
Тема 2.

Динамические характеристики линейных систем

Понятие «Система»

Система = ?

Понятие «Система» имеет различное содержание в зависимости от предметной области

Примеры систем:

- **Технические системы (двигатель, химический реактор, автомобиль, самолет, телефон, компьютер)**
- **Живые системы (клетка, бактерия, организм)**
- **Природные системы (солнечная система, галактика)**
- **Социальные системы (семья, общество, государство, коллектив)**
- **Информационные системы (базы данных, Интернет)**

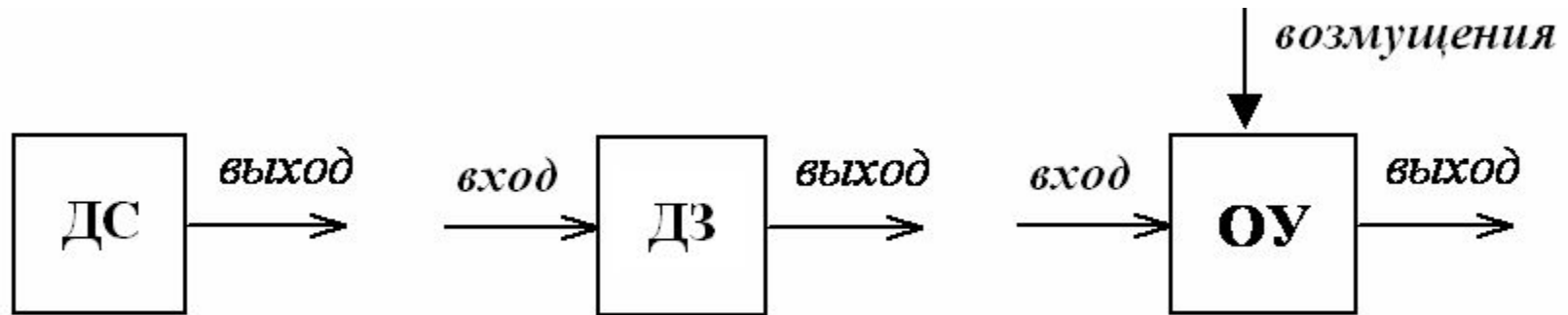
Понятие «Динамическая система»

Система - совокупность элементов, объединенных общим режимом функционирования.

В дисциплинах по автоматике и управлению в технических системах базовым является понятие – «динамическая система».

Динамическая система - система, процессы в которой изменяются во времени.

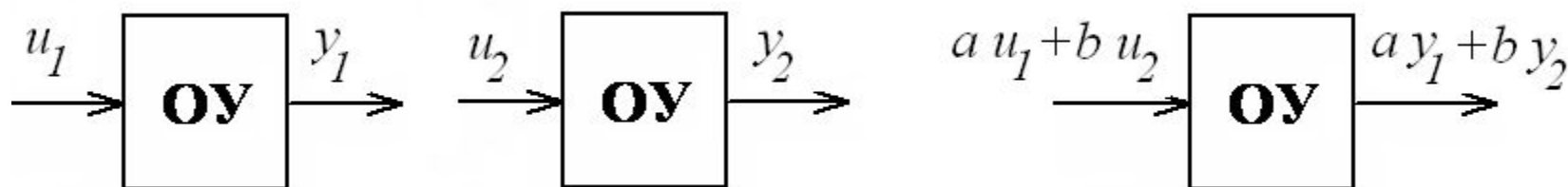
Динамическая система - динамическое звено



- ДС – динамическая система
- ДЗ – динамическое звено
- ОУ – объект управления
- Вход = Управляющее воздействие = Управление
- Внешние воздействия:
 - Управляющие воздействия (вход, управление)
 - Возмущающие воздействия (возмущение)

Динамическая характеристика

- *Динамическая характеристика* - любое соотношение, заданное аналитически, таблицей или графиком, которое позволяет описать поведение динамической системы (объекта управления) во времени
- *Линейная динамическая система (линейный объект управления)* - справедлив принцип суперпозиции



Динамические характеристики линейных систем (объектов управления)

- *Дифференциальные уравнения*
- *Структурные схемы*
- *Передаточные функции*
- *Частотные характеристики*
- *Временные характеристики*
- *Модальные характеристики*

Этапы построения математической модели ОУ

- Построить описательную модель объекта управления
- Выделить следующие группы переменных:
 - Управляющие воздействия (управление, вход)
 - Выходные переменные (выход)
 - Возмущающие воздействия (возмущение)
 - Вектор состояния
- Записать основные физические законы, описывающие процессы в ОУ
- Записать уравнения, связывающие все переменные между собой

Динамические характеристики линейных систем⁸

- *Дифференциальные уравнения*
- *Структурные схемы*
- *Передаточные функции*
- *Частотные характеристики*
- *Временные характеристики*
- *Модальные характеристики*

Дифференциальные уравнения

- *Переход от одного дифференциального уравнения высокого порядка к системе уравнений первого порядка (к форме Коши)*
 - *Матричная форма записи системы дифференциальных уравнений*
 - *Переход от системы дифференциальных уравнений к структурной схеме*
-

Переход к системе дифференциальных уравнений в форме Коши

$$\varphi(x^{(n)}, x^{(n-1)}, \dots, x^{(1)}, x) = 0$$



$$x^{(n)} = \tilde{\varphi}(x^{(n-1)}, \dots, x^{(1)}, x)$$



$$X \in R^n, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x^{(1)} \\ \vdots \\ x^{(n-2)} \\ x^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

$$\dot{X} = f(X)$$

Система дифференциальных уравнений в форме Коши

$$\dot{X} = f(X)$$



$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

.....

$$\dot{x}_{n-1} = x_n$$

$$\dot{x}_n = \tilde{\varphi}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$$

Автономная динамическая система

Динамическая система называется автономной, если ее модель задана системой однородных дифференциальных уравнений в которых отсутствуют управляющие и возмущающие воздействия

$$\dot{X} = f(X)$$

Условие равновесия динамической системы

Рассмотрим автономную динамическую систему, модель которой задана системой однородных дифференциальных уравнений

$$\dot{X} = f(X)$$

$$\dot{X} = f(X) \quad \longrightarrow \quad \boxed{\dot{X} = 0} \quad \longrightarrow \quad f(X) = 0$$

X_0 называется точкой равновесия динамической системы, если $f(X_0) = 0$

равновесия динамич.системы (линеаризация)

$$\dot{X} = f(X) \longrightarrow f(X_0) = 0 \longrightarrow X_0 = const$$

$$X = X_0 + Z \longrightarrow \dot{X} = \dot{X}_0 + \dot{Z} \longrightarrow \dot{X} = \dot{Z}$$

$$\frac{dX}{dt} = f(X) \longrightarrow \frac{d}{dt}(X_0 + Z) = f(X_0 + Z)$$

$$\frac{d}{dt}Z = f(X_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial X} \bigg|_{X=X_0} \right) Z + \dots$$

$$A = \frac{\partial f}{\partial X} \bigg|_{X=X_0} \longrightarrow \boxed{\dot{Z} = AZ}$$

Неавтономная динамическая система

Динамическая система называется неавтономной, если ее модель задана системой неоднородных дифференциальных уравнений в которых присутствуют управляющие или возмущающие воздействия

Уравнение состояния: $\dot{X} = F(X, u, f)$

Уравнение выхода: $y = \phi(X, u, f)$

Условие равновесия динамической системы

$$\begin{array}{l}
 \dot{X} = F(X, u, f) \\
 y = \phi(X, u, f)
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 X = X_0 = \text{const} \\
 u = u_0 = \text{const} \\
 f = f_0 = \text{const}
 \end{array} \right|
 \begin{array}{l}
 \dot{X} = 0 \\
 F(X_0, u_0, f_0) = 0 \\
 y_0 = \phi(X_0, u_0, f_0)
 \end{array}$$

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} X_0 \\ u_0 \\ f_0 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l}
 X = X_0 + \Delta X \\
 u = u_0 + \Delta u \\
 f = f_0 + \Delta f
 \end{array}$$

$$\dot{X} = \dot{X}_0 + \Delta\dot{X} = \Delta\dot{X}$$

$$\Delta\dot{X} = F(X_0 + \Delta X, u_0 + \Delta u, f_0 + \Delta f)$$

$$\Delta\dot{X} = F(X_0, u_0, f_0) + \left[\frac{\partial F}{\partial X} \right]_{\bar{X}} \Delta X + \left[\frac{\partial F}{\partial u} \right]_{\bar{X}} \Delta u + \left[\frac{\partial F}{\partial f} \right]_{\bar{X}} \Delta f + \dots$$

$$\Delta\dot{X} = \left[\frac{\partial F}{\partial X} \right]_{\bar{X}} \Delta X + \left[\frac{\partial F}{\partial u} \right]_{\bar{X}} \Delta u + \left[\frac{\partial F}{\partial f} \right]_{\bar{X}} \Delta f$$

Уравнение выхода в отклонениях от состояния равновесия 18

$$y = \phi(X, u, f)$$

$$y_0 = \phi(X_0, u_0, f_0)$$

$$\Delta y = y - y_0$$

$$= \phi(X, u, f) - \phi(X_0, u_0, f_0)$$

$$= \phi(X_0, u_0, f_0) + \left[\frac{\partial \phi}{\partial X} \right]_{\bar{X}} \Delta X + \left[\frac{\partial \phi}{\partial u} \right]_{\bar{X}} \Delta u + \left[\frac{\partial \phi}{\partial f} \right]_{\bar{X}} \Delta f \\ + \dots - \phi(X_0, u_0, f_0)$$

$$\Delta y = \left[\frac{\partial \phi}{\partial X} \right]_{\bar{X}} \Delta X + \left[\frac{\partial \phi}{\partial u} \right]_{\bar{X}} \Delta u + \left[\frac{\partial \phi}{\partial f} \right]_{\bar{X}} \Delta f$$

Линейная модель ОУ в отклонениях от состояния равновесия

$$\Delta \dot{X} = \left[\frac{\partial F}{\partial X} \right]_{\bar{X}} \Delta X + \left[\frac{\partial F}{\partial u} \right]_{\bar{X}} \Delta u + \left[\frac{\partial F}{\partial f} \right]_{\bar{X}} \Delta f$$

$$\Delta y = \left[\frac{\partial \phi}{\partial X} \right]_{\bar{X}} \Delta X + \left[\frac{\partial \phi}{\partial u} \right]_{\bar{X}} \Delta u + \left[\frac{\partial \phi}{\partial f} \right]_{\bar{X}} \Delta f$$

$$\dot{X} = AX + Bu + f_1$$

$$y = CX + Du + f_2$$

Линейная модель объекта управления

$$\dot{X} = AX + Bu + f_1, \quad X(t=0) = X^0$$

$$y = CX + f_2$$

$$X \in R^n, u \in R^1, A \in R^{n \times n}, B \in R^{n \times 1}, C \in R^{1 \times n}$$

- *Вектор состояния* – X
- *Начальные условия* – $X(t=0) = X^0$
- *Выход* – y
- *Вход* – u
- *Возмущения* – f_1, f_2

Линейная модель объекта управления в матричном виде

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} f_{11} \\ f_{12} \\ \vdots \\ f_{1,n-1} \\ f_{1n} \end{bmatrix}$$
$$y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-1} & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + f_2$$

Динамические характеристики линейных систем

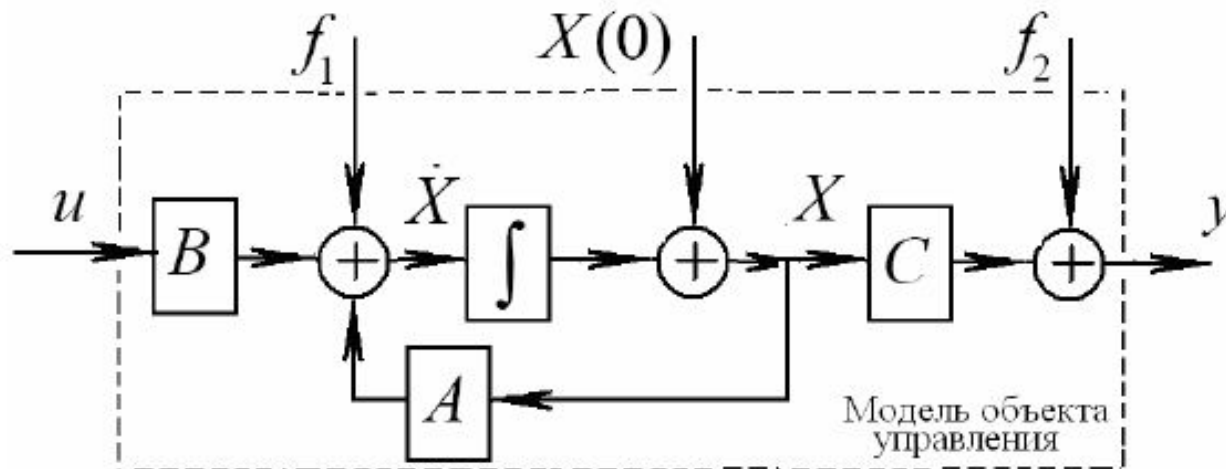
- *Дифференциальные уравнения*
- ***Структурные схемы***
- *Передаточные функции*
- *Частотные характеристики*
- *Временные характеристики*
- *Модальные характеристики*

Структурная схема модели ОУ²³

$$\dot{X} = AX + Bu + f_1, \quad X(t=0) = X^0$$

$$\int_0^t \dot{X}(\tau) d\tau = X(t) - X(0) = \int_0^t [AX(\tau) + Bu(\tau) + f_1(\tau)] d\tau$$

$$X(t) = X(0) + \int_0^t [AX(\tau) + Bu(\tau) + f_1(\tau)] d\tau$$

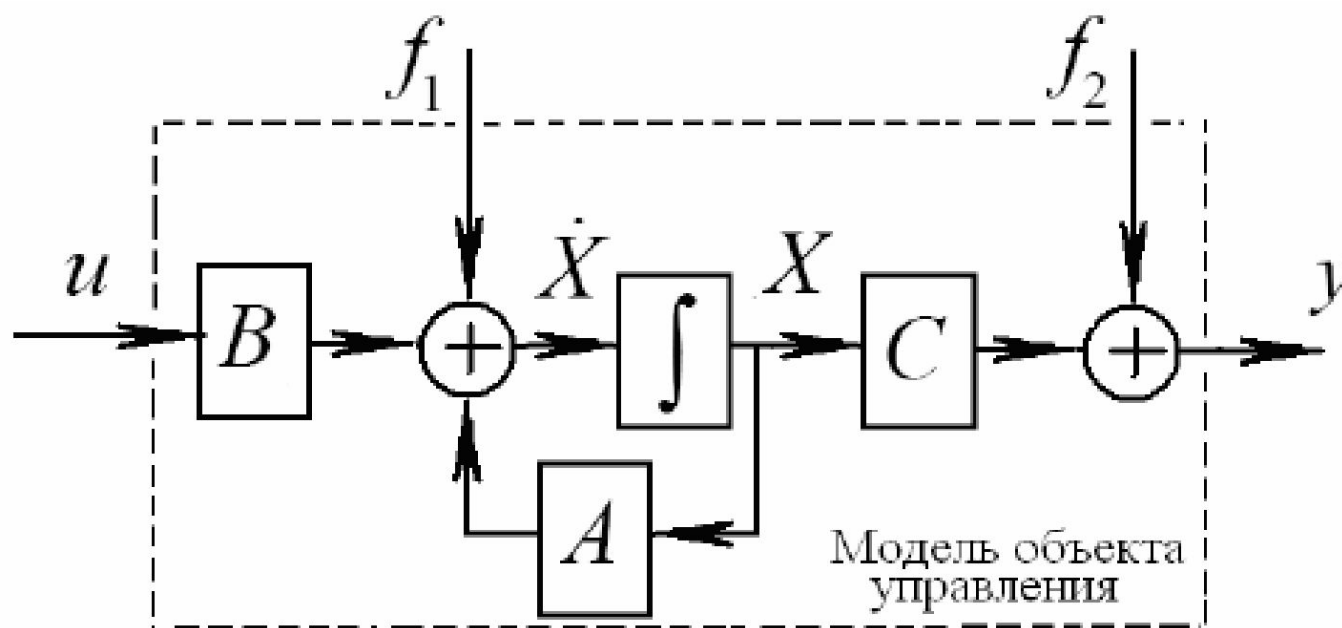


$$y = CX + f_2$$

Структурная схема модели ОУ при нулевых начальных условиях

24

При $X(0) = 0$



Пример перехода от системы дифф. уравнений к структурной схеме

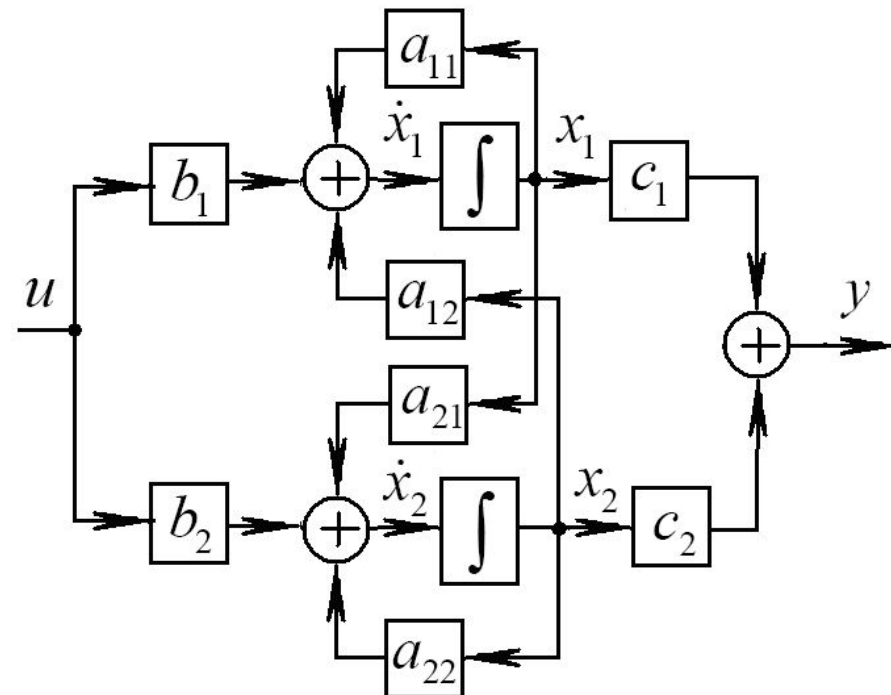
25

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

↓

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1u \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2u \\ y &= c_1x_1 + c_2x_2 \end{aligned}$$



Динамические характеристики линейных систем²⁶

- *Дифференциальные уравнения*
- *Структурные схемы*
- ***Передаточные функции***
- *Частотные характеристики*
- *Временные характеристики*
- *Модальные характеристики*

Преобразование Лапласа

$$f(t) \Rightarrow F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

$$\frac{df(t)}{dt} \Rightarrow L\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = sF(s) - f(0)$$

$$f^{(2)}(t) \Rightarrow L\{f^{(2)}(t)\} = s^2 F(s) - sf(0) - f^{(1)}(0)$$

$$f^{(n)}(t) \Rightarrow L\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f^{(1)}(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

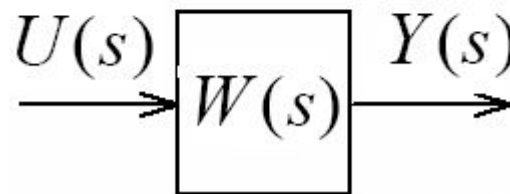
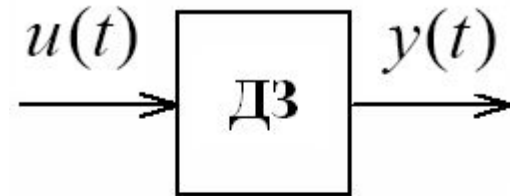
$$L\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

Передаточная функция

$$u(t) \Rightarrow U(s) = \int_0^{\infty} u(t) e^{-st} dt$$

$$y(t) \Rightarrow Y(s) = \int_0^{\infty} y(t) e^{-st} dt$$

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$



Определение 1: Передаточной функцией динамического звена называется отношение изображения по Лапласу выходного сигнала к изображению по Лапласу входного сигнала, полученные при нулевых начальных условиях.

Пример (1)

$$y^{(2)}(t) + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = b_1 u^{(1)}(t) + b_0 u(t)$$

$$\begin{aligned} L\{y^{(2)}(t)\} + L\{a_1 y^{(1)}(t)\} + L\{a_0 y(t)\} \\ = L\{b_1 u^{(1)}(t)\} + L\{b_0 u(t)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [s^2 Y(s) - sy(0) - y^{(1)}(0)] + a_1 [sY(s) - y(0)] + a_0 Y(s) \\ = b_1 [sU(s) - u(0)] + b_0 U(s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [s^2 + a_1 s + a_0] Y(s) \\ = [b_1 s + b_0] U(s) + [s + a_1] y(0) + y^{(1)}(0) + b_1 u(0) \end{aligned}$$

Пример (2)

$$y(0) = 0, \quad y^{(1)}(0) = 0, \quad u(0) = 0$$

$$\left[s^2 + a_1 s + a_0 \right] Y(s) = \left[b_1 s + b_0 \right] U(s)$$

$$Y(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} U(s)$$

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

Операторный способ определения передаточной функции

31

Оператор дифференцирования: $p = d / dt$

$$y^{(2)}(t) + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = b_1 u^{(1)}(t) + b_0 u(t)$$

Операторная форма записи дифференциального уравнения: $p^2 y(t) + a_1 p y(t) + a_0 y(t) = b_1 p u(t) + b_0 u(t)$

$$[p^2 + a_1 p + a_0] y(t) = [b_1 p + b_0] u(t)$$

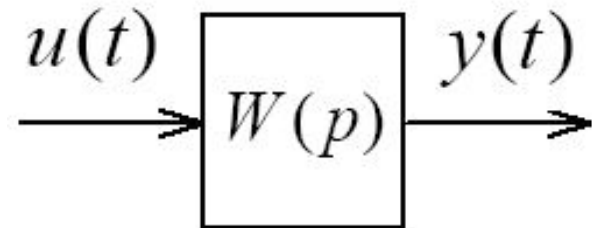
Собственный оператор ДЗ: $A(p) = p^2 + a_1 p + a_0$

Оператор входа ДЗ: $B(p) = b_1 p + b_0$

$$y(t) = \frac{b_1 p + b_0}{p^2 + a_1 p + a_0} u(t) \longrightarrow W(p) = \frac{b_1 p + b_0}{p^2 + a_1 p + a_0}$$

Определение 2: Передаточной функцией динамического звена называется отношение оператор входа $B(p)$ динамического звена к собственному оператору $A(p)$ данного звена.

$$W(p) = \frac{B(p)}{A(p)}$$



Динамические характеристики линейных систем³³

- *Дифференциальные уравнения*
- *Структурные схемы*
- *Передаточные функции*
- ***Частотные характеристики***
- *Временные характеристики*
- *Модальные характеристики*

Частотные характеристики

$$W(s) \Rightarrow s = j\omega \Rightarrow W(j\omega)$$

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$$

$W(j\omega)$ - частотная передаточная функция

$P(\omega)$ - вещественная частотная функция (ВЧФ)

график $P(\omega)$ - вещественная частотная характеристика (ВЧХ)

$Q(\omega)$ - мнимая частотная функция (МЧФ)

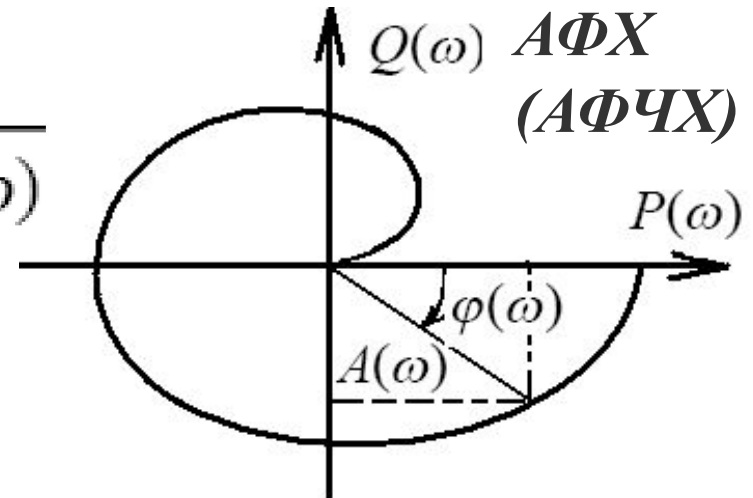
график $Q(\omega)$ - мнимая частотная характеристика (МЧХ)

Частотные характеристики

$$W(j\omega) = |W(j\omega)| e^{j \arg W(j\omega)}$$

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}$$

$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}$$



$A(\omega)$ - амплитудная частотная функция (АЧФ)

график $A(\omega)$ - амплитудная частотная характеристика (АЧХ)

$\varphi(\omega)$ - фазовая частотная функция (ФЧФ)

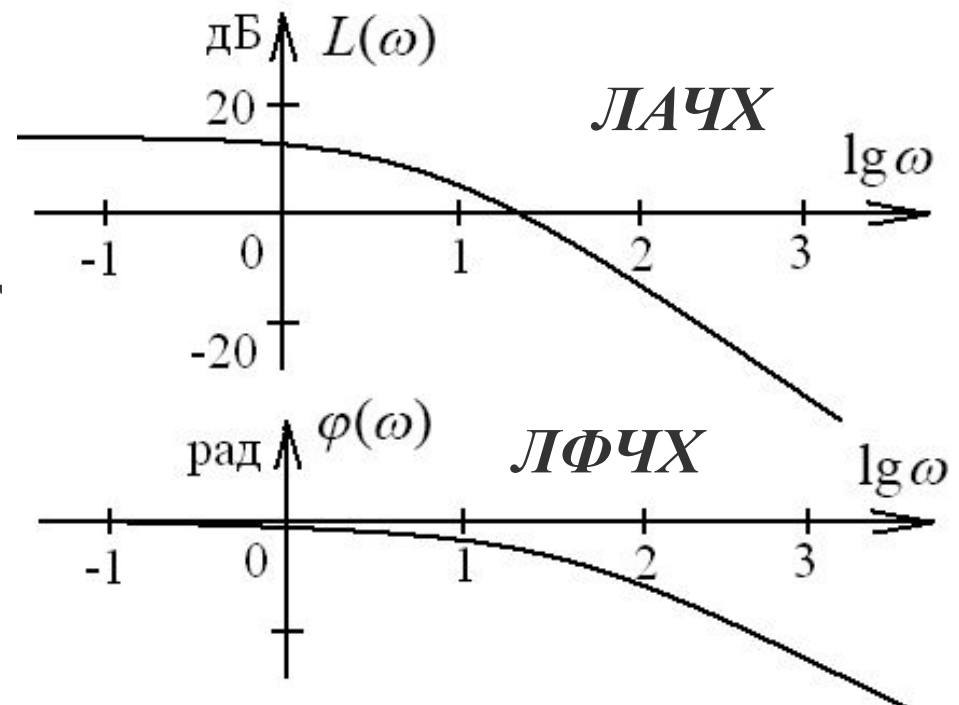
график $\varphi(\omega)$ - фазовая частотная характеристика (ФЧХ)

Логарифмические частотные характеристики

ЛАЧХ: $L(\omega) = 20 \lg |W(j\omega)| = 20 \lg A(\omega)$

ЛФЧХ: $\varphi(\omega)$

Логарифмические частотные характеристики имеют логарифмический масштаб изменения частоты по оси абсцисс

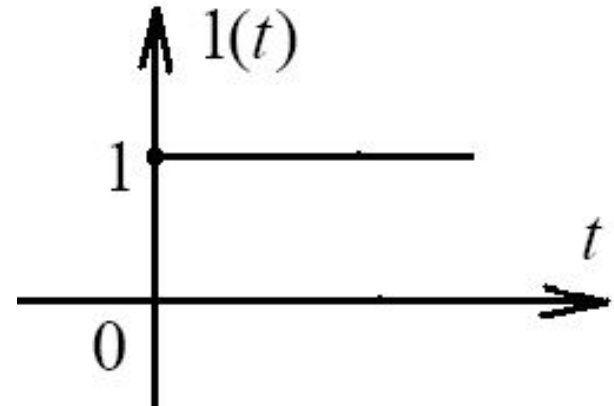


Динамические характеристики линейных систем³⁷

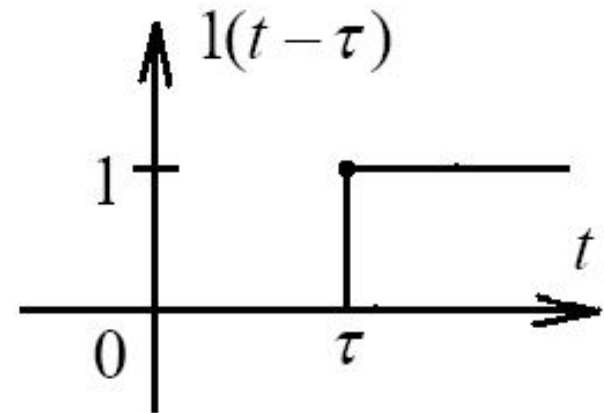
- *Дифференциальные уравнения*
- *Структурные схемы*
- *Передаточные функции*
- *Частотные характеристики*
- ***Временные характеристики***
- *Модальные характеристики*

Единичное ступенчатое воздействие (функция Хэвисайда) ³⁸

$$1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$



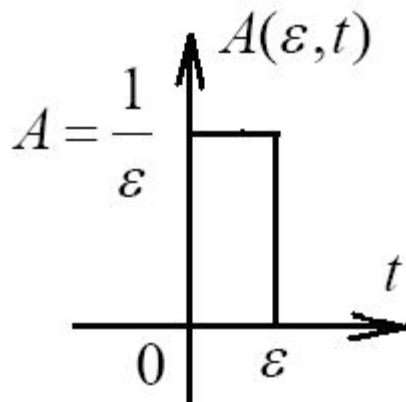
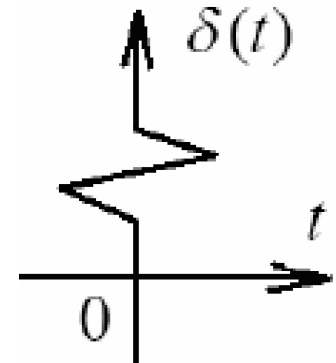
$$1(t - \tau) = \begin{cases} 0, & t < \tau \\ 1, & t \geq \tau \end{cases}$$



Единичное импульсное воздействие 39 (функция Дирака)

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t = 0 \end{cases}$$

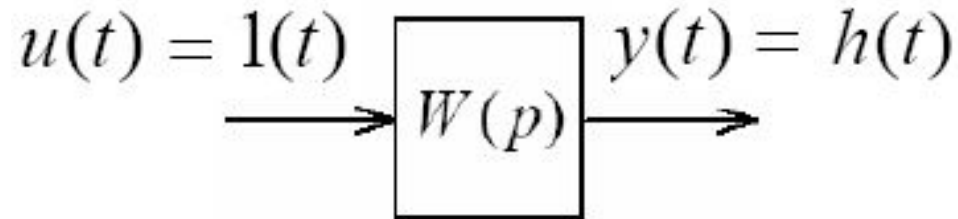
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$



$$\epsilon \rightarrow 0$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} A(\epsilon, t) \rightarrow \delta(t)$$

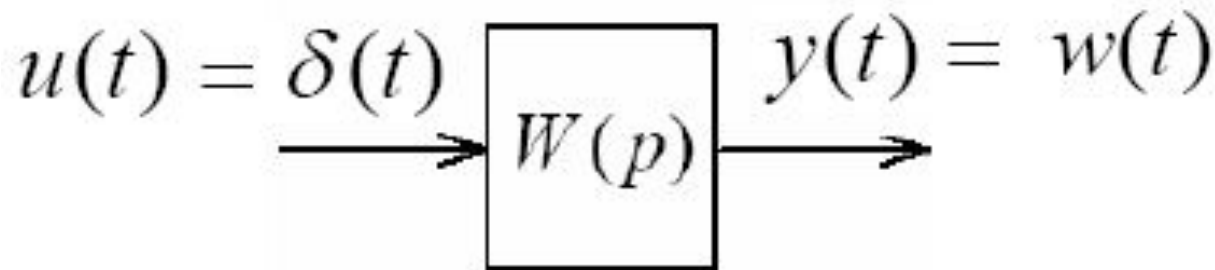
Переходная функция звена (ПФ)



Определение: Переходной функцией динамического звена называется реакция его выхода на единичное ступенчатое воздействие на входе при нулевых начальных условиях.

График переходной функции называется *переходной характеристикой* динамического звена.

Импульсная переходная функция звена (ИПФ) – весовая функция

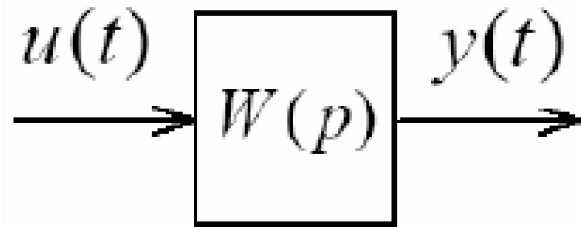


Определение: Импульсной переходной функцией динамического звена называется реакция его выхода на единичное импульсное воздействие на входе при нулевых начальных условиях.

График импульсной переходной функции называется *импульсной переходной характеристикой* динамического звена.

- *Дифференциальные уравнения*
- *Структурные схемы*
- *Передаточные функции*
- *Частотные характеристики*
- *Временные характеристики*
- ***Модальные характеристики***

Модальные характеристики звена



$$W(p) = \frac{B(p)}{A(p)}$$

Нули передаточной функции – корни полинома $B(p)$

Полюса передаточной функции – корни полинома $A(p)$

$A(p)$ - характеристический полином звена

$A(p) = 0$ - характеристическое уравнение звена

Общий вид передаточной функция линейной системы

44

$$\dot{X} = AX + Bu \quad X \in R^n$$

$$y = CX$$

$$pX = AX + Bu \Rightarrow (pI_n - A)X = Bu \Rightarrow$$

$$X = (pI_n - A)^{-1} Bu \Rightarrow y = C(pI_n - A)^{-1} Bu$$

$$W(p) = C(pI_n - A)^{-1} B$$

$$W(p) = \frac{1}{\det(pI_n - A)} \cdot C \cdot \text{adj}(pI_n - A)^T \cdot B$$

$$W(p) = \frac{B(p)}{A(p)} \Rightarrow A(p) = \det(pI_n - A)$$

Взаимосвязь временных характеристик с передаточной функцией

$$U(s) \xrightarrow{\quad} \boxed{W(s)} \xrightarrow{\quad} Y(s) \quad \Rightarrow \quad Y(s) = W(s)U(s)$$

$$L\{\delta(t)\} = 1 \xrightarrow{\quad} \boxed{W(s)} \xrightarrow{\quad} L\{w(t)\} \quad \Rightarrow \quad L\{w(t)\} = W(s)$$

$$L\{1(t)\} = \frac{1}{s} \xrightarrow{\quad} \boxed{W(s)} \xrightarrow{\quad} L\{h(t)\} \quad \Rightarrow \quad L\{h(t)\} = W(s)\frac{1}{s}$$

$$W(s) = L\{w(t)\} = sL\{h(t)\} = sL\left\{\frac{d}{dt}h(t)\right\} \quad \Rightarrow$$

$$w(t) = \frac{d}{dt}h(t) \quad h(t) = \int_0^t w(\tau)d\tau, \quad h(0) = 0$$

Тема 3.

Типовые динамические звенья
