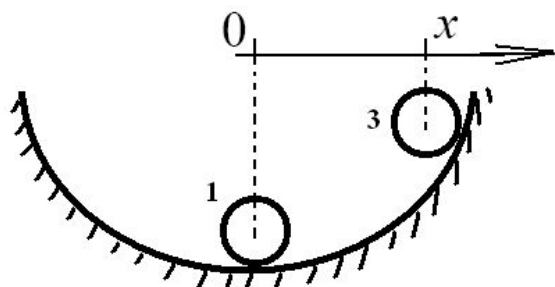

Тема 6.

Анализ устойчивости линейных непрерывных систем

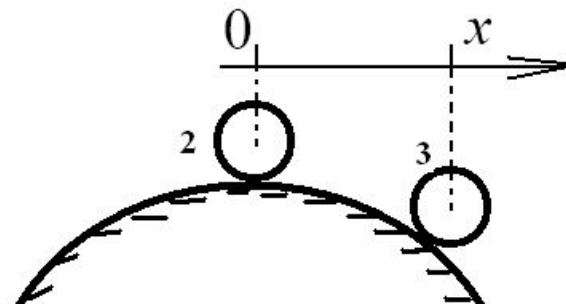
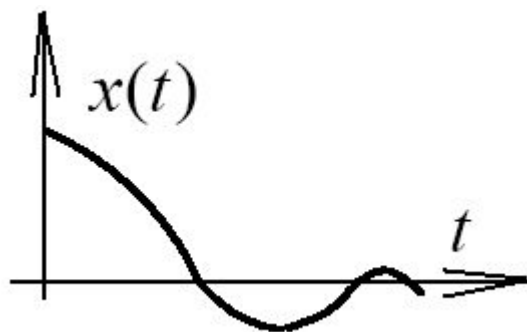
Обсуждаемые вопросы

- 1. *Состояние равновесия динамической системы***
- 2. *Понятие устойчивости состояния равновесия***
- 3. *Условие устойчивости***
- 4. *Критерии устойчивости линейных систем***

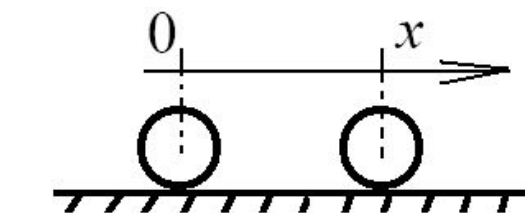
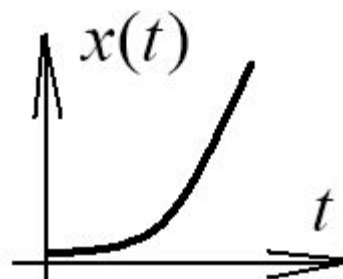
Типы состояния равновесия динамической системы



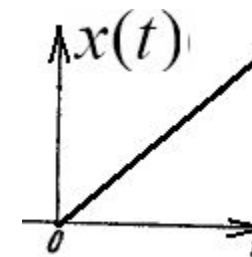
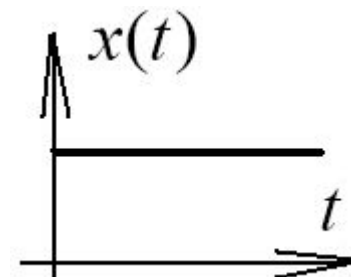
1 - устойчивое состояние равновесия
3 - возмущенное состояние



2 - неустойчивое состояние равновесия
3 - возмущенное состояние



нейтрально-устойчивое состояние



Определение: Состояние системы называется равновесным, если система может находиться в этом состоянии как угодно долго

Состояние равновесия динамической системы

Рассмотрим автономную динамическую систему, модель которой задана системой однородных дифференциальных уравнений

$$\dot{X} = f(X)$$

$$\dot{X} = f(X) \quad \longrightarrow \quad \boxed{\dot{X} = 0} \quad \longrightarrow \quad f(X) = 0$$

X_0 называется точкой равновесия (состояние равновесия) динамической системы, если

$$f(X_0) = 0$$

Состояние равновесия динамического звена

$$W(p) = \frac{B(p)}{A(p)}$$

$$W(p) = \frac{b_n p^{n-1} + \dots + b_3 p^2 + b_2 p + b_1}{p^n + a_n p^{n-1} + \dots + a_3 p^2 + a_2 p + a_1}$$

$$y^{(n)} + a_n y^{(n-1)} + \dots + a_2 y^{(1)} + a_1 y = b_n u^{(n-1)} + \dots + b_2 u^{(1)} + b_1 u$$

Условие равновесия для динамического звена

$$y(t) = y_0 = \text{const}, \quad y^{(i)} = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

$$u(t) = u_0 = \text{const}, \quad u^{(j)} = 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, n-1$$

Уравнение в отклонениях от состояния равновесия $x = y - y_0$

$$x^{(n)} + a_n x^{(n-1)} + \dots + a_2 x^{(1)} + a_1 x = 0$$

Определение:

Состояние равновесия $x = 0, \quad x^{(i)} = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$ называется устойчивым, если $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.

Состояние равновесия для уравнений в пространстве состояний ОУ

$$\begin{aligned}\dot{X} &= AX + Bu & u(t) &= \text{const}, \quad X(t) = \text{const}, \\ y &= CX & \dot{X} &= 0\end{aligned}$$

Уравнение в отклонениях от состояния равновесия

$$\dot{X} = 0 \Rightarrow 0 = AX + Bu_0 \Rightarrow X_0 = ?$$

$$X_0 = -A^{-1}Bu_0 \Rightarrow Z = X - X_0 \Rightarrow \dot{Z} = \dot{X}$$

$$\dot{Z} = A(Z + X_0) + Bu_0 \Rightarrow \dot{Z} = A(Z - A^{-1}Bu_0) + Bu_0 \Rightarrow \dot{Z} = AZ$$

Для системы $\dot{Z} = AZ$ условие равновесия есть $\dot{Z} = 0$.

Пусть $\det A \neq 0$, тогда $Z = 0$ есть единственное состояние равновесия системы.

Определение: Состояние равновесия $Z = 0$ системы $\dot{Z} = AZ$ называется устойчивым, если $\lim_{t \rightarrow \infty} Z(t) = 0$.

Замечание 1

Если

- 1. Состояние равновесия динамической системы является единственным*
- 2. Состояние равновесия динамической системы является устойчивым*

Тогда данная система называется устойчивой динамической системой

Замечание 2

Свойство устойчивости состояния равновесия линейной динамической системы зависит от распределения корней характеристического полинома этой системы на комплексной плоскости

Условие устойчивости линейной системы

$$x^{(n)} + a_n x^{(n-1)} + \dots + a_2 x^{(1)} + a_1 x = 0$$

$$(p^n + a_n p^{n-1} + \dots + a_2 p + a_1)x(t) = 0$$

$$A(p) = p^n + a_n p^{n-1} + \dots + a_2 p + a_1$$

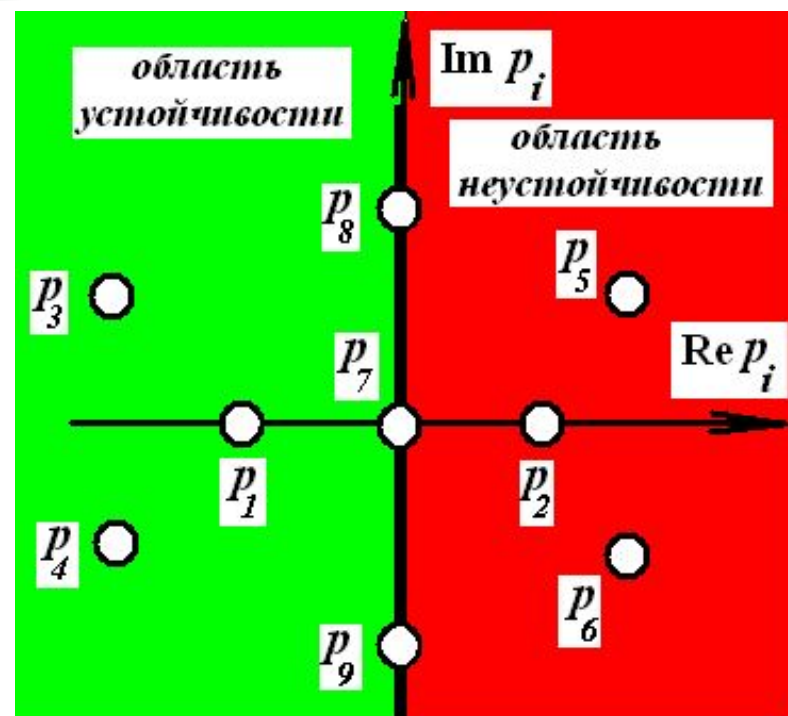
$$A(p) = 0 \Rightarrow p_1, p_2, \dots, p_n$$

$$p_1 = -|\alpha_1|, \quad p_2 = |\alpha_2|$$

$$p_{3,4} = -|\alpha_3| \pm j|\omega_3|$$

$$p_{5,6} = |\alpha_5| \pm j|\omega_5|$$

$$p_7 = 0, \quad p_{8,9} = \pm j|\omega_8|$$



мнимая ось - граница устойчивости

Условие устойчивости линейной системы

$$x(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{p_i t} \longrightarrow \boxed{\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0}$$

$$x_1(t) = C_1 e^{-|\alpha_1|t}, \quad x_2(t) = C_2 e^{|\alpha_2|t}$$

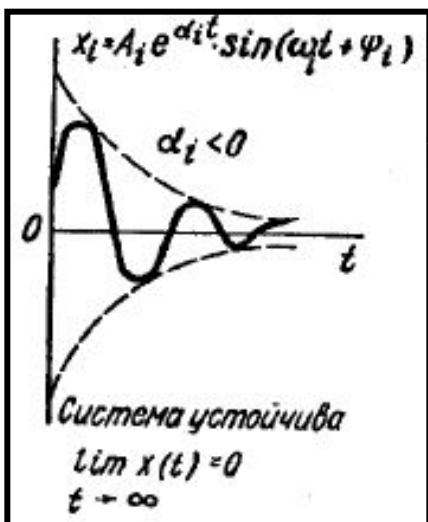
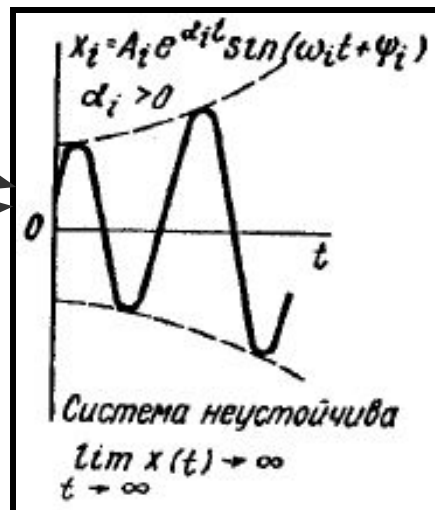
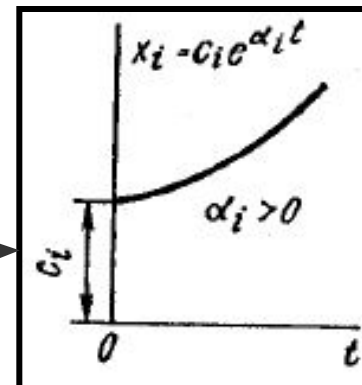
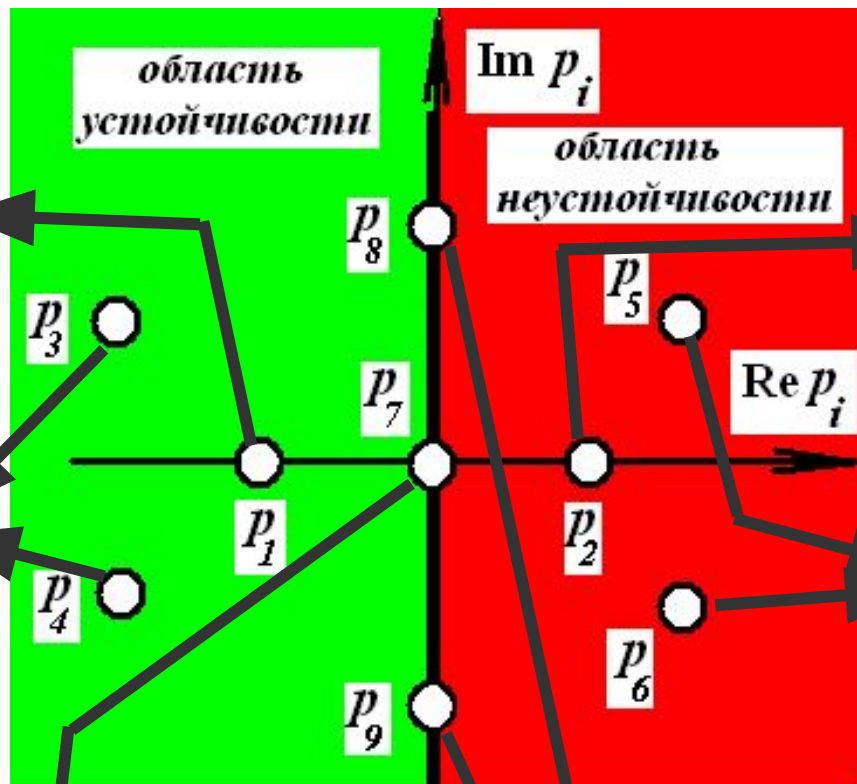
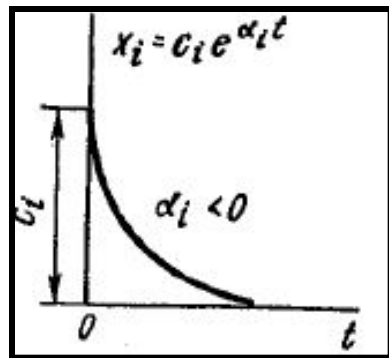
$$x_3(t) = C_3 e^{-|\alpha_3|t} \sin(|\omega_3|t), \quad x_4(t) = C_4 e^{-|\alpha_3|t} \cos(|\omega_3|t)$$

$$x_5(t) = C_5 e^{|\alpha_5|t} \sin(|\omega_5|t), \quad x_6(t) = C_6 e^{|\alpha_3|t} \cos(|\omega_3|t)$$

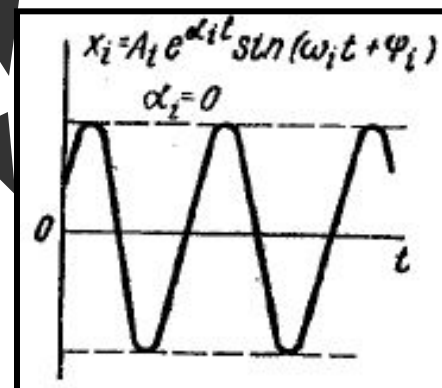
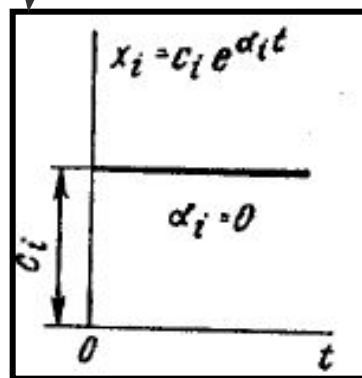
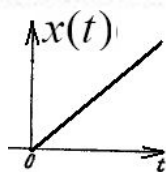
$$x_7(t) = C_7, \quad x_8(t) = C_8 \sin(|\omega_8|t), \quad x_9(t) = C_9 \cos(|\omega_8|t)$$

Условие устойчивости: Для устойчивости линейной системы необходимо и достаточно, чтобы все корни ее характеристического полинома имели строго отрицательную вещественную часть, т.е.

$$\boxed{\operatorname{Re} p_i < 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n}$$



апериодическая
граница
устойчивости



колебательная
граница
устойчивости

Граница устойчивости линейной системы

Для нейтральной системы выделяют два случая:

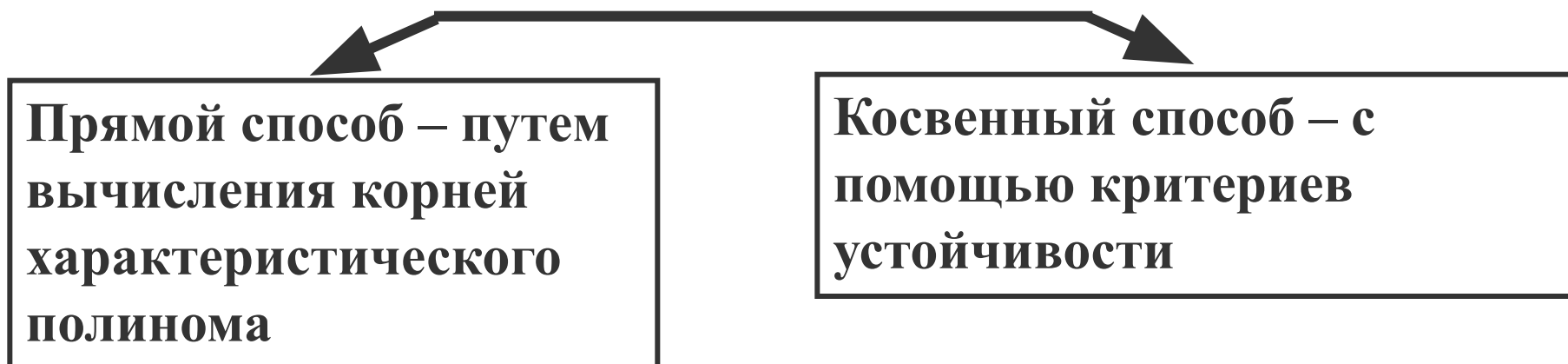
1. Апероодическая граница устойчивости
2. Колебательная граница устойчивости

Определение: Система находится на апероодической границе устойчивости, если характеристический полином имеет нулевой корень, а все остальные корни имеют строго отрицательную вещественную часть.

Определение: Система находится на колебательной границе устойчивости, если характеристический полином имеет пару чисто мнимых комплексно-сопряженных корней, а все остальные корни имеют строго отрицательную вещественную часть.

Критерии устойчивости линейной системы

Способы проверки устойчивости линейной системы



```
graph TD; A[Способы проверки устойчивости линейной системы] --> B[Прямой способ – путем вычисления корней характеристического полинома]; A --> C[Косвенный способ – с помощью критериев устойчивости];
```

Прямой способ – путем вычисления корней характеристического полинома

Косвенный способ – с помощью критериев устойчивости

Критерий устойчивости – правило проверки устойчивости системы без вычисления корней характеристического полинома.

Критерии устойчивости:

- 1. Алгебраические критерии (например, критерий Гурвица)**
- 2. Частотные критерии (например, критерий Михайлова, критерий Найквиста)**

Необходимое условие устойчивости:

Если система устойчива, тогда все коэффициенты характеристического полинома имеют одинаковый знак.

Достаточное условие неустойчивости:

Система является неустойчивой, если имеются коэффициенты характеристического полинома с разным знаком.

$$A(p) = p^n + a_n p^{n-1} + \dots + a_2 p + a_1 \quad A(p) = 0 \Rightarrow p_1, p_2, \dots, p_n$$

$$A(p) = (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)$$

$$p_1 = -|\alpha_1|, \quad p_{2,3} = -|\alpha_2| \pm j|\omega_2|$$



$$(p - p_1)(p - p_2)(p - p_3)$$

$$= (p + |\alpha_1|)(p + |\alpha_2| - j|\omega_2|)(p + |\alpha_2| + j|\omega_2|)$$

$$= (p + |\alpha_1|) \left[(p + |\alpha_2|)^2 + \omega_2^2 \right]$$

Матрица Гурвица (Hurwitz)

$$A(p) = p^n + a_n p^{n-1} + \dots + a_2 p + a_1$$

Матрица Гурвица

$$H = \begin{bmatrix} a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 \end{bmatrix}$$

Главные диагональные
миноры матрицы Гурвица

$$\Delta_1 = \det a_n = a_n$$

$$\Delta_2 = \det \begin{bmatrix} a_n & a_{n-2} \\ 1 & a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\Delta_3 = \det \begin{bmatrix} a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-3} \\ 0 & a_n & a_{n-2} \end{bmatrix}$$

$$\Delta_n = \det H = \Delta_{n-1} a_1$$

Критерий устойчивости Гурвица (Hurwitz)

Критерий Гурвица: Система с характеристическим полиномом вида $p^n + a_n p^{n-1} + \dots + a_2 p + a_1$ является устойчивой тогда и только тогда, когда все главные диагональные миноры матрицы Гурвица строго больше нуля, т.е.

$$\Delta_i > 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

Система находится на апериодической границе устойчивости, если $a_1 = 0$, $\Delta_i > 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n - 1$

Система находится на колебательной границе устойчивости, если

$$\Delta_{n-1} = 0, \quad a_1 > 0, \quad \Delta_i > 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n - 2$$

Пример 1. Система 1-го порядка

$$A(p) = p + a_1 \Rightarrow H = a_1, \quad \Delta_1 = \det a_1 = a_1 > 0$$

Условие устойчивости системы 2-го порядка

Пример 2. Система 2-го порядка

$$A(p) = p^2 + a_2 p + a_1$$

$$H = \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 1 & a_1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = \det a_2 = a_2 > 0$$

$$\Delta_2 = \det \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 1 & a_1 \end{bmatrix} = a_2 a_1 > 0 \Rightarrow a_1 > 0$$

Пример 3. Система 3-го порядка

$$A(p) = p^3 + a_3 p^2 + a_2 p + a_1 \Rightarrow H = \begin{bmatrix} a_3 & a_1 & 0 \\ 1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_3 & a_1 \end{bmatrix}$$
$$\Delta_1 = \det a_3 = a_3 > 0$$
$$\Delta_2 = \det \begin{bmatrix} a_3 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{bmatrix} = a_3 a_2 - a_1 > 0 \Rightarrow a_3 a_2 > a_1$$
$$\Delta_3 = \det H = \Delta_2 a_1 > 0 \Rightarrow a_1 > 0$$
$$a_3 a_2 > a_1 > 0, a_3 > 0 \Rightarrow a_2 > 0$$

Для устойчивости системы 3-го порядка необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты характеристического полинома были положительными и произведение средних коэффициентов было больше чем произведение крайних

Замечание: Матрица Гурвица (Hurwitz)

$$A(p) = a_{n+1}p^n + a_n p^{n-1} + \dots + a_2 p + a_1$$

Матрица Гурвица

$$H = \begin{bmatrix} a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 \\ a_{n+1} & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 \end{bmatrix}$$

Главные диагональные
миноры матрицы Гурвица

$$\Delta_1 = \det a_n = a_n$$

$$\Delta_2 = \det \begin{bmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n+1} & a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\Delta_3 = \det \begin{bmatrix} a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ a_{n+1} & a_{n-1} & a_{n-3} \\ 0 & a_n & a_{n-2} \end{bmatrix}$$

$$\Delta_n = \det H = \Delta_{n-1} a_1$$

Замечание: Система 3-го порядка

$$A(p) = a_4 p^3 + a_3 p^2 + a_2 p + a_1 \quad \Rightarrow \quad H = \begin{bmatrix} a_3 & a_1 & 0 \\ a_4 & a_2 & 0 \\ 0 & a_3 & a_1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = \det a_3 = a_3 > 0$$

$$\Delta_2 = \det \begin{bmatrix} a_3 & a_1 \\ a_4 & a_2 \end{bmatrix} = a_3 a_2 - a_1 a_4 > 0 \Rightarrow a_3 a_2 > a_1 a_4$$

$$\Delta_3 = \det H = \Delta_2 a_1 > 0 \Rightarrow a_1 > 0$$

$$a_3 a_2 > a_1 a_4 > 0, \quad a_4 > 0, \quad a_3 > 0 \Rightarrow a_2 > 0$$

Для устойчивости системы 3-го порядка необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты характеристического полинома были положительными и произведение средних коэффициентов было больше чем произведение крайних

Критерий устойчивости Михайлова

Характеристический полином динамической системы

$$A(p) = p^n + a_n p^{n-1} + \dots + a_2 p + a_1$$

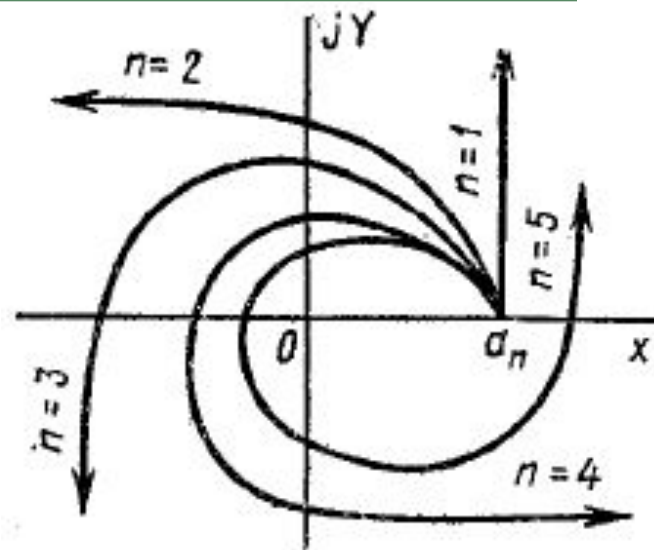
Функция Михайлова

$$\begin{aligned} A(j\omega) &= (j\omega)^n + a_n (j\omega)^{n-1} + \dots + a_2 (j\omega) + a_1 \\ &= X(\omega) + jY(\omega) \end{aligned}$$

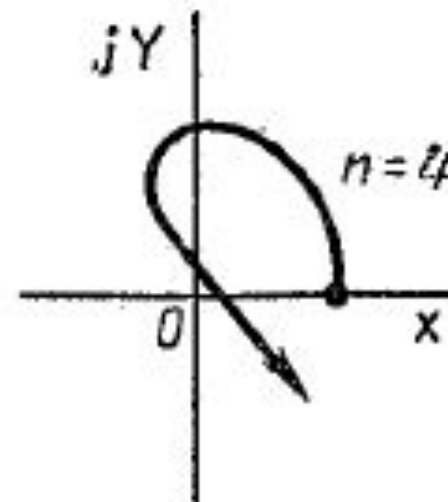
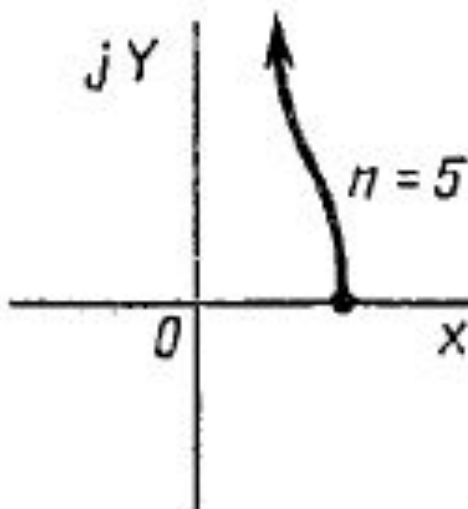
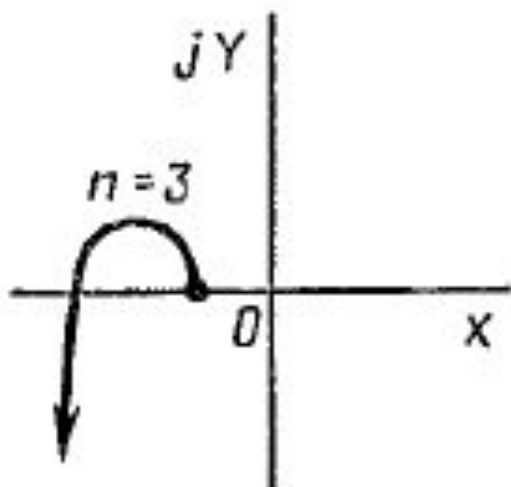
Критерий Михайлова: Для устойчивости динамической системы необходимо и достаточно, чтобы годограф Михайлова начинался при $\omega = 0$ на вещественной положительной полуоси и при изменении частоты ω от 0 до ∞ последовательно проходил n квадрантов против часовой стрелки, нигде не обращаясь в нуль и устремляясь в бесконечность в n -м квадранте.

Годограф Михайлова

Примеры годографа Михайлова для устойчивых систем:



Примеры годографа Михайлова для неустойчивых систем:

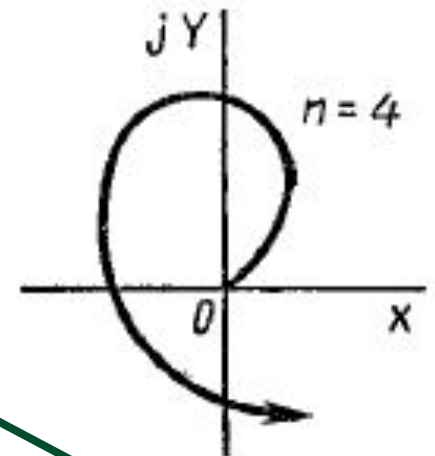


Условие для границы устойчивости системы

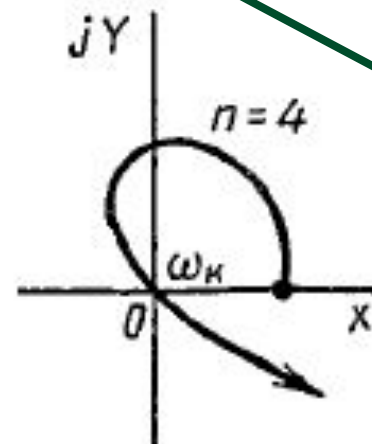
Система находится на границе устойчивости, если годограф Михайлова проходит через начало координат, т.е.

$$\exists \bar{\omega} : A(j\omega)|_{\omega=\bar{\omega}} = 0 \Rightarrow X(\omega)|_{\omega=\bar{\omega}} = 0, Y(\omega)|_{\omega=\bar{\omega}} = 0$$

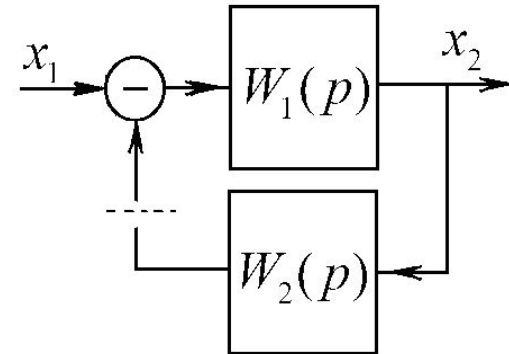
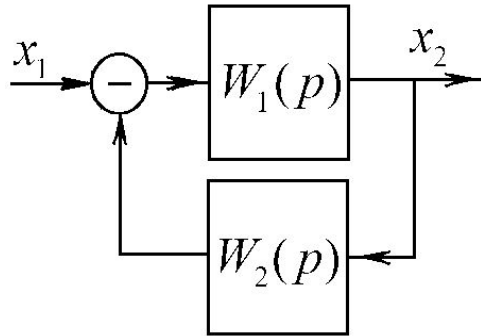
Пример годографа Михайлова для системы, находящейся на апериодической границе устойчивости:



Пример годографа Михайлова для системы, находящейся на колебательной границе устойчивости:

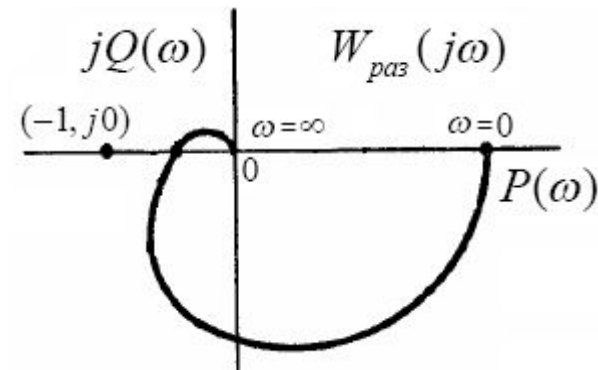


Годограф Найквиста



$$W_{раз}(p) = W_1(p)W_2(p) \quad p = j\omega \Rightarrow W_{раз}(j\omega)$$

Определение: Амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы $W_{раз}(j\omega)$ называется годографом Найквиста.

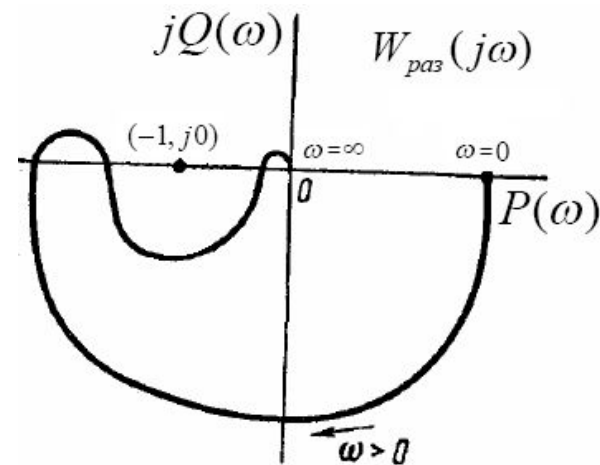
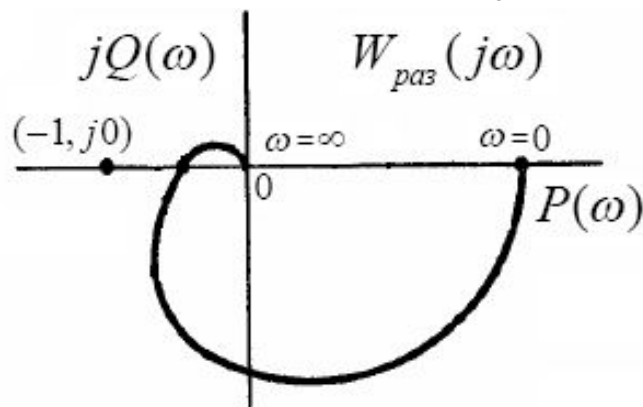


(для системы устойчивой в разомкнутом состоянии)

$$W_{раз}(p) = \frac{b_{m+1}p^m + \dots + b_3p^2 + b_2p + b_1}{p^n + a_np^{n-1} + \dots + a_3p^2 + a_2p + a_1}, \quad m < n$$

Критерий Найквиста: Для устойчивой разомкнутой системы, замкнутая система будет устойчива, если амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы $W_{раз}(j\omega)$ не охватывает точку $(-1, j0)$.

Примеры годографа Найквиста для случая, когда замкнутая система является устойчивой



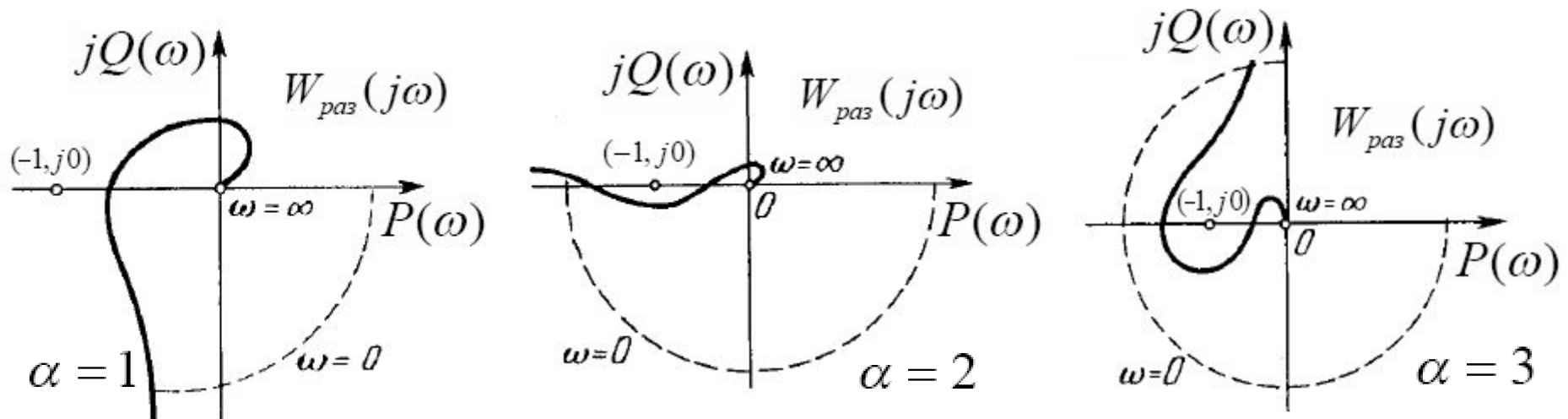
(для системы нейтральной в разомкнутом состоянии)

$$W_{раз}(p) = \frac{b_{m+1}p^m + \dots + b_3p^2 + b_2p + b_1}{p^\alpha (p^{n-\alpha} + \dots + a_3p^2 + a_2p + a_1)}, \quad m < n$$

α - число нулевых корней характеристического полинома разомкнутой системы

α - порядок астатизма замкнутой системы

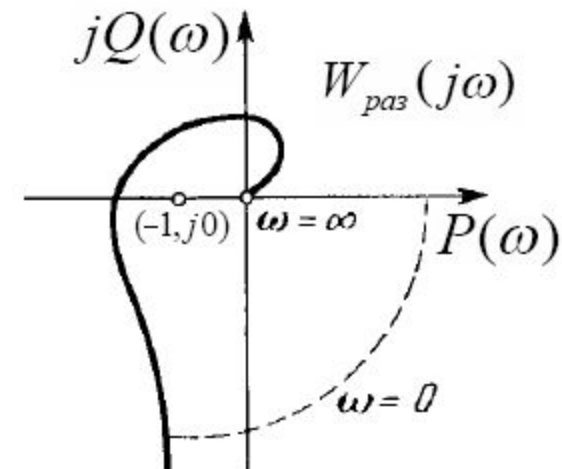
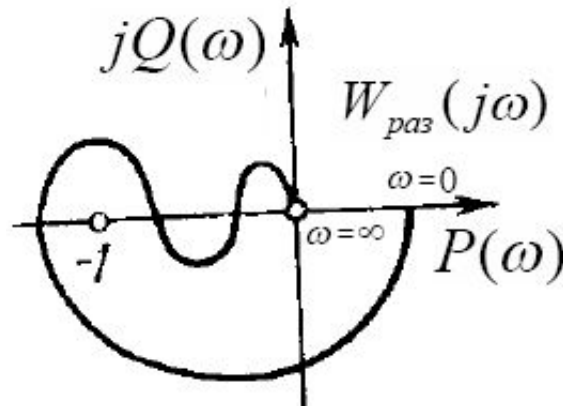
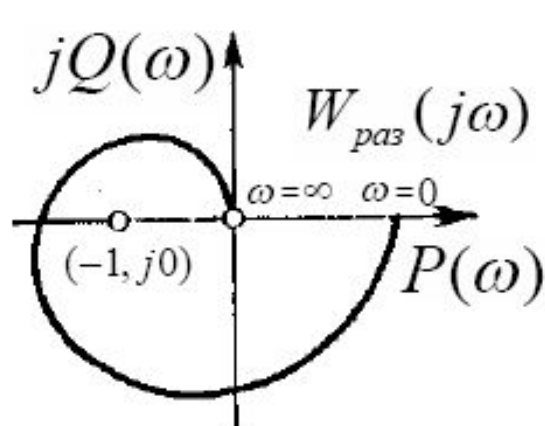
Примеры годографа Найквиста нейтральных систем для случая, когда замкнутая система является устойчивой



Примеры годографа Найквиста для неустойчивых замкнутых систем

26

При изменении частоты ω от 0 до ∞ , амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы $W_{раз}(j\omega)$, т.е. годограф Найквиста, охватывает точку с координатами $(-1, j0)$

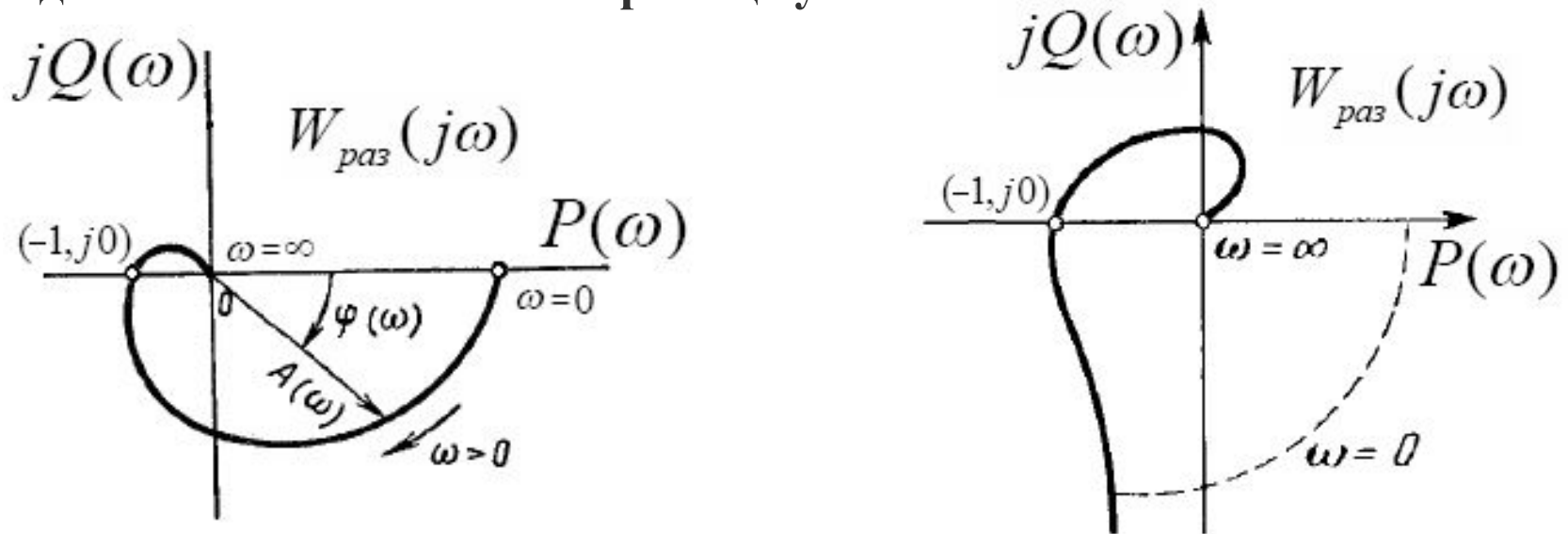


Условие для границы устойчивости системы

Если годограф Найквиста проходит через точку $(-1, j0)$, тогда замкнутая система находится на колебательной границе устойчивости.

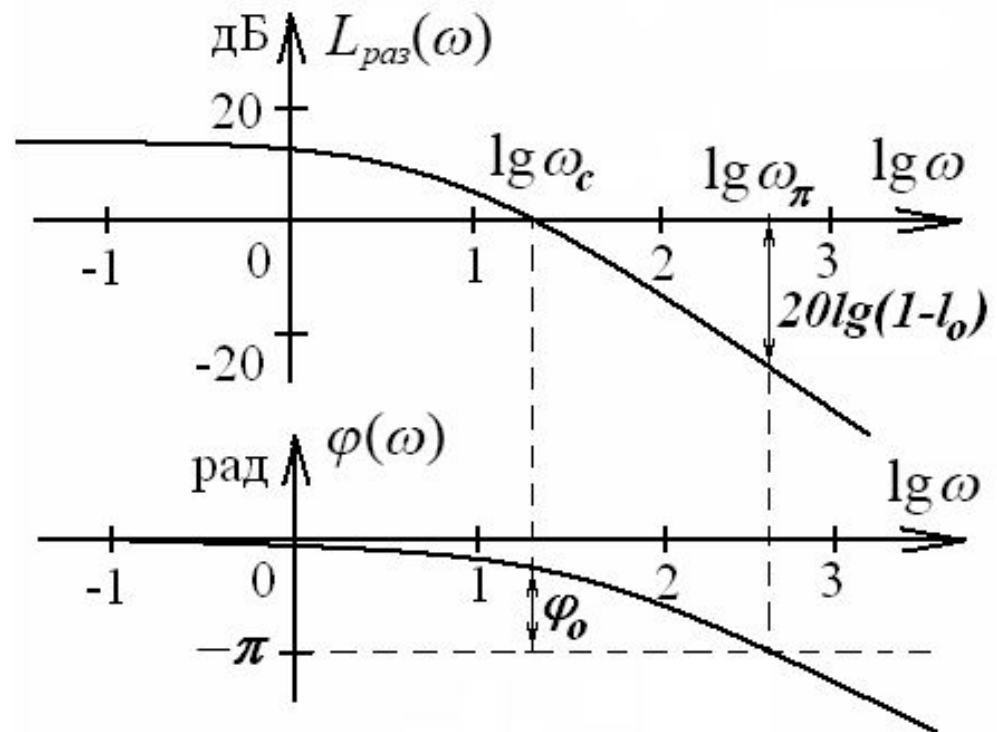
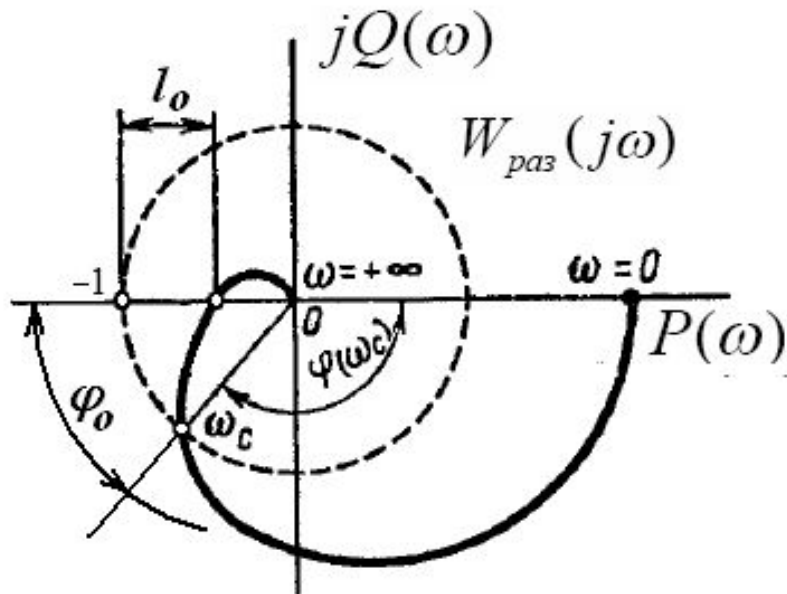
$$\exists \omega_k \neq 0 : W_{раз}(j\omega) \Big|_{\omega=\omega_k} = -1 + j0$$

Пример годографа Найквиста для случая, когда замкнутая система находится на колебательной границе устойчивости



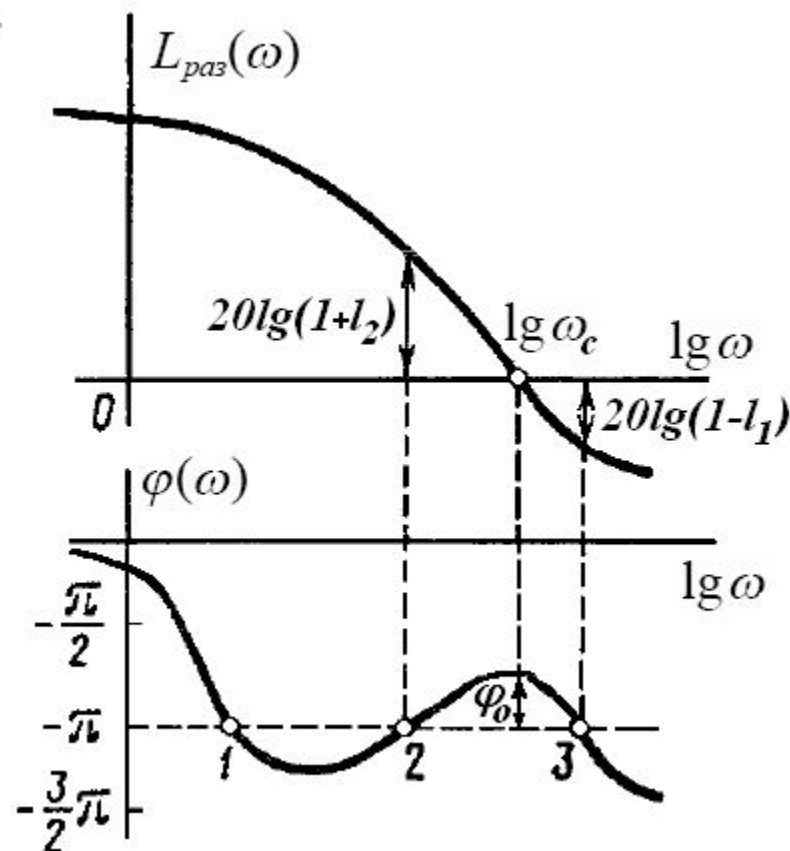
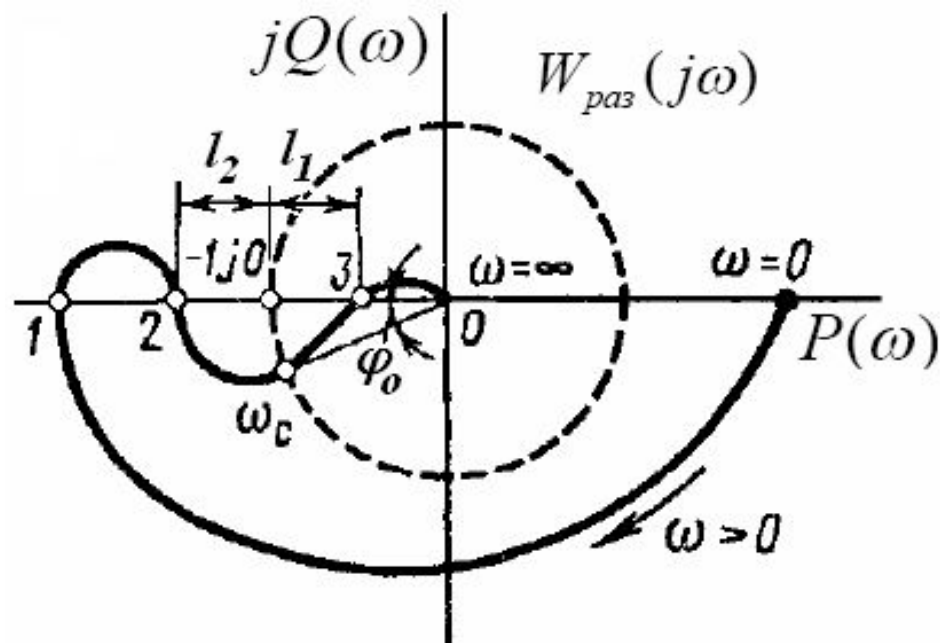
Логарифмический аналог критерия устойчивости Найквиста (достаточное условие)

Для устойчивой (нейтрально-устойчивой) разомкнутой системы, замкнутая система будет устойчива, если ЛАЧХ разомкнутой системы пересекает ось абсцисс раньше, чем ЛФЧХ достигает значения $-\pi$, т.е. $\omega_c < \omega_\pi$



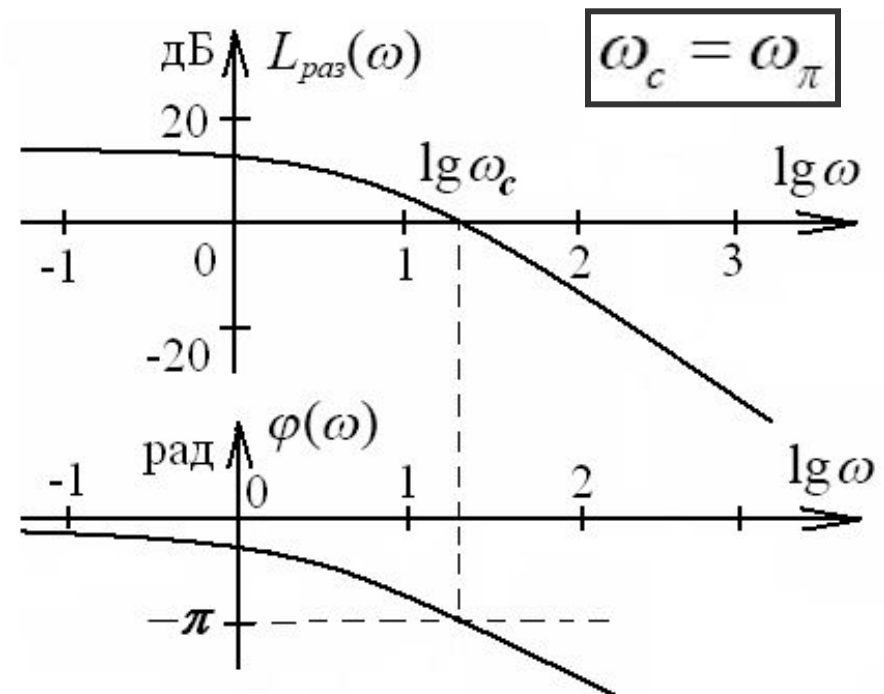
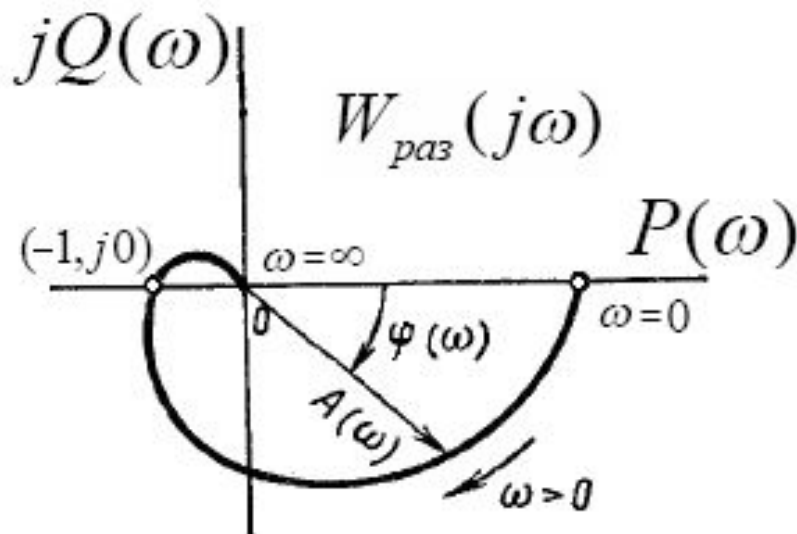
Логарифмический аналог критерия устойчивости Найквиста

Для устойчивой (нейтрально-устойчивой) разомкнутой системы, замкнутая система будет устойчива, если ЛФЧХ разомкнутой системы пересекает значение $-\pi$ четное число раз в области частот от 0 до ω_c



Условие для границы устойчивости системы

Для устойчивой (нейтрально-устойчивой) разомкнутой системы, замкнутая система будет находиться на колебательной границе устойчивости, если ЛАЧХ разомкнутой системы пересекает ось абсцисс в точке, где ЛФЧХ принимает значение $-\pi$, т.е. $\omega_c = \omega_\pi$



Тема 7.

Область устойчивости, запасы устойчивости
