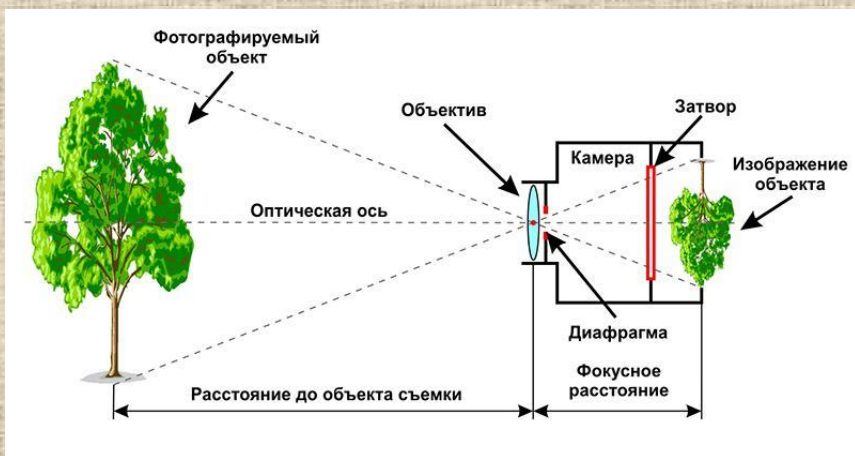


Структура изображения



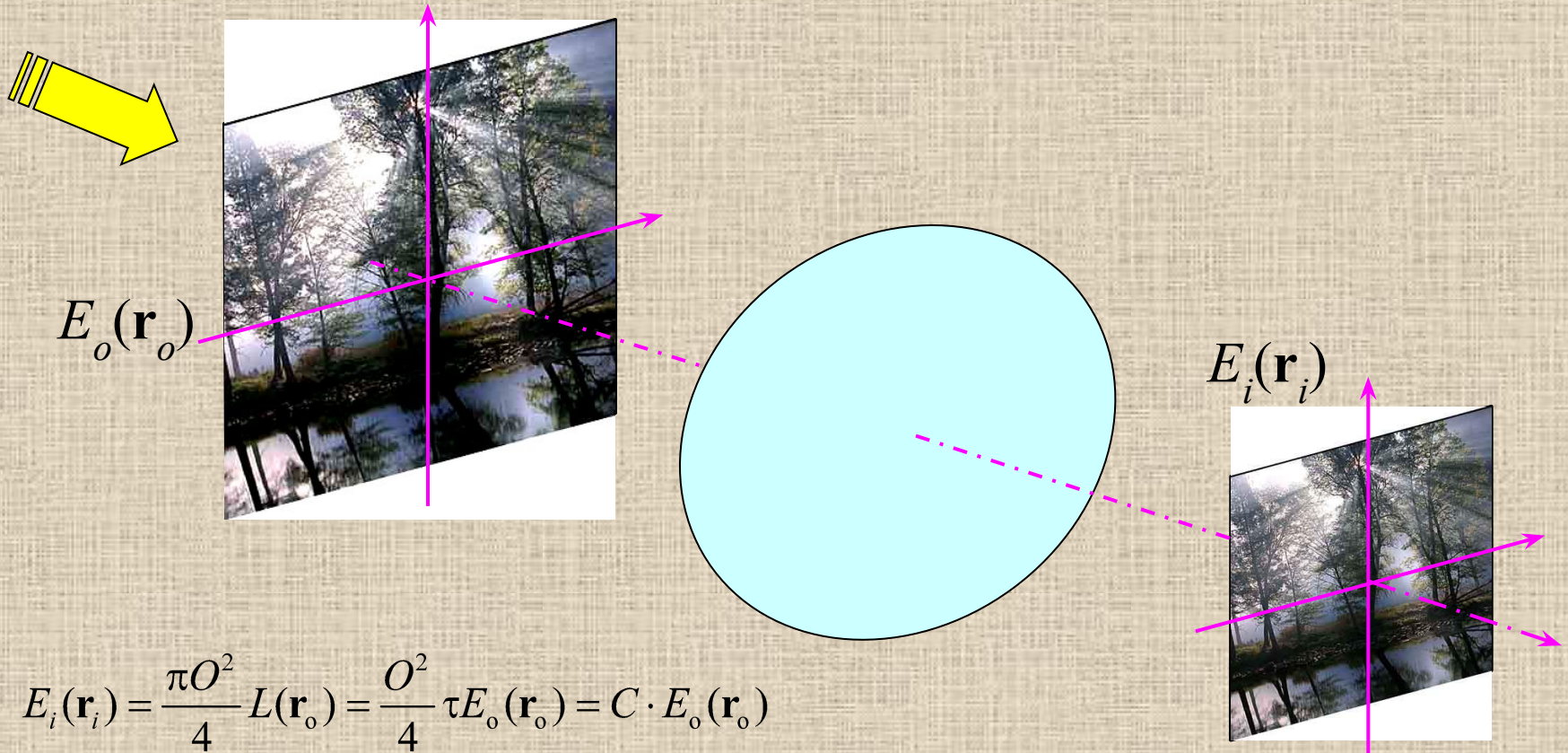
Будак Владимир Павлович,
НИУ «МЭИ»
кафедра светотехники

☐: +7 (495) 763-5239

BudakVP@mpei.ru



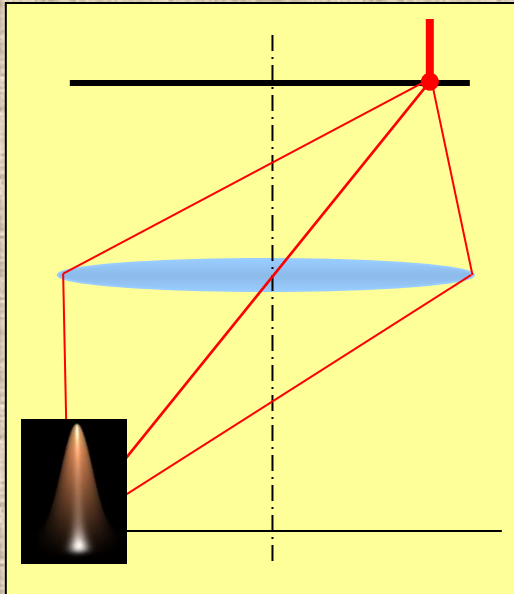
Оптическое изображение



$$E_i(\mathbf{r}_i) = \frac{\pi O^2}{4} L(\mathbf{r}_o) = \frac{O^2}{4} \tau E_o(\mathbf{r}_o) = C \cdot E_o(\mathbf{r}_o)$$

Вследствие неидеальности ОС – aberrации, диффракция, – изображение точки превращается в пятно

Свертка – convolution



$h(\mathbf{r}_o \rightarrow \mathbf{r}_i)$ – функция рассеяния точки (ФРТ, Point Spread Function, PSF) – распределение облученности в изображении от светящейся точки объекта

$$E_i(\mathbf{r}_i) = \int E_o(\mathbf{r}_o) h(\mathbf{r}_i \rightarrow \mathbf{r}_o) d^2 r_o$$

- ФРТ не зависит от абсолютного положения точки в плоскости объекта – системы инвариантные к сдвигу
- Интеграл суперпозиции переходит в интеграл свертки

$$E_i(\mathbf{r}_i) = \int E_o(\mathbf{r}_o) h(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_o) d^2 r_o \equiv E_o(\mathbf{r}) * h(\mathbf{r})$$

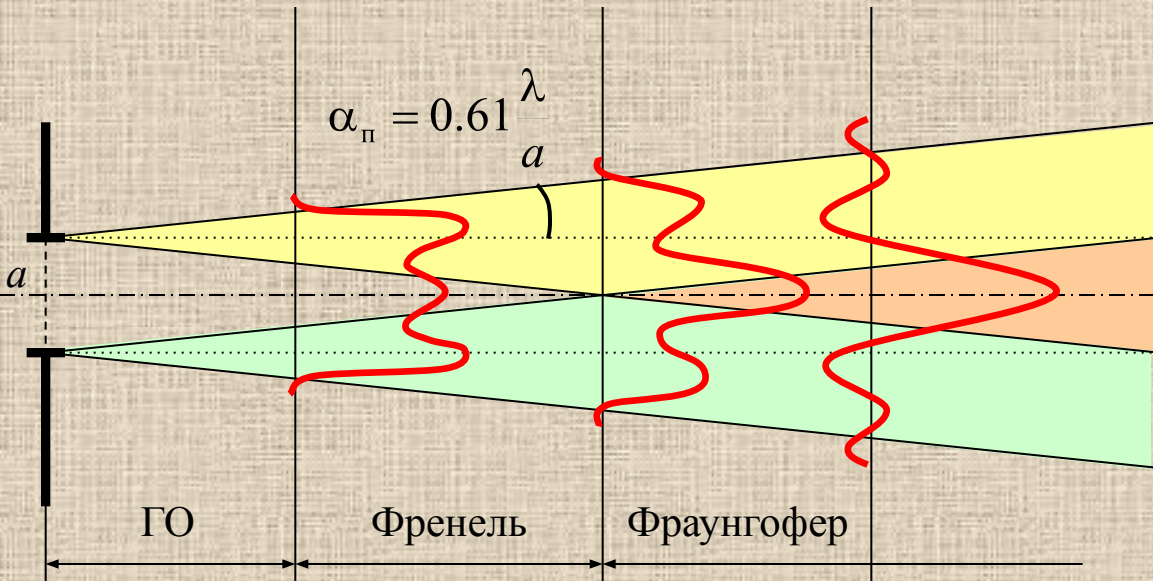
Распределение облученности в плоскости изображения связано с распределением облученности плоскости анализа через свертку

Фурье-оптика (Fourier)

-
- Duffieux P.M. L'Intégrale de Fourier et ses Applications à L'Optique. – Besançon, 1946
 - Schade O.H. Electro- optical characteristics of television systems // RCA Rev., 9, 5 (Part I), 245 (Part II), 490 (Part III), 653 (Part IV) (1948)
 - Марешаль А., Франсон М. Структура оптического изображения. – М.: Мир, 1964
 - О'Нейл Э. Введение в статистическую оптику. – М.: Мир, 1966
 - Гудмен Дж. Введение в фурье-оптику. – М.: Мир, 1970
 - Папулис А. Теория систем и преобразований в оптике. М.: Мир, 1971
-

С позиций светового (лучевого) поля также возможен вывод уравнения свертки, но сложнее и выполнен позднее

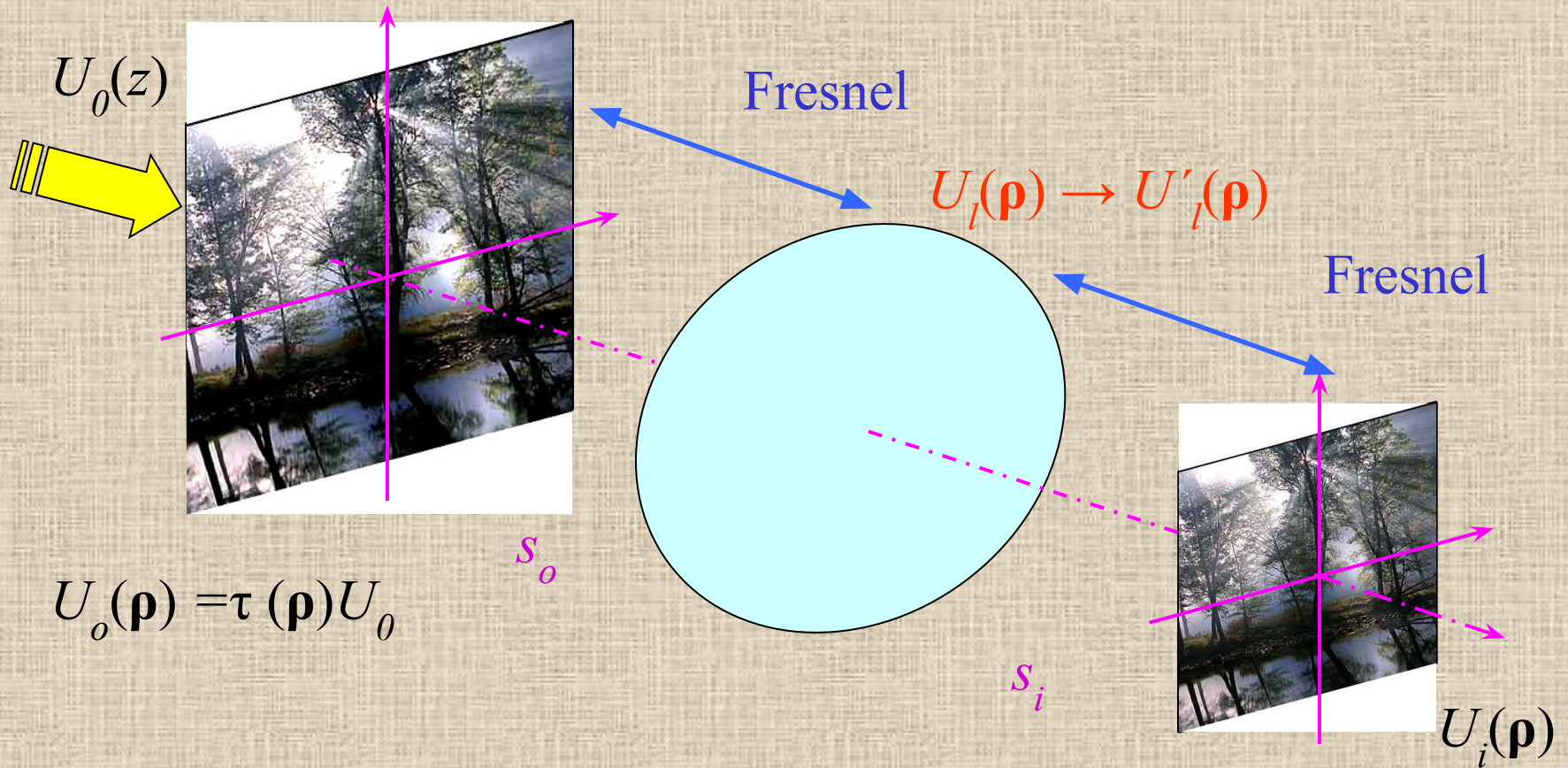
Общая картина электромагнитного поля



- пятно много меньше размера a , интенсивность по падающей волне – приближение ГО;
- пятно соизмерим с a , влияние соседних областей велико, интенсивность сильно изменяется с расстоянием – дифракция Fresnel;
- пятно много больше a , интенсивность мало зависит от расстояния – дифракция Fraunhofer.

*Открыватель дифракции монах-иезуит Франческо Гримальди
(Grimaldi, 1618-1663)*

Поле в плоскости анализа ОС



Для анализа ОС дифракцию Fresnel можно считать точным решением скалярного волнового уравнения

Оптическая передаточная функция

Для систем инвариантных к сдвигу можно предложить иное разбиение входного сигнала на элементарные, что приведет к иной формулировке принципа суперпозиции

$$E_i(\mathbf{k}) = \int E_i(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^2r, \quad E_o(\mathbf{k}) = \int E_o(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^2r, \quad H(\mathbf{k}) = \int h(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^2r$$

$$E_i(\mathbf{r}_i) = \int E_o(\mathbf{r}_o) h(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_o) d^2r_o$$

$$\iint E_o(\mathbf{r}_o) h(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_o) d^2r_o e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_i} d^2r_i = \int E_o(\mathbf{r}_o) \int h(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_o) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_i} d^2r_i d^2r_o =$$

$$\int E_o(\mathbf{r}_o) \int h(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_o) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_i - i\mathbf{k}\mathbf{r}_o + i\mathbf{k}\mathbf{r}_o} d^2r_i d^2r_o = \int E_o(\mathbf{r}_o) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_o} \int h(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_o) e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_o)} d^2r_i d^2r_o$$

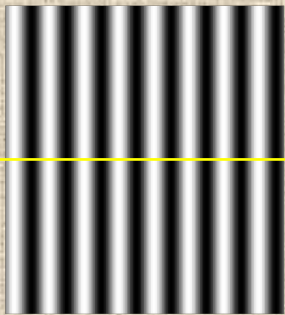
$$\rho = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_o : \int E_o(\mathbf{r}_o) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_o} \int h(\rho) e^{i\mathbf{k}\rho} d^2\rho d^2r_o = \int E_o(\mathbf{r}_o) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_o} d^2r_o \int h(\rho) e^{i\mathbf{k}\rho} d^2\rho = E_o(\mathbf{k}) H(\mathbf{k})$$

$$E_i(\mathbf{k}) = E_o(\mathbf{k}) H(\mathbf{k})$$

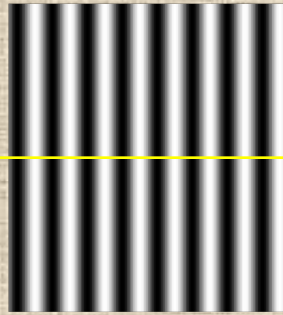
Преобразование Fourier переводит свертку в произведение
Optical Transmittance Function

Пространственные гармоники

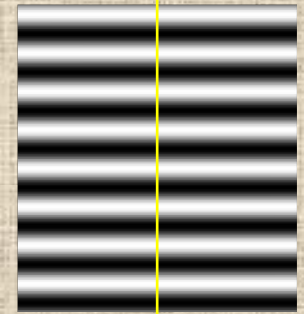
$$\sin kx = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}$$



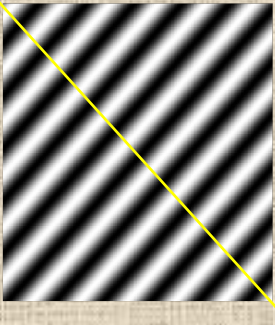
$$\cos kx = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}$$



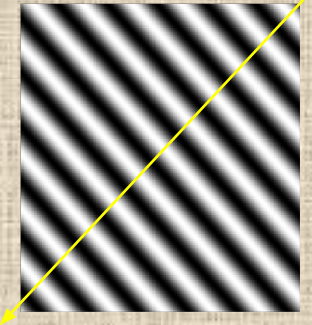
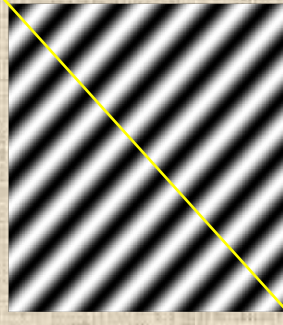
$$\sin ky = \frac{e^{iky} - e^{-iky}}{2i}$$



$$\sin(kx + ky) = \sin \mathbf{kr} = \frac{e^{i\mathbf{kr}} - e^{-i\mathbf{kr}}}{2i}$$



$$\cos(kx + ky) = \cos \mathbf{kr} = \frac{e^{i\mathbf{kr}} + e^{-i\mathbf{kr}}}{2}$$



*Пространственные гармоники
— специальные элементарные сигналы*

Пространственный спектр изображения

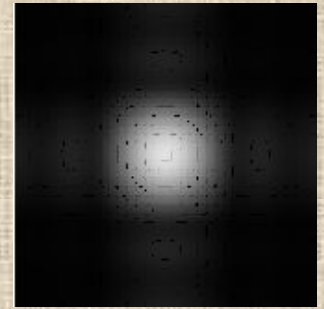
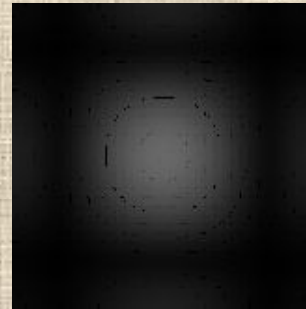
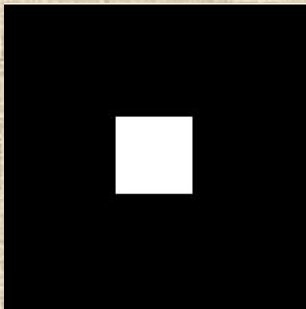
Исходное $N=256$

$M=1$

$$E_i(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^M c_l e^{i\mathbf{k}_l \mathbf{r}}$$

$M=2$

$M=4$

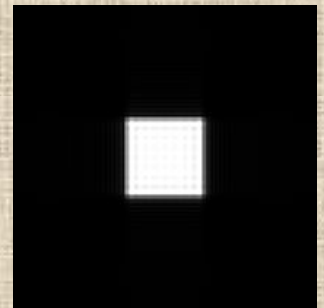
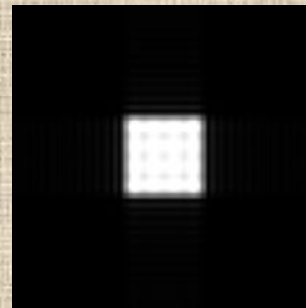
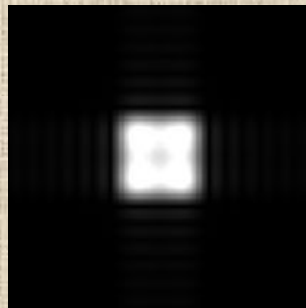
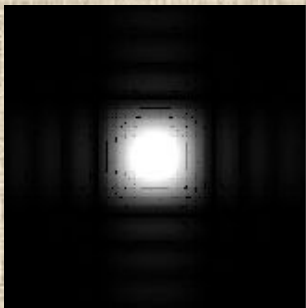


$M=8$

$M=16$

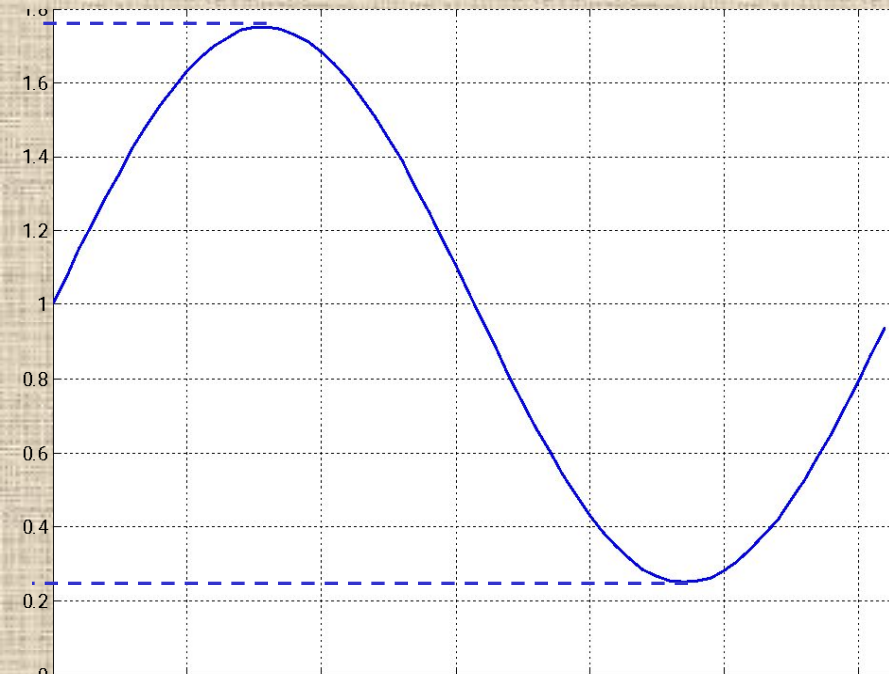
$M=32$

$M=64$



Пространственный спектр – разложение изображения на сумму элементов: пространственных гармоник

Преобразование спектра линейной системой



$$\bar{I} = \frac{I_{\max} + I_{\min}}{2}, \quad \Delta I = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{2}$$

$$K = \frac{\Delta I}{\bar{I}} = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

$$I_o(x) = \bar{I}_o + \Delta I_o \sin(kx), \quad I_i(x) = \bar{I}_i + \Delta I_i \sin(kx)$$

$$K_i = \frac{\Delta I_i}{\bar{I}_i} = \frac{|H(k)| \Delta I_o}{H(0) \bar{I}_o} = \frac{|H(k)|}{H(0)} K_o, \quad T(k) = \frac{|H(k)|}{H(0)}$$

- $|H(\mathbf{k})|$ - модуляционная передаточная функция (МПФ)
- $\arg H(\mathbf{k})$ – фазовая передаточная функция (ФПФ)

Нормированная МПФ характеризует передачу контраста в изображении

Круглосимметричные системы

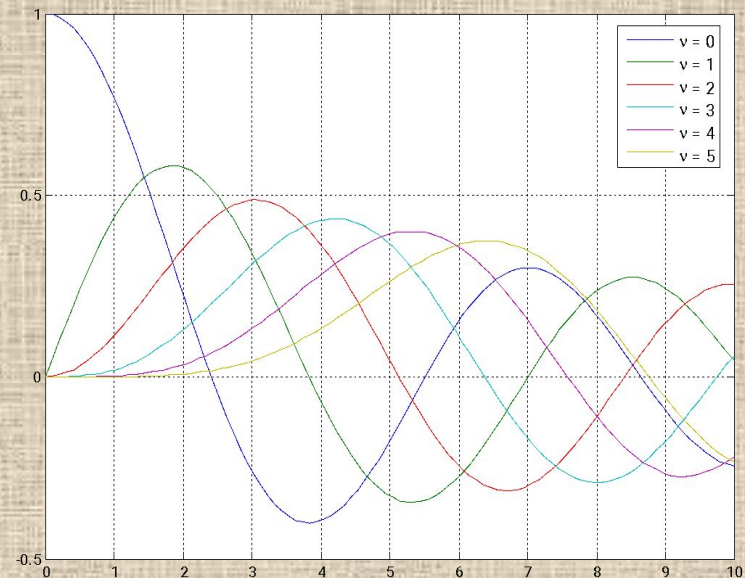
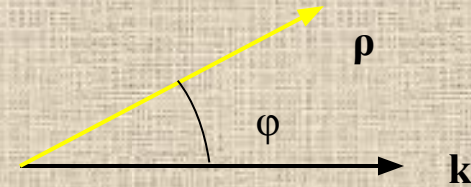
$$h(\rho) = h(|\boldsymbol{\rho}|) = h(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_o|)$$

$$H(\mathbf{k}) = \int h(\rho) e^{i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}} d^2\rho = \int_0^\infty h(\rho) \int_0^{2\pi} e^{ik\rho \cos\varphi} d\varphi \rho d\rho$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix \cos\varphi} d\varphi = J_0(x)$$

$$H(\mathbf{k}) = 2\pi \int_0^\infty h(\rho) J_0(k\rho) \rho d\rho \equiv H(k)$$

$$h(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty H(k) J_0(k\rho) k dk$$



*Преобразование Нанкел всегда действительная функция –
отсутствие фазовых искажений*

Система

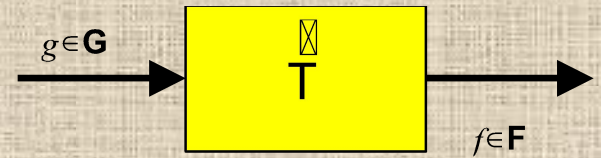
Пусть имеется набор элементов $f \in \mathbf{F}$ и $g \in \mathbf{G}$, \mathbf{G} , \mathbf{F} – линейные пространства:

$$\forall g_1, g_2 \in \mathbf{G} \text{ и } \forall f_1, f_2 \in \mathbf{F}$$
$$g_1 + g_2 \in \mathbf{G}, \alpha g_1 \in \mathbf{G}, f_1 + f_2 \in \mathbf{F}, \alpha f_1 \in \mathbf{F}$$

где α – комплексное число.

Система – правило сопоставление элементов из одного пространства элементам другого

$$(\forall g \in \mathbf{G})(\exists f \in \mathbf{F}): f = \mathbb{T}g$$



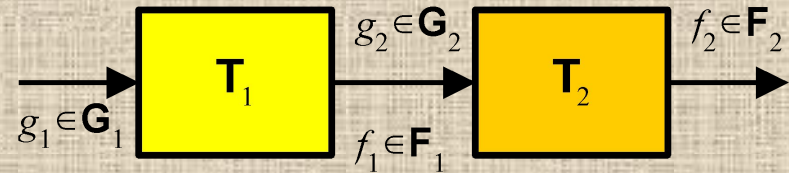
1. $\mathbf{F} \cong \mathbf{G}$ – преобразование;
2. если $(\forall g \in \mathbf{G})(\exists f \in \mathbf{F})$ и при этом f – единственное и наоборот, то отображение называется взаимно-однозначным;
3. если $g=g(t), f=f(t)$, то система называется одномерным, если $g=g(x,y) \cong g(\mathbf{r})$ и $f=f(x,y) \cong f(\mathbf{r})$, то система двумерная, а ее сигналы принято называть полями;
4. сигналы могут быть как скалярами, так и векторами (матрицами).

Система осуществляет отображение пространства входных сигналов в пространство выходных

Линейная система

если множество выходных сигналов первой системы является подмножеством входных сигналов второй системы, то

$$f_2 = \overset{\forall}{T}_2 g_2 = \overset{\forall}{T}_2 f_1 = \overset{\forall}{T}_2 \overset{\forall}{T}_1 g_1 = \overset{\forall}{T} g_1$$



то есть любую составную систему всегда можно заменить одной системой

Описание систем значительно упрощается, если система линейная. Система называется линейной, если

$$(\forall g_i \in \mathbf{G})(\forall \alpha_i): \overset{\forall}{L}\left(\sum_{i=1}^N \alpha_i g_i\right) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \overset{\forall}{L}(g_i)$$

Является математической формулировкой принципа суперпозиции