Раздел 3. Интегралы и их свойства
Тема 3.2. Свойства и метода интегрирования

План

1. Интегрирование через преобразование дифференциала
2. Интегрирование методом замены переменной
3. Интегрирование по частям
4. Метод интегрирования рациональных дробей

Интегрирование через преобразование дифференциала

$$1)\ dx = d(x+b)$$

$$2)\ dx = \frac{1}{a} d(ax), \text{где } a \neq 0$$

$$3)\ dx = \frac{1}{a} d(ax+b), \text{где } a \neq 0$$

Пример 2.1

- $\int \sqrt{x-2}\,dx = \int (x-2)^{\frac{1}{2}}\,dx =$

$$=\int (x-2)^{\frac{1}{2}}\,d(x-2) =$$

$$\frac{(x-2)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{(x-2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{(x-2)^3} + c$$

- $\int \sin 5x \, dx = \int \sin 5x \cdot \frac{1}{5} d(5x) =$

$$= \frac{1}{5} \int \sin 5x \, d(5x) = -\frac{1}{5} \cos 5x + c$$

Метод замены переменной

Пример 2.2

$$\int \frac{3x\,dx}{x^2+7} =$$

1) $U = x^2 + 7$

2) $dU = (x^2 + 7)' \cdot dx$

$$dU = 2x\,dx$$

$$xdx = \frac{1}{2}dU$$

$$\int \frac{3x\,dx}{x^2+7} = \int \frac{3\cdot\frac{1}{2}dU}{U} =$$

$$\frac{3}{2}\int \frac{dU}{U} = \frac{3}{2}\ln|U| + c =$$

$$= \frac{3}{2}\ln|x^2+7| + c$$

$$\int (\cos e^{3x}) \cdot e^{3x} dx =$$

1) $U = e^{3x}$

2) $dU = (e^{3x})' dx$

$$dU = e^{3x} \cdot (3x)' dx$$

$$dU = 3 \cdot e^{3x} dx$$

$$e^{3x} dx = \frac{1}{3} dy$$

- $\int (\cos e^{3x}) \cdot e^{3x} dx =$

$$\int \cos U \, \frac{1}{3} dU = \frac{1}{3} \int \cos U \, dU =$$

$$\frac{1}{3} \sin U + c = \frac{1}{3} \sin e^{3x} + c$$

Метод интегрирования по частям

- $\int U\,dV = V \cdot U - \int V\,dU$
- $\int f(Ux)d(Ux)$
- $\int P_n(x)e^{ax}dx$
- $\int P_n(x)\cos ax\,dx$
- $\int \underbrace{P_n(x)}_{U}\underbrace{\sin ax\,dx}_{dV}$

Пример 2.3

- $\int \underbrace{x}_{U} \cdot \underbrace{\sin x \, dx}_{dV} =$

1. $U = x$

$dU = (x)' dx$

$dU = dx$

2. $dV = \sin x\, dx$

$$V = \int \sin x\, dx = -\cos x + c$$

3. $\int x \cdot \sin x\, dx =$

$$-x \cdot \cos x - \int -\cos x\, dx =$$

$$-x \cdot \cos x + \int \cos x\, dx =$$

$$-x \cdot \cos x + \sin x + c$$

Метод интегрирования рациональных дробей

- Дробь является рациональной, если в числителе и в знаменателе находятся многочлены.
- Рациональная дробь является правильной, если степень числителя меньше степени знаменателя.
- Рациональная дробь является неправильной, если степень числителя больше степени знаменателя.

Пример 2.4

- $\int \frac{x^3-6}{x^2-3x+2}dx =$

1. Т. к. дробь неправильная, то выделим целую часть разделив числитель на знаменатель.

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 + 0x^2 + 0x - 6 & x^2 - 3x + 2 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3 - 3x^2 + 2x} & x + 3 \\
\qquad 3x^2 - 2x - 6 & \\
\qquad \underline{3x^2 - 9x + 6} & \\
\qquad\qquad 7x - 12 &
\end{array}
$$

$$\frac{x^3 - 6}{x^2 - 3x + 2} = x + 3 + \frac{7x - 12}{x^2 - 3x + 2}$$

2. Разложим дробную часть на сумму простейших дробей, для этого знаменатель раскладываем на множители.

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$$x_1 = 2, \qquad x_2 = 1.$$

$$(x-2)(x-1)$$

- $$\frac{7x-12}{(x-2)(x-1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1}$$

A(x -1) + B(x -2) = 7x -12

Ax – 1A +Bx – 2B = 7x – 12

$$\begin{cases} A + B = 7 \\ -A - 2B = -12 \end{cases}$$

$$-1B = -5$$

$$B = 5$$

A = 5 = 7

A = 7-5

A =2

$$\frac{7x-12}{x^2-\ 3x-2}=\frac{2}{x-2}+\frac{5}{x-1}$$

3. $\int (x + 3 + \frac{2}{x-2} + \frac{5}{x-1}) dx =$

1) $\int x\, dx = \frac{x^2}{2}$

2) $\int 3\, dx = 3x$

3) $\int \frac{2\, dx}{x-2} = 2\int \frac{d(x-2)}{x-2} = 2\ln(x-2)$

4) $\int \frac{5\, dx}{x-1} = 5\int \frac{d(x-1)}{x-1} = 5\ln(x-1)$

$$\int (x + 3 + \frac{2}{x-2} + \frac{5}{x-1})dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + 3x + 2ln(x-2) + 5\ln(x-1) + c$$

Задачи для самостоятельного решения

- Найти интегралы:

1. $\int (3x + 2)e^{2x} dx =$
2. $\int \frac{2x-3}{x^2-4x+3} dx =$