Тема 3.
Типовые динамические звенья

Юркевич В.Д.

Разложение полинома на сомножители

$B(s)$ - полином m-й степени $\quad \deg B(s) = m$

$$B(s) = 0 \;\Rightarrow\; s_i \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

Корни полинома: вещественные и комплексные

$$B(s) = k(s - s_1)(s - s_2)\cdots(s - s_m)$$

$$s_1 = \alpha \;\Rightarrow\; (s - \alpha)$$

$$s_2 = \alpha + j\beta, \;\; s_3 = \alpha - j\beta$$

$$(s - s_2)(s - s_3) = (s - \alpha)^2 + \beta^2 = s^2 - 2\alpha s + (\alpha^2 + \beta^2)$$

Юркевич В.Д.

Разложение передаточной функции на произведение простых множителей и простых дробей

$$W(s)=\frac{B(s)}{A(s)}$$

Простые множители

$$k,\quad ks,\quad k(Ts+1),\quad k(T^2s^2+2dTs+1)$$

Простые дроби

$$\frac{k}{s},\quad \frac{k}{Ts+1},\quad \frac{k}{T^2s^2+2dTs+1}$$

Определение: Звенья, передаточные функции которых имеют вид простых множителей, или простых дробей, называются **типовыми** или **элементарными** звеньями.

Типовые звенья

- Пропорциональное звено
- Интегрирующее звено
- Дифференцирующее звено
- Апериодическое звено 1-го порядка
- Колебательное звено
- Консервативное звено
- Форсирующее звено
- Форсирующее звено 2-го порядка

Юркевич В.Д.

Пропорциональное звено

$$y(t) = k\,u(t) \quad k > 0$$

$$W(s) = k$$

$$W(j\omega) = k + j0$$

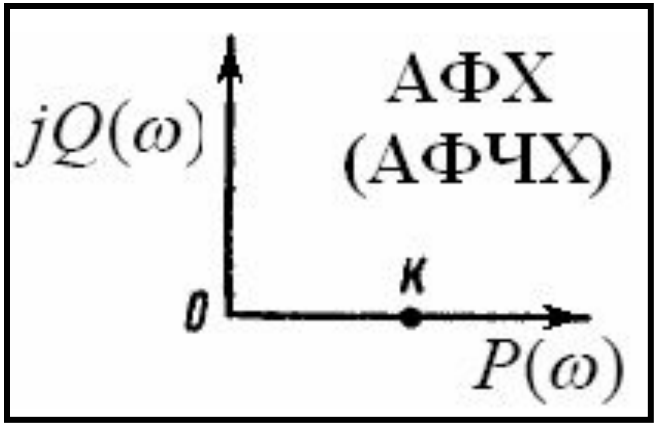
$$A(\omega) = \left|W(j\omega)\right| = \left|k\right|$$

$$\varphi(\omega) = 0$$

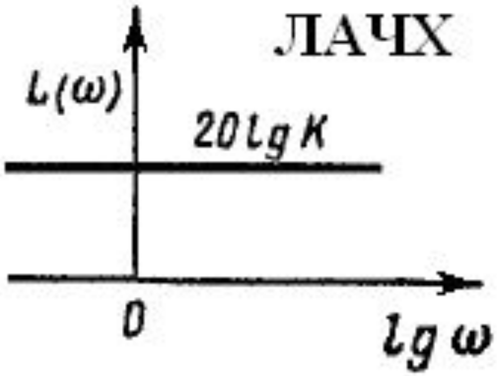
$$L(\omega) = 20\lg\left|k\right|$$

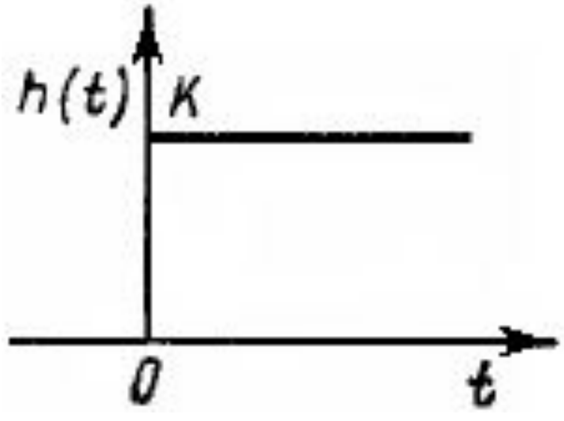
$$h(t) = k1(t)$$

$$w(t) = k\delta(t)$$



$\boxed{k > 0}$





Юркевич В.Д.

Интегрирующее звено

$$y(t) = y(0) + k\int_0^t u(\tau)d\tau \quad \Rightarrow \quad \dot{y} = ku$$

$$W(s) = \frac{k}{s}$$

$$W(j\omega) = 0 + j\frac{(-1)k}{\omega}$$

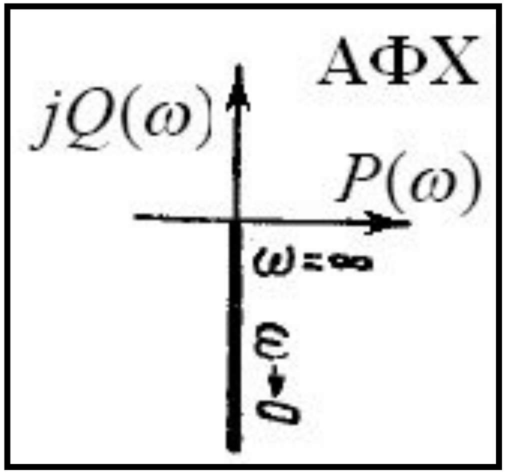
$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \frac{|k|}{\omega}$$

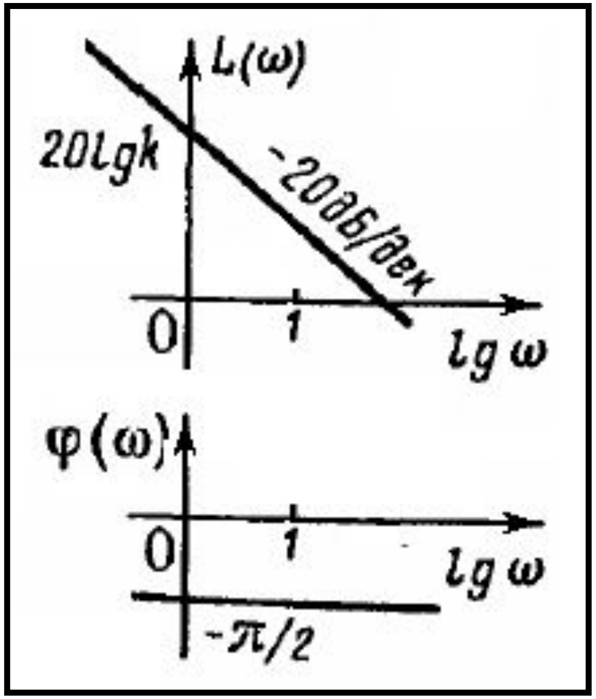
$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$$

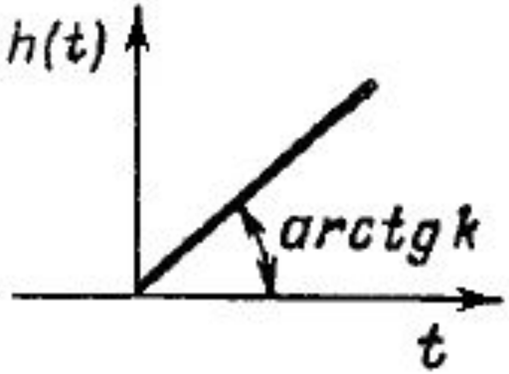
$$L(\omega) = 20\lg|k| - 20\lg\omega$$

$$h(t) = kt1(t) \qquad w(t) = k1(t)$$

$$\boxed{k > 0}$$







Юркевич В.Д.

Дифференцирующее звено

$$y = k\frac{du}{dt} \qquad k > 0$$

$$W(s) = ks$$

$$W(j\omega) = 0 + jk\omega$$

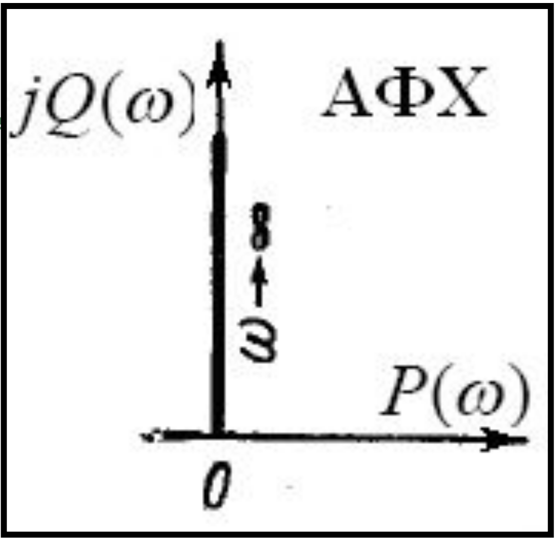
$$A(\omega) = \left|W(j\omega)\right| = \left|k\right|\omega$$

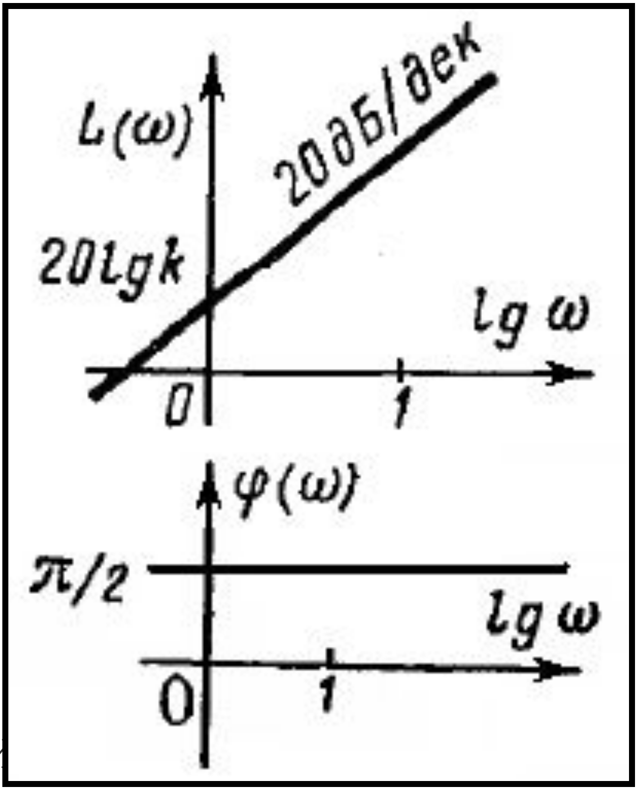
$$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}$$

$$L(\omega) = 20\lg\left|k\right| + 20\lg\omega$$

$$h(t) = k\delta(t)$$

$$w(t) = k\frac{d\delta(t)}{dt}$$



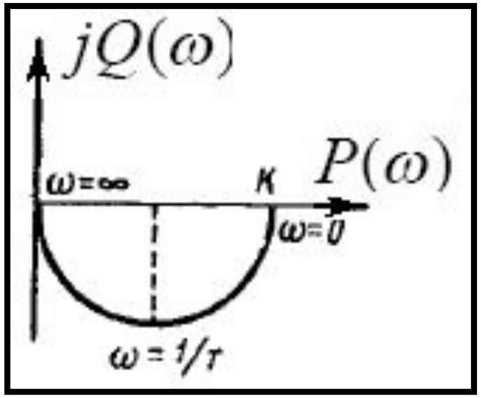


$\boxed{k > 0}$

Юркевич В.Д.

Апериодическое звено

$$T\frac{dy}{dt}+y=ku \qquad T>0 \quad k>0$$



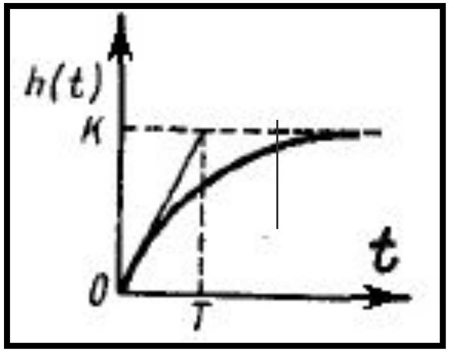
$$W(s)=\frac{k}{Ts+1}$$

$$W(j\omega)=\frac{k}{Tj\omega+1}=\frac{k(1-jT\omega)}{(1+jT\omega)(1-jT\omega)}$$

$$\boxed{k>0}$$

$$=\frac{k}{1+(T\omega)^2}+j\frac{(-1)kT\omega}{1+(T\omega)^2}$$

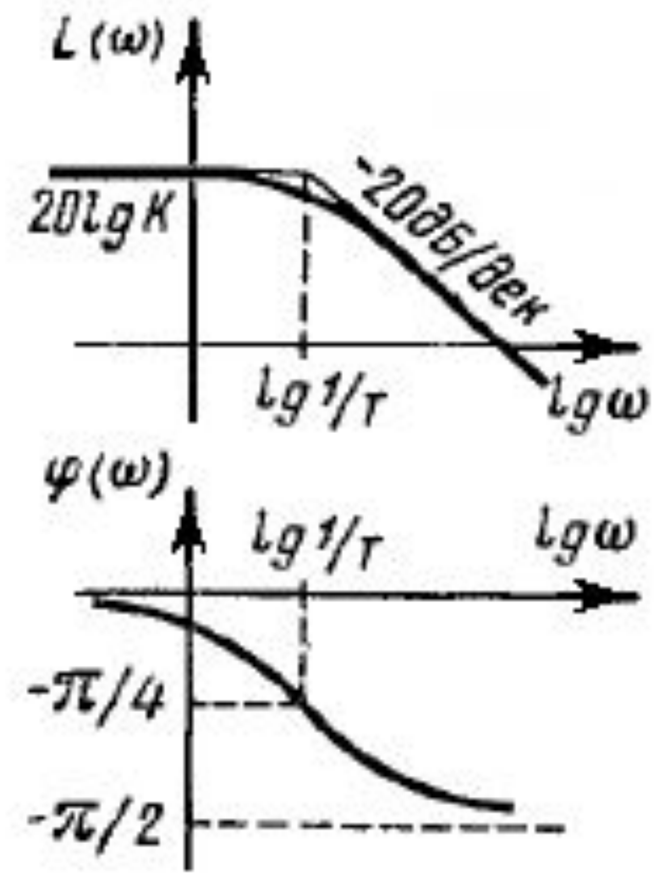
$$h(t)=k(1-e^{-\frac{t}{T}})\cdot 1(t) \qquad w(t)=\frac{k}{T}e^{-\frac{t}{T}}\cdot 1(t)$$



Асимптотическая ЛАЧХ апериодическое звено

$$A(\omega) = \frac{|k|}{\sqrt{1+(T\omega)^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -arctg(T\omega)$$



$$L(\omega) = 20\lg|k| - 20\lg\sqrt{1+(T\omega)^2}$$

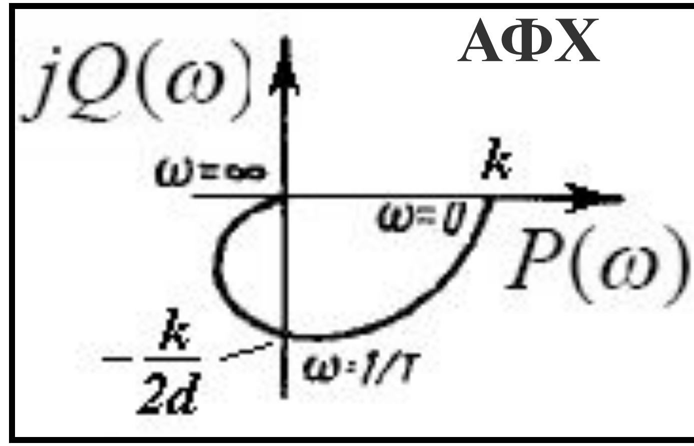
$$\omega \to 0 \quad L_{НЧ}(\omega) = 20\lg|k|$$

$$\omega \to \infty \quad L_{ВЧ}(\omega) = 20\lg|k| - 20\lg T - 20\lg\omega$$

Колебательное звено

$$T^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2dT\frac{dy}{dt} + y = ku\ , \qquad 0 < d < 1\ ,\ \ T > 0$$

$$W(s) = \frac{k}{T^2 s^2 + 2dTs + 1}$$



$$W(j\omega) = \frac{k}{[1-(T\omega)^2] + j2dT\omega}$$

$$= \frac{k\{[1-(T\omega)^2] - j2dT\omega\}}{\{[1-(T\omega)^2] + j2dT\omega\}\{[1-(T\omega)^2] - j2dT\omega\}}$$

$$= \frac{k[1-(T\omega)^2]}{[1-(T\omega)^2]^2 + (2dT\omega)^2} + j\frac{(-1)2kdT\omega}{[1-(T\omega)^2]^2 + (2dT\omega)^2}$$

Асимптотическая ЛАЧХ колебательного звена

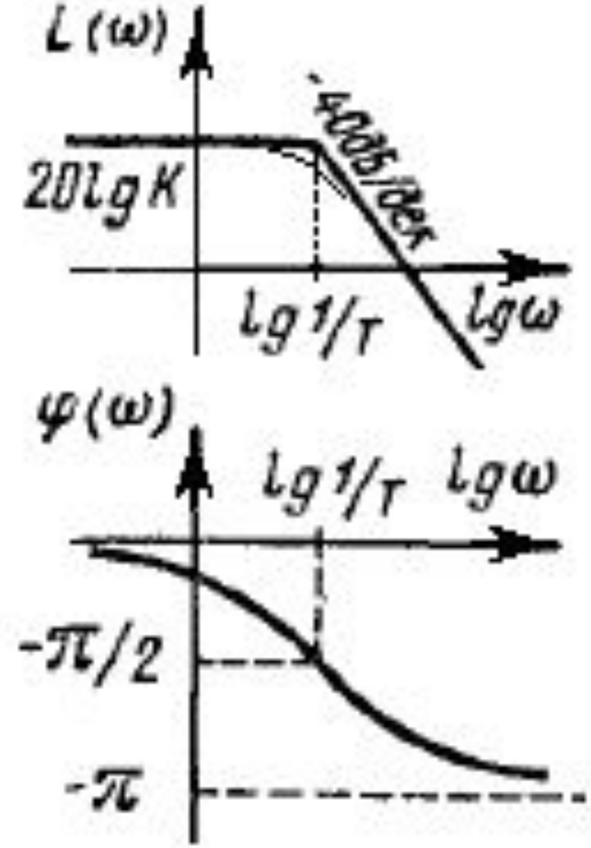
$$A(\omega)=\frac{|k|}{\sqrt{[1-(T\omega)^2]^2+(2dT\omega)^2}}$$

$$\varphi(\omega)=-arctg\frac{2dT\omega}{1-(T\omega)^2}$$

$$L(\omega)=20\lg|k|-20\lg\sqrt{[1-(T\omega)^2]^2+(2dT\omega)^2}$$

$$\omega\to 0\quad L_{НЧ}(\omega)=20\lg|k|$$

$$\omega\to\infty\quad L_{ВЧ}(\omega)=20\lg|k|-40\lg T-40\lg\omega$$



Временные характеристики колебательного звена

$$W(s)=\frac{k}{T^2s^2+2dTs+1}$$

$$h(t)=k\left[1-\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\beta}e^{-at}\sin(\beta t+\varphi_0)\right]\cdot 1(t)$$

$$T^2s^2+2dTs+1=0$$

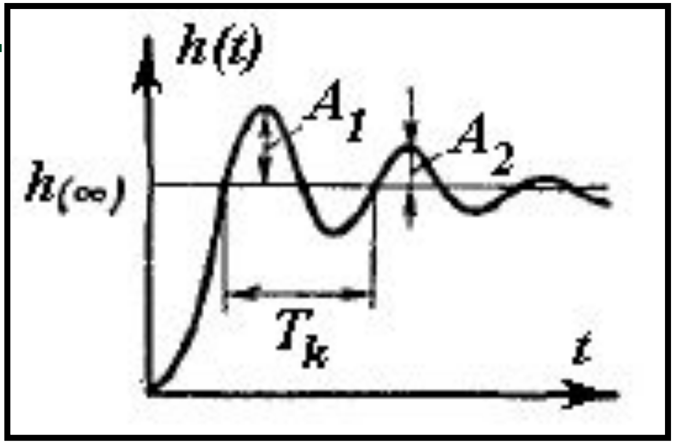
$$\alpha=\frac{d}{T}\qquad \beta=\frac{\sqrt{1-d^2}}{T}\qquad \varphi_0=arctg\frac{\sqrt{1-d^2}}{d}$$

$$s_{1,2}=\alpha\pm j\beta$$

$$w(t)=\frac{dh(t)}{dt}=\frac{k(\alpha^2+\beta^2)}{\beta}e^{-\alpha t}\sin(\beta t)\cdot 1(t)$$

$$\beta T_k=2\pi\qquad A_1/A_2=e^{\alpha T_k}$$

$$\beta=\frac{2\pi}{T_k}\qquad \alpha=\frac{1}{T_k}\ln\frac{A_1}{A_2}$$



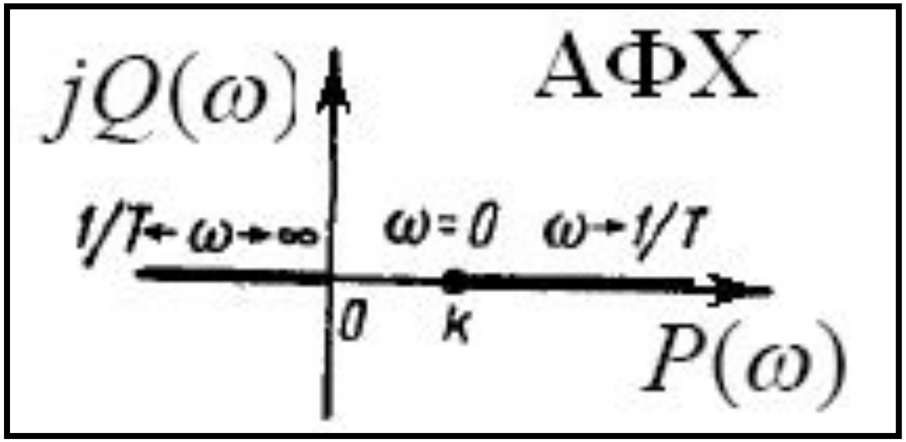
Юркевич В.Д.

Консервативное звено

$$T^2\frac{d^2y}{dt^2}+y=ku\,,\qquad d=0\,,\ \ T>0$$

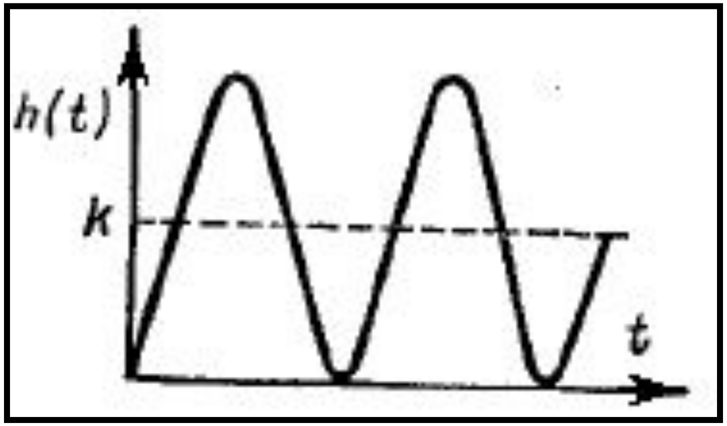
$$W(s)=\frac{k}{T^2s^2+1}$$

$$W(j\omega)=\frac{k}{[1-(T\omega)^2]}+j0$$



$$h(t)=k\left[1-\cos(t/T)\right]\cdot 1(t)$$

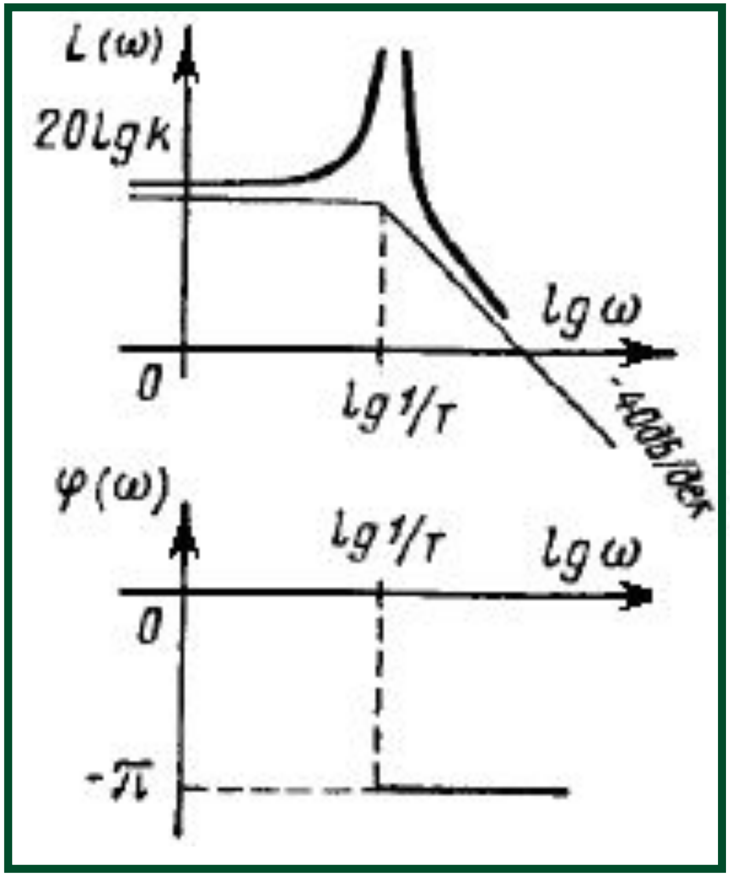
$$w(t)=\frac{dh(t)}{dt}=\frac{k}{T}\sin(t/T)\cdot 1(t)$$



ЛАЧХ консервативного звена

$$A(\omega)=\frac{|k|}{\left|1-(T\omega)^2\right|}$$

$$\varphi(\omega)=\begin{cases} 0\,, & \omega<1/T \\ -\pi\,, & \omega>1/T \end{cases}$$



$$L(\omega)=20\lg|k|-20\lg\left|1-(T\omega)^2\right|$$

$$\omega\to 0\quad L_{НЧ}(\omega)=20\lg|k|$$

$$\omega\to\infty\quad L_{ВЧ}(\omega)=20\lg|k|-40\lg T-40\lg\omega$$

Апериодическое звено 2-го порядка

$$T^2\frac{d^2y}{dt^2}+2dT\frac{dy}{dt}+y=ku\,,\qquad d\geq 1\,,\ \ T>0$$

$$W(s)=\frac{k}{T^2s^2+2dTs+1}=\frac{k}{(T_1s+1)(T_2s+1)}$$

$$T^2=T_1T_2 \qquad\qquad 2dT=T_1+T_2$$

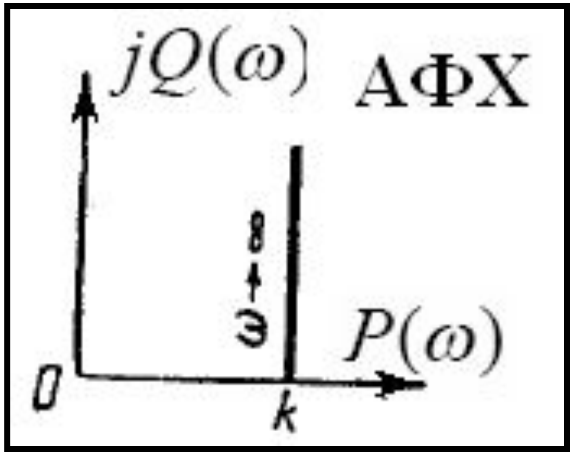
Апериодическое звено 2-го порядка можно представить как два соединенных последовательно апериодических звена, т.е. это звено не является элементарным звеном

Форсирующее звено 1-го порядка

$$y = k\left(T\frac{du}{dt} + u\right), \quad k > 0, \ T > 0$$

$$W(s) = k(Ts + 1)$$

$$W(j\omega) = k(jT\omega + 1) = k + jkT\omega$$



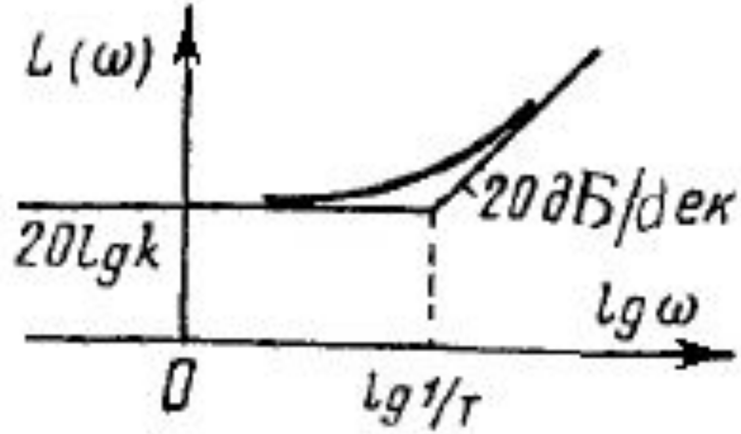
$$h(t) = k\left[T\delta(t) + 1(t)\right]$$

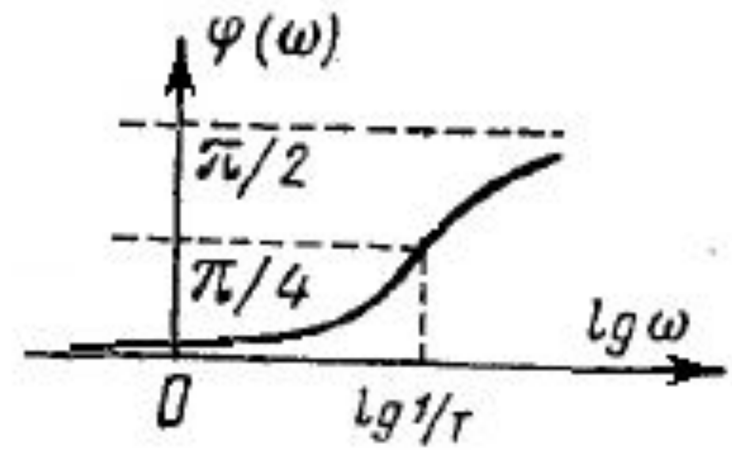
$$w(t) = \frac{dh(t)}{dt} = k\left[T\dot{\delta}(t) + \delta(t)\right]$$

Асимптотическая ЛАЧХ форсирующего звена 1-го порядка

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = |k|\sqrt{(T\omega)^2 + 1}$$

$$\varphi(\omega) = arctg(T\omega)$$





$$L(\omega) = 20\lg|k| + 20\lg\sqrt{(T\omega)^2 + 1}$$

$$\omega \to 0 \quad L_{НЧ}(\omega) = 20\lg|k|$$

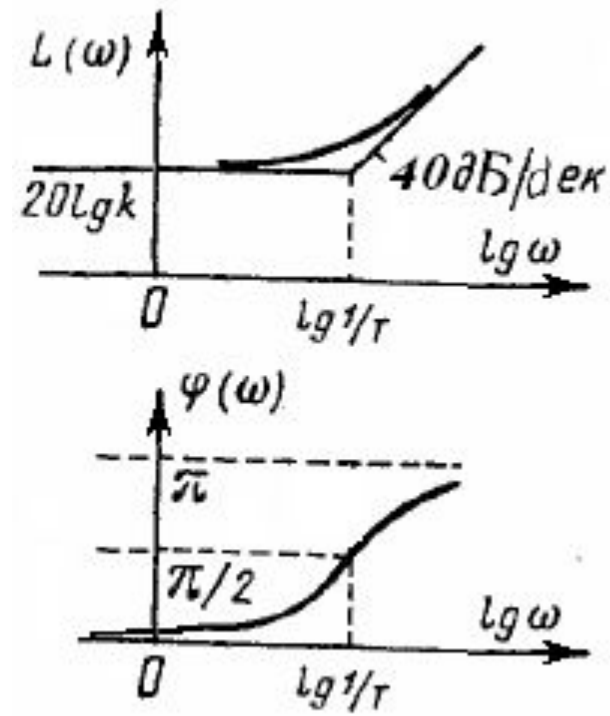
$$\omega \to \infty \quad L_{ВЧ}(\omega) = 20\lg|k| + 20\lg T + 20\lg\omega$$

Форсирующее звено 2-го порядка

$$y = k\left(T^2 \frac{d^2u}{dt^2} + 2dT\frac{du}{dt} + u\right)$$

$$0 < d < 1, \quad k > 0\,, \quad T > 0$$

$$W(s) = k(T^2s^2 + 2dTs + 1)$$



При $d \geq 1$ получаем два форсирующих звена 1-го порядка

$$W(s) = k(T^2s^2 + 2dTs + 1)$$

$$= k(T_1s + 1)(T_2s + 1)$$

Реальное дифференцирующее звено

$$\mu \frac{dy}{dt} + y = k\frac{du}{dt} \qquad \mu > 0 \quad k > 0$$

$$W(s) = \frac{ks}{\mu s + 1}$$

$$\boxed{W(s) = \frac{ks}{\mu s + 1} = s \cdot \frac{k}{\mu s + 1}}$$

Реальное дифференцирующее звено не является элементарным звеном, так как его можно представить в виде последовательного соединения идеального дифференцирующего звена и апериодического звена первого порядка

$$h(t) = \frac{k}{\mu} e^{-\frac{t}{\mu}} \cdot 1(t) \qquad w(t) = \frac{k}{\mu}\delta(t) - \frac{k}{\mu^2} e^{-\frac{t}{\mu}} \cdot 1(t)$$

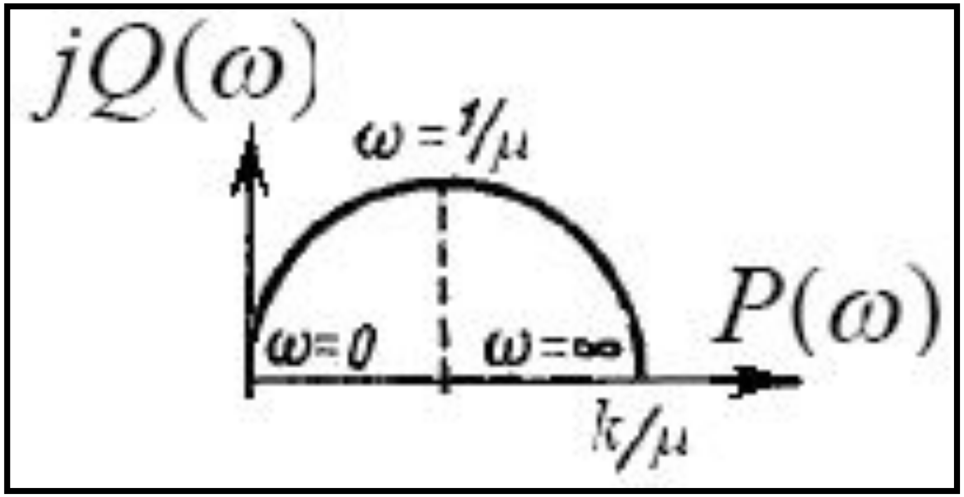
АФХ реального дифференцирующего звена

$$W(s)=\frac{ks}{\mu s+1}$$

$$\boxed{\mu>0 \quad k>0}$$

$$W(j\omega)=\frac{kj\omega}{\mu j\omega+1}=\frac{kj\omega(1-j\mu\omega)}{(1+j\mu\omega)(1-j\mu\omega)}$$

$$=\frac{k\mu\omega^2}{1+(\mu\omega)^2}+j\frac{k\omega}{1+(\mu\omega)^2}$$

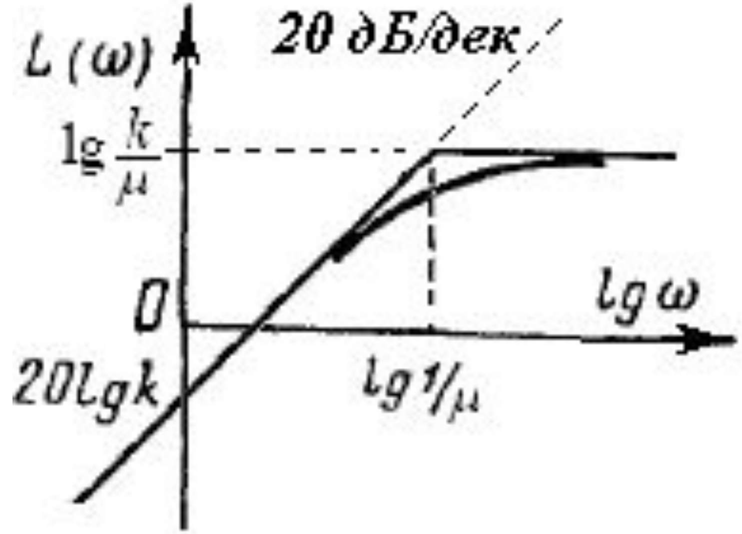


Юркевич В.Д.

ЛАЧХ реального дифференцирующего звена

$$A(\omega) = \frac{|k|\omega}{\sqrt{1+(\mu\omega)^2}}$$

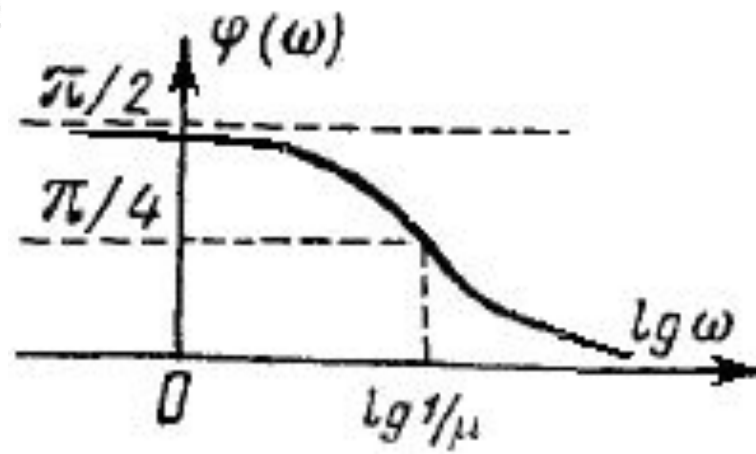
$$\varphi(\omega) = arctg\left(\frac{1}{\mu\omega}\right)$$



$$L(\omega) = 20\lg|k| + 20\lg\omega - 20\lg\sqrt{1+(\mu\omega)^2}$$

$$\omega \to 0 \quad L_{НЧ}(\omega) = 20\lg|k| + 20\lg\omega$$

$$\omega \to \infty \quad L_{ВЧ}(\omega) = 20\lg|k| - 20\lg\mu$$



Юркевич В.Д.

Тема 4.
Переход от передаточных функций к дифференциальным уравнениям и структурным схемам