

РАЗДЕЛ 1. ПРЕДЕЛЫ И ИХ СВОЙСТВА

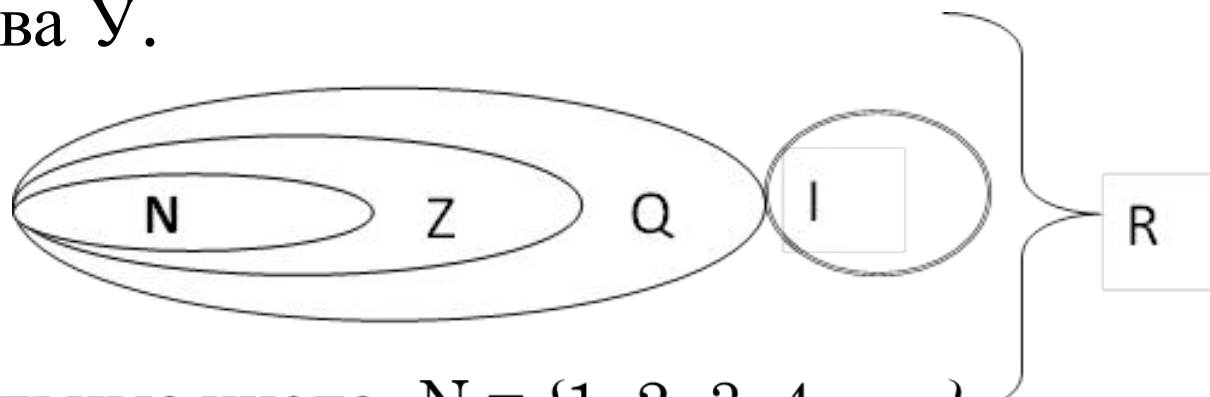
ТЕМА 1.2. ПОНЯТИЯ И СВОЙСТВА ФУНКЦИИ. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

План

- 1. Числовые множества;**
- 2. Функция одной переменной;**
- 3. Простейшие элементарные функции;**
- 4. Построение графиков функций;**
- 5. Пределы, их свойства.**

ЧИСЛОВЫЕ МНОЖЕСТВА

▣ **Опр.** Множество X называется подмножеством множества Y , если каждый элемент множества X является элементом множества Y .



Натуральные числа $N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

Целые числа $Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

Рациональные числа $Q = N + Z +$

$\left\{\frac{m}{n}, m \in Z, n \in N\right\}$

Иррациональные числа $I = \{\pi, \ell, \sqrt{7}, \dots\}$

Действительные числа $R \supset Q \supset Z \supset N$.



ФУНКЦИЯ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

- ▣ **Опр.** Переменная величина y называется функцией (или зависимой переменной) переменной величины x , называемой аргументом, или независимой переменной, если каждому допустимому значению x соответствует определённое значение y .

Способы задания функций:

1. **Аналитический** — правило соответствия задаётся в виде формулы.
2. **Табличный** — используется при проведении экспериментальных исследований. При этом данные заносятся в таблицу.
3. **Графический** — представляет запись изменения различных величин, например, от времени.
4. **Словесный.**



НАХОЖДЕНИЕ ОБЛАСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБЛАСТИ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ

1. Дробь имеет смысл, если знаменатель отличен от нуля;
2. Корень чётной степени существует, если подкоренное выражение не отрицательно;
3. Корень нечётной степени существует при любом значении подкоренного выражения;
4. Функция $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) определена на множестве всех действительных чисел, т. е. $-\infty < x < +\infty$;
5. Логарифмы отрицательных чисел не существуют;
6. Область определения функций $y = \sin x, y = \cos x, y = \arctg x$ является множество всех действительных чисел, т. е. $-\infty < x < +\infty$;
7. Функция $y = \operatorname{tg} x$ определена, если $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n = 0, 1, 2, 3, \dots$;
8. Функция $y = \arcsin x$ и $y = \arccos x$ определены, если $-1 \leq x \leq 1$.

Для нахождения области значения функции необходимо подставлять значения аргумента в аналитическую формулу и определять границы, в которых находятся изменения зависимой переменной.

Пример

$$y = \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}.$$

$$\text{ООФ: } 1 - 4x^2 > 0; \quad x^2 < \frac{1}{4}; \quad -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}.$$

$$\text{ОЗФ: } 1 \leq y \leq +\infty.$$



ОБРАТНАЯ ФУНКЦИЯ

- Если для каждого значения y из множества значений функции $y = f(x)$ становится в соответствие одно или несколько значений x из области определения функции, то такая зависимость называется *обратной функцией* и обозначается $x = Y(y)$



ЧЁТНЫЕ И НЕЧЁТНЫЕ ФУНКЦИИ

▣ **Опр.** Функция $y = f(x)$, определённая на промежутке, симметричном относительно начала координат, называется *чётной*, если для любого значения x из этой области определения $f(-x) = f(x)$, и *нечётной*, если $f(-x) = -f(x)$.



ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

- ▣ **Опр.** Функция $y = f(x)$ называется периодической, если существует такое положительное число T , что $f(x+T) = f(x)$ для любого x из области определения функции.



ВОЗРАСТАЮЩИЕ И УБЫВАЮЩИЕ ФУНКЦИИ

- **Опр.** Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* на интервале $(a < x < b)$, если для всех точек этого интервала при $x_2 > x_1$ выполняется неравенство $f(x_2) > f(x_1)$.
- **Опр.** Функция $y = f(x)$ называется *убывающей* на интервале $(a < x < b)$, если для всех точек этого интервала при $x_2 > x_1$ выполняется неравенство $f(x_2) < f(x_1)$.



ПРОСТЕЙШИЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

1. Линейная функция. $y = ax + b$, где a и b — действительные числа. График — прямая.
2. Степенная функция. $y = x^n$, где n — любое действительное число. График — парабола, гипербола.
3. Показательная функция. $y = a^x$, где $a \neq 1$, $a > 0$. Графики всех показательных функций пересекают ось ординат в точке $y=1$.
4. Логарифмическая функция.
 $y = \log_a x$, где a — основание логарифма, $a > 0$, $a \neq 1$.
5. Тригонометрические функции. $y = \cos x$; $y = \sin x$; $y = \operatorname{tg} x$; $y = \operatorname{ctg} x$.
6. Обратные тригонометрические функции. $y = \arccos x$; $y = \arcsin x$; $y = \operatorname{arctg} x$; $y = \operatorname{arcctg} x$.



ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

- ▣ **Опр.** График функции $y = f(x)$ – это множество всех точек (x, y) плоскости Oxy , координаты которых связаны соотношением $y = f(x)$, называемым уравнением графика функции.



ПРЕДЕЛЫ, ИХ СВОЙСТВА

▣ **Опр.** Пределом функции $f(x)$ в точке x_0 называется такое число b , если для любого (сколь угодно малого) числа $\varepsilon > 0$ можно найти такое положительное число δ , что для любого числа $x \neq x_0$, удовлетворяющего неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется отношение $|y - b| < \varepsilon$.

Предел функции обозначается: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$

Например:

$$\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9$$



СВОЙСТВА ПРЕДЕЛОВ

1. Если предел функции в точке x_0 существует, то он единственный.

2. Предел постоянной равен этой постоянной. $\lim_{x \rightarrow x_0} C = C$

3. Предел алгебраической суммы нескольких функций равен алгебраической сумме пределов этих же функций.

$$\circ \lim_{x \rightarrow x_0} (U + V - W) = \lim_{x \rightarrow x_0} U + \lim_{x \rightarrow x_0} V - \lim_{x \rightarrow x_0} W$$

4. Предел произведения нескольких функций равен произведению пределов этих функций.

$$\circ \lim_{x \rightarrow x_0} (U \cdot V \cdot W) = \lim_{x \rightarrow x_0} U \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} V \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} W$$

5. Предел частного двух функций равен частному пределов этих функций.

$$\circ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{U}{V} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} U}{\lim_{x \rightarrow x_0} V}$$

