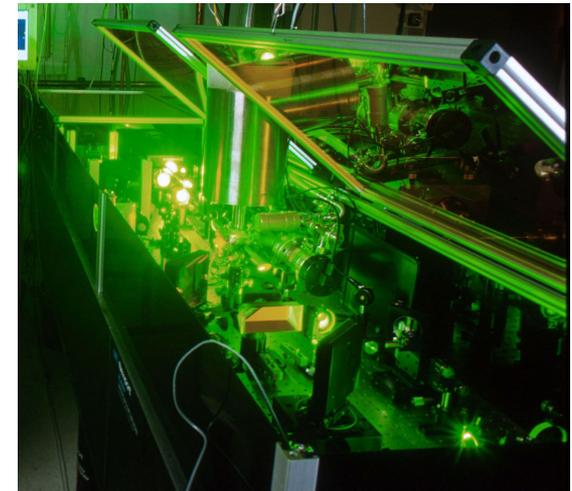
Применения: Фотолитография, квантовая криптография

Когерентный свет

Классический источник когерентного света



Квантовый источник когерентного света (laser)



Применения:

Спектроскопия и интерферометрия

Голография

Когерентные системы передачи и обработки сигналов
(фазовая и частотная модуляция)