

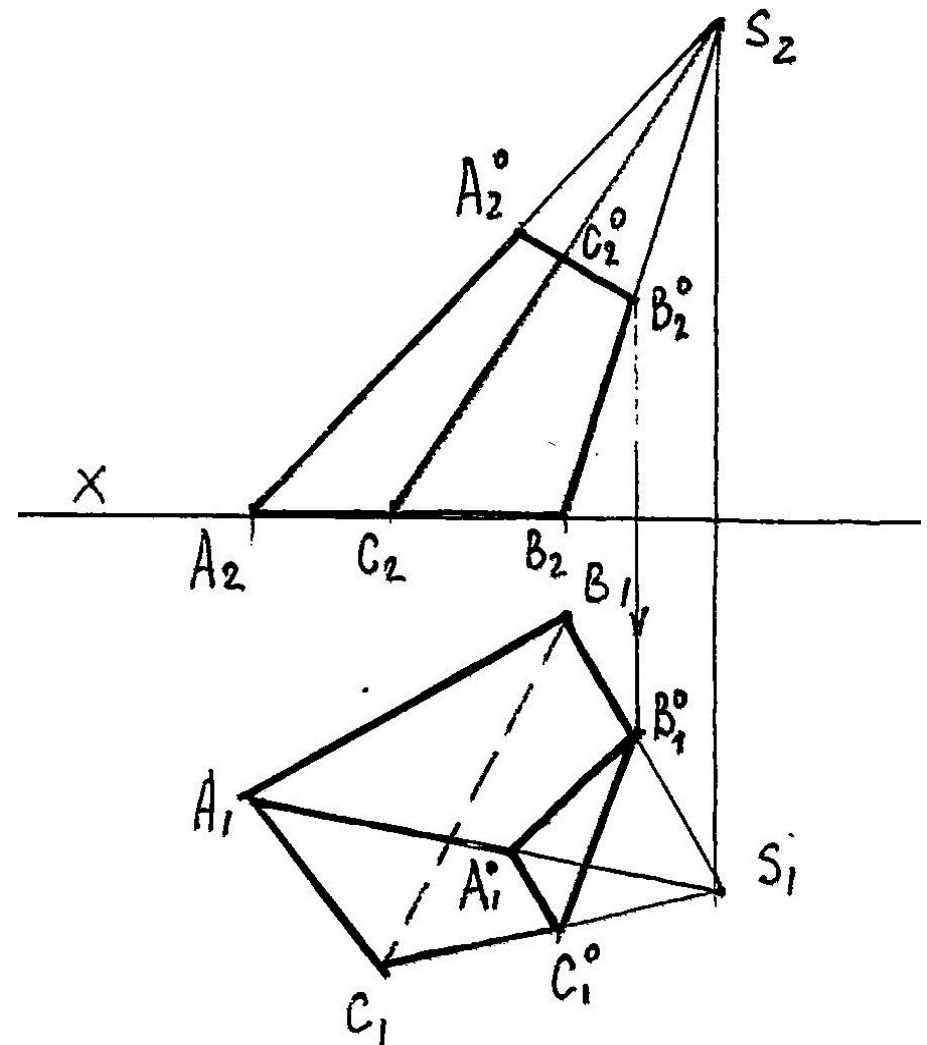
Лекция 9

- Построение разверток пирамиды и конуса.
- Построение разверток призмы и цилиндра.
- Построение разверток поверхностей Каталана
- Построение разверток поверхностей вращения

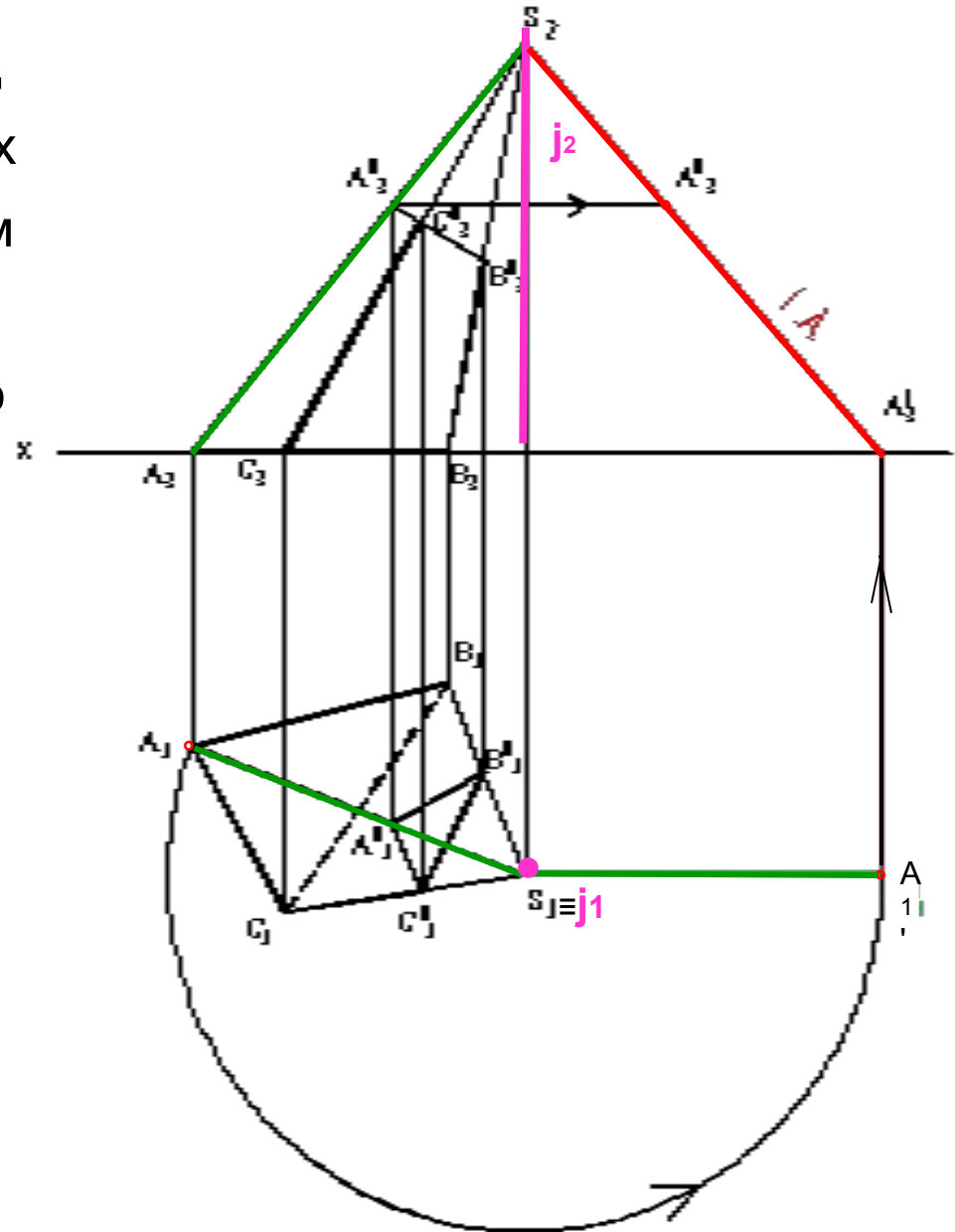
Построение развертки пирамиды

Задача: построить развертку наклонной усеченной пирамиды с основанием $\triangle ABC$ и вершиной S

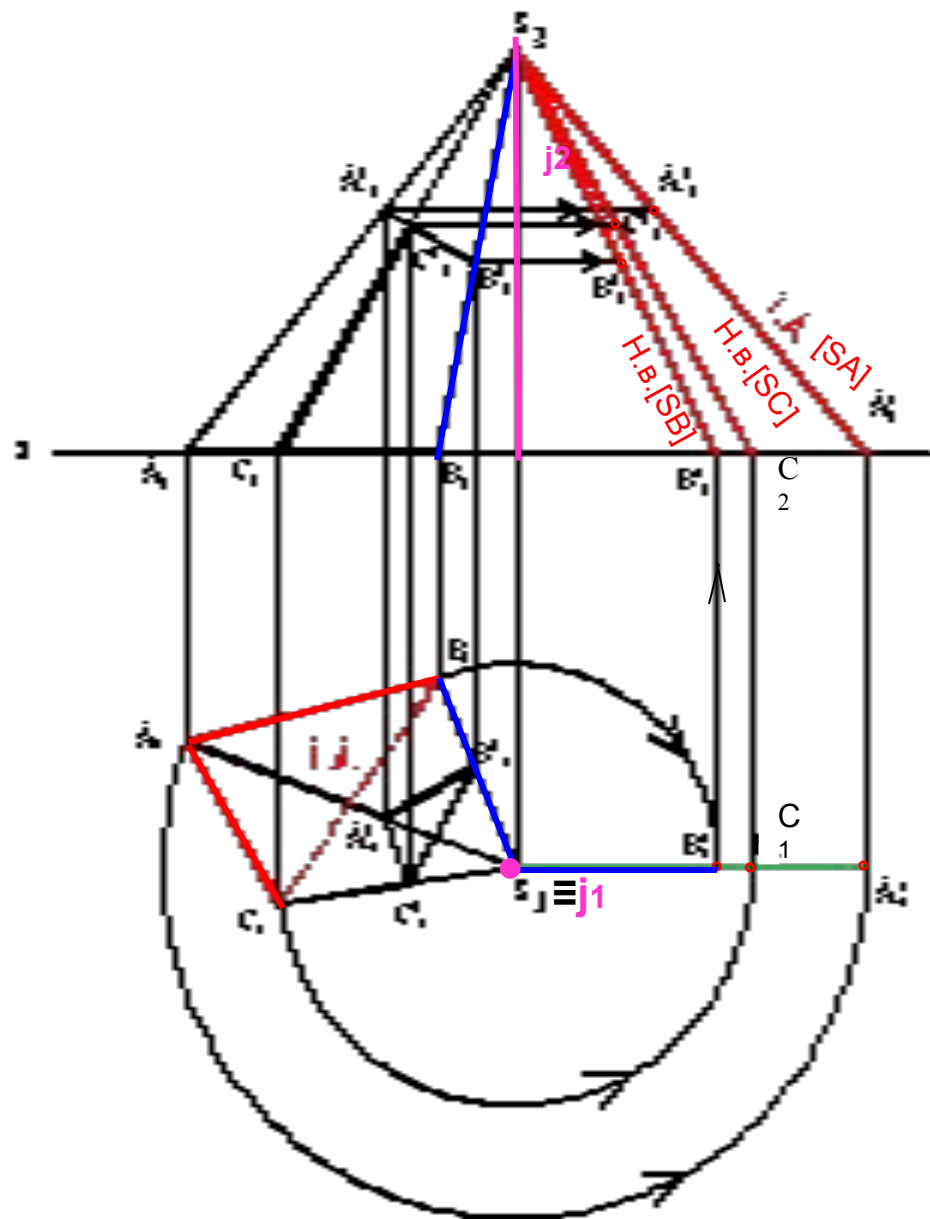
Решение: Для построения развертки пирамиды надо найти натуральные величины всех ее граней.



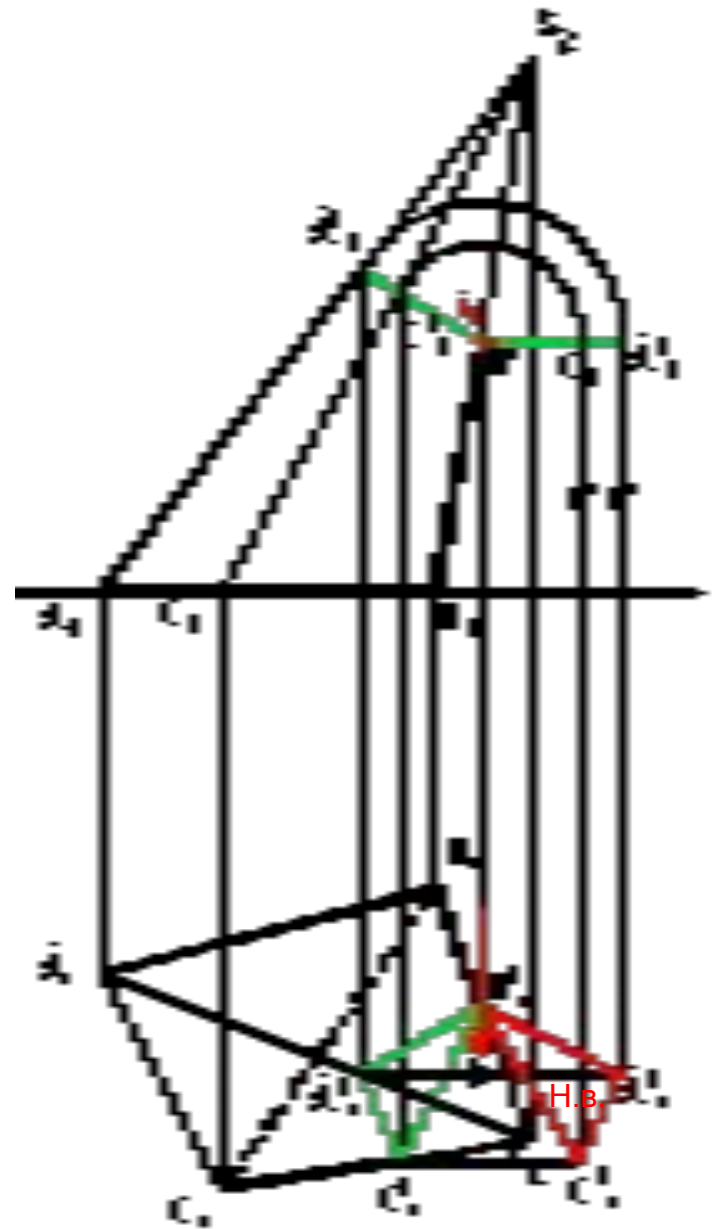
Для определения натуральных величин ребер применим метод вращения вокруг проецирующих осей. **Ось вращения j** проведем через $(.) S$ перпендикулярно плоскости Π_1 . Развернем ребро SA в положение, **параллельное** плоскости Π_2 и найдем **натуральную величину $[SA]$** . Т.к. $(.) A^\circ$ лежит на ребре SA , она также развернется в новое положение (на Π_2 фронтальная проекция $A^\circ 2$ переместится на своей высоте на **Н.В. $[SA]$**)



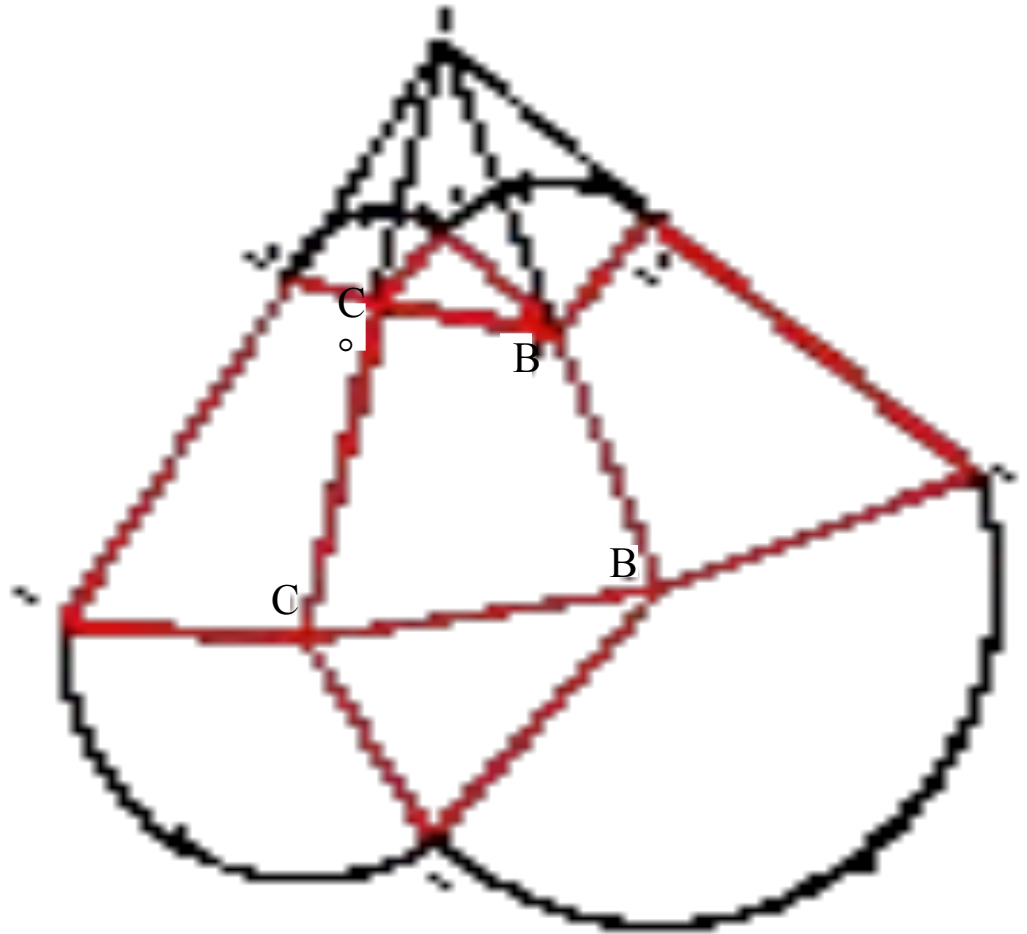
Вращением вокруг
 проецирующей оси j
 определяем натуральные
 величины ребер $[SB]$ и
 $[SC]$, развернув их в
 положение,
 параллельное Π_2 .
 Нижнее основание –
 $\triangle ABC$ лежит в плоскости
 проекций Π_1 и
 проецируется на нее в
 натуральную величину
 ($\triangle A_1B_1C_1 = H.V.$)



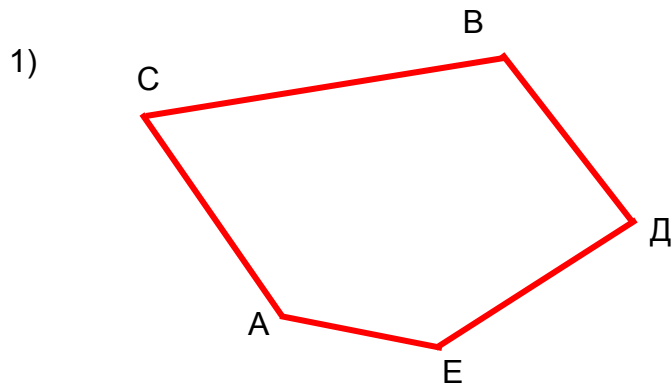
Для определения **натуральной величины** верхнего основания $\Delta A^\circ B^\circ C^\circ$ применим метод вращения вокруг фронтально-проецирующей оси $i \perp \Pi_2$. Т.к. плоскость $\Delta A^\circ B^\circ C^\circ$ является фронтально-проецирующей, развернем ее фронтальную проекцию $\Delta A^\circ_2 B^\circ_2 C^\circ_2$ параллельно плоскости Π_1 и определим **натуральную величину** верхнего основания – $\Delta A^\circ_1 B^\circ_1 C^\circ_1 = \text{Н.В.}$



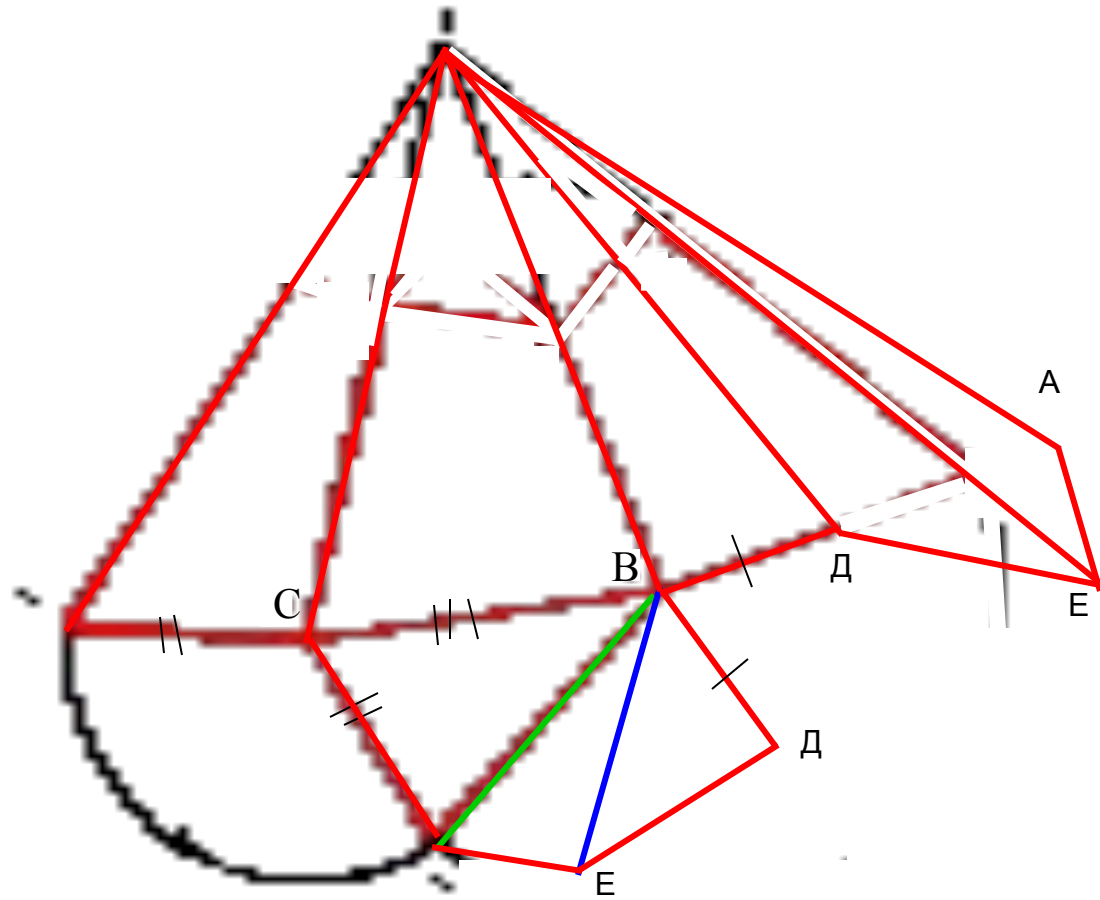
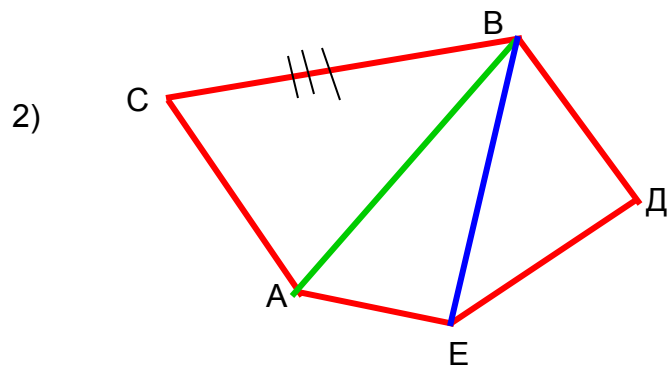
Методом
триангуляции
(засечками) строим
развертку всей
поверхности
пирамиды. Затем
пристраиваем
верхнее и нижнее
основания.



Если основание пирамиды имеет больше сторон, например 5,



необходимо разбить его на треугольники:

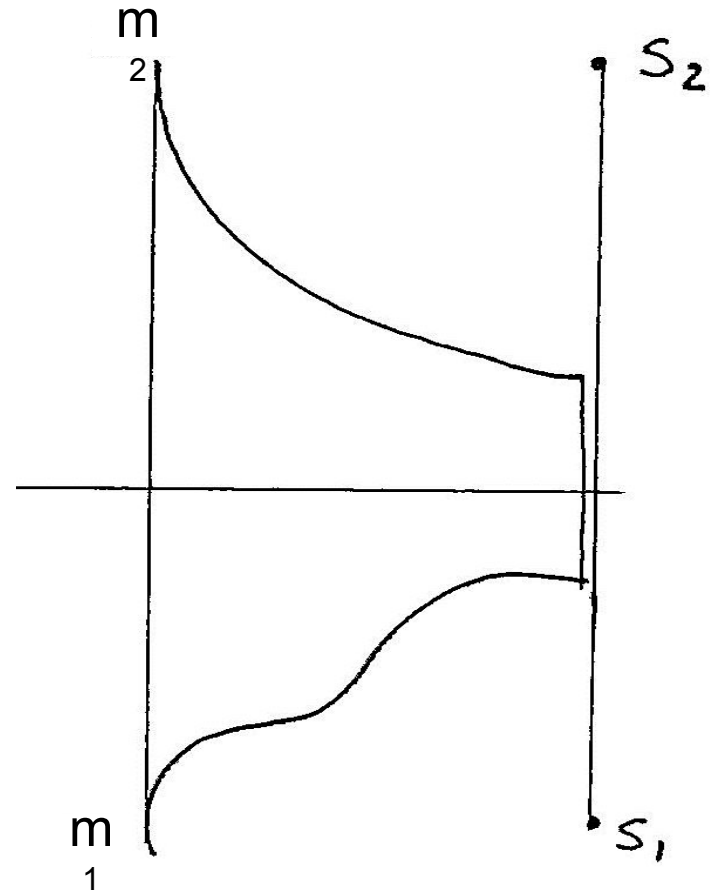
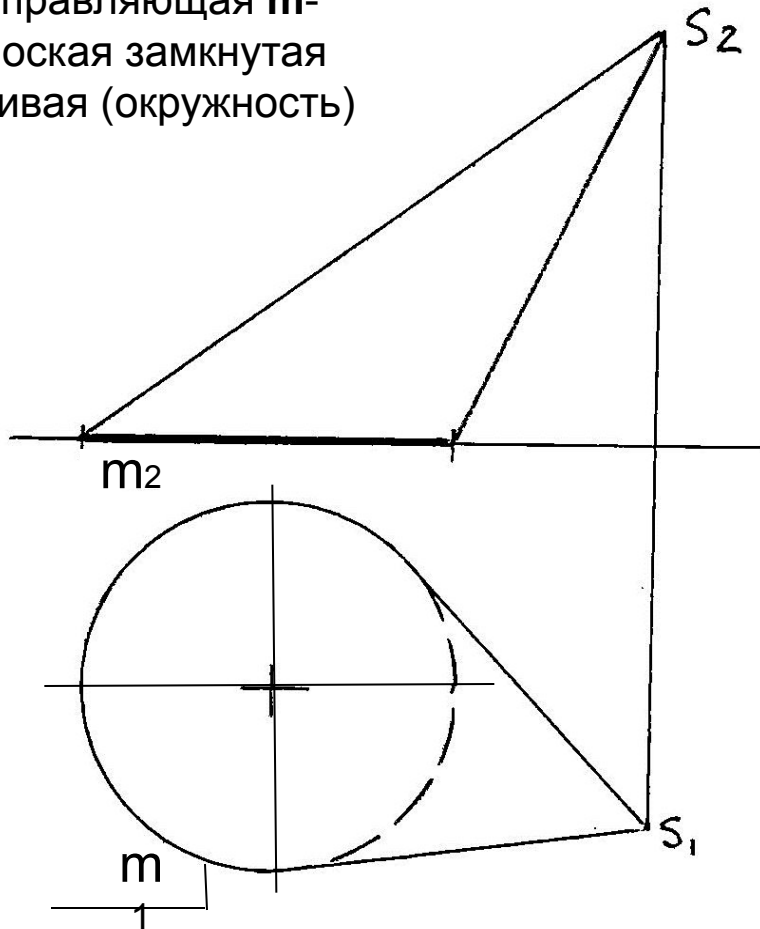


3) Затем перенести на развертку таким образом, чтобы одна сторона основания, например СВ, совпала с отрезком СВ на развертке, а соседний отрезок (АС) совместился при сворачивании развертки в объем. Построение оснований выполняем методом триангуляции.

Построение развертки конуса

Определитель:

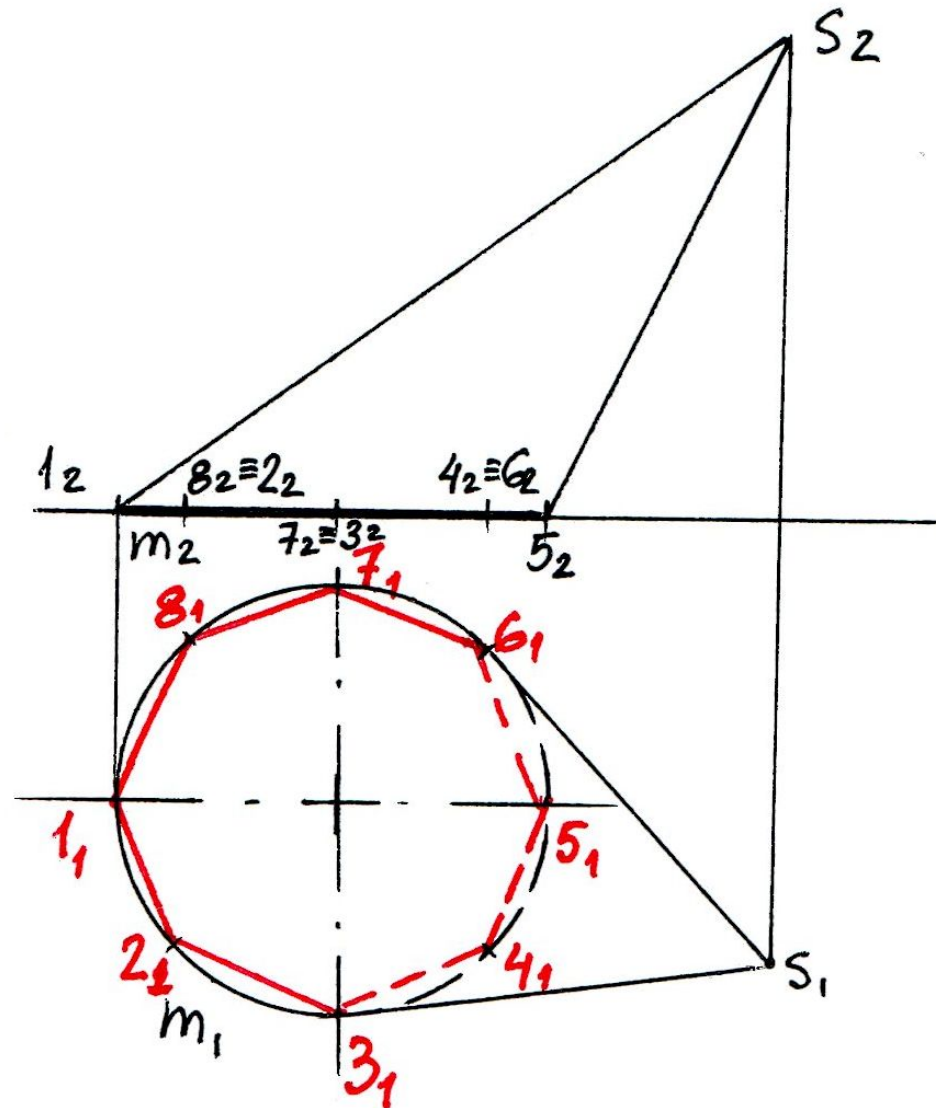
вершина S и
направляющая m -
плоская замкнутая
кривая (окружность)



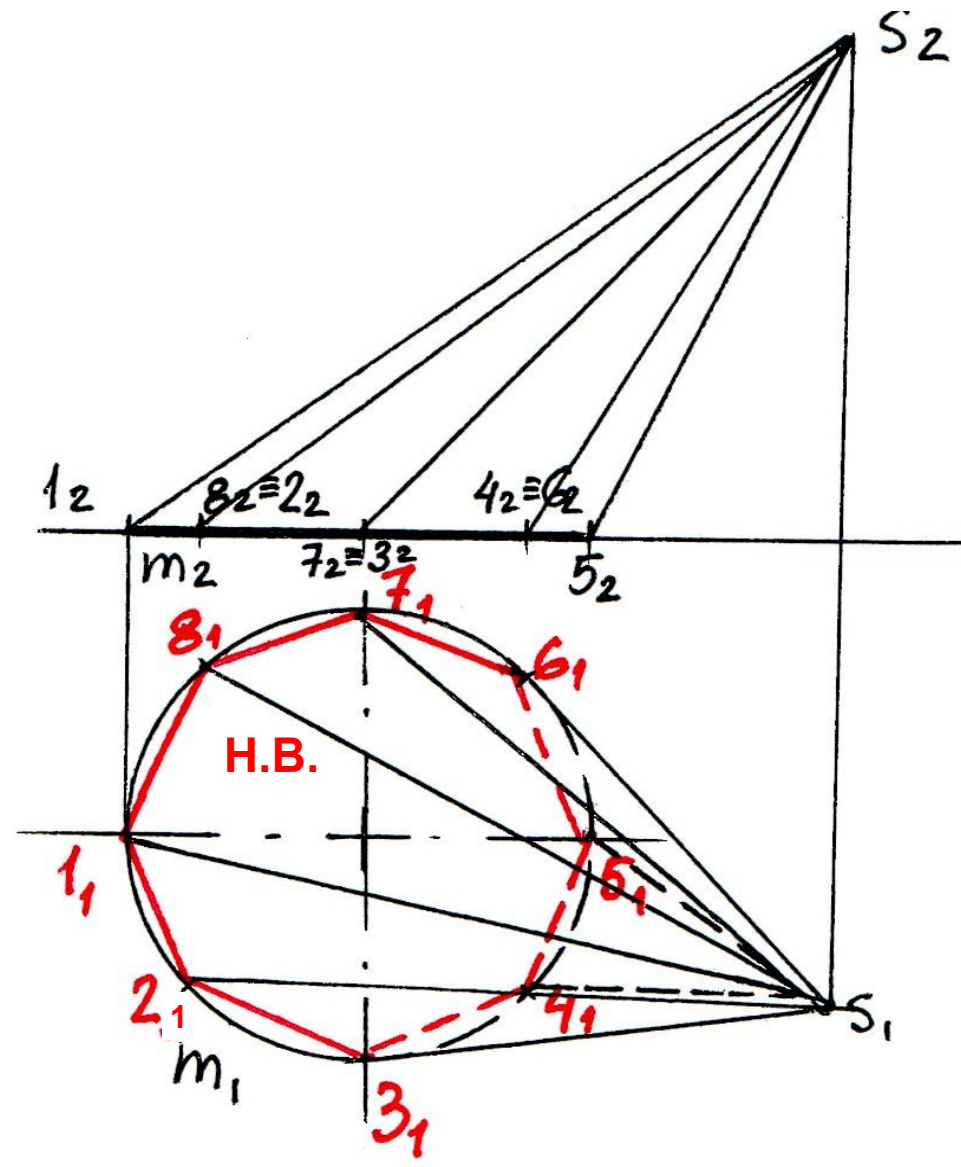
Определитель: вершина S и направляющая m -
пространственная незамкнутая кривая

Построение развертки конуса с плоской кривой направляющей

- Впишем в конус n -угольную пирамиду. Для этого основание конуса разделим на n частей. Чем количество n больше, тем развертка точнее.
- Если в основании конуса окружность, то вписываем **правильный n -угольник**

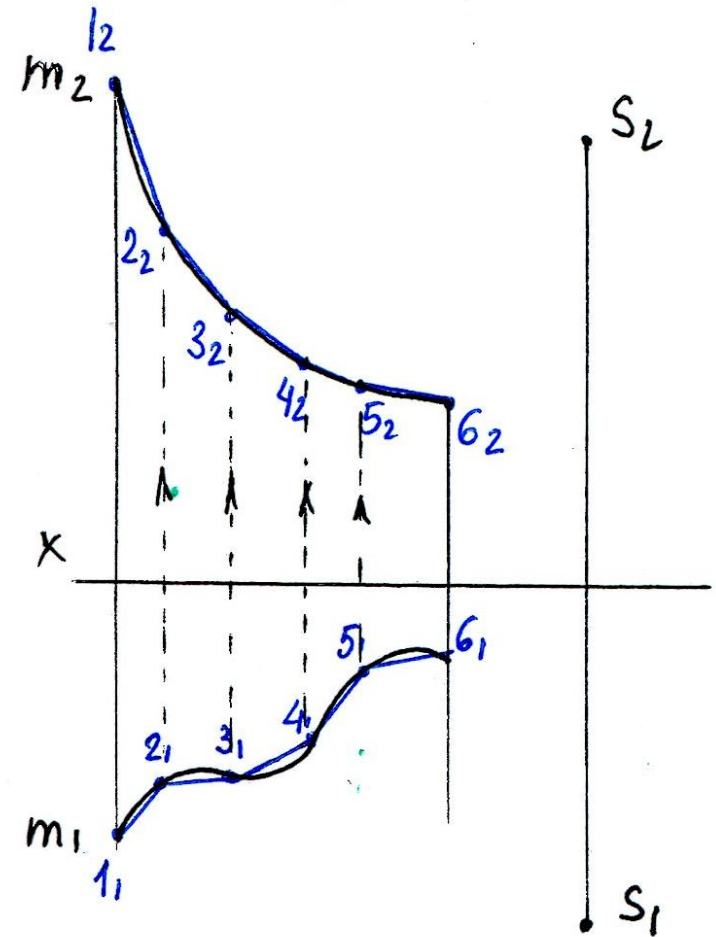


Если основание лежит на Π_1 , то оно проецируется в **натуральную величину**. Остается найти натуральную величину ребер 1-S...8-S и построить развертку (в данном случае восьмиугольной пирамиды)

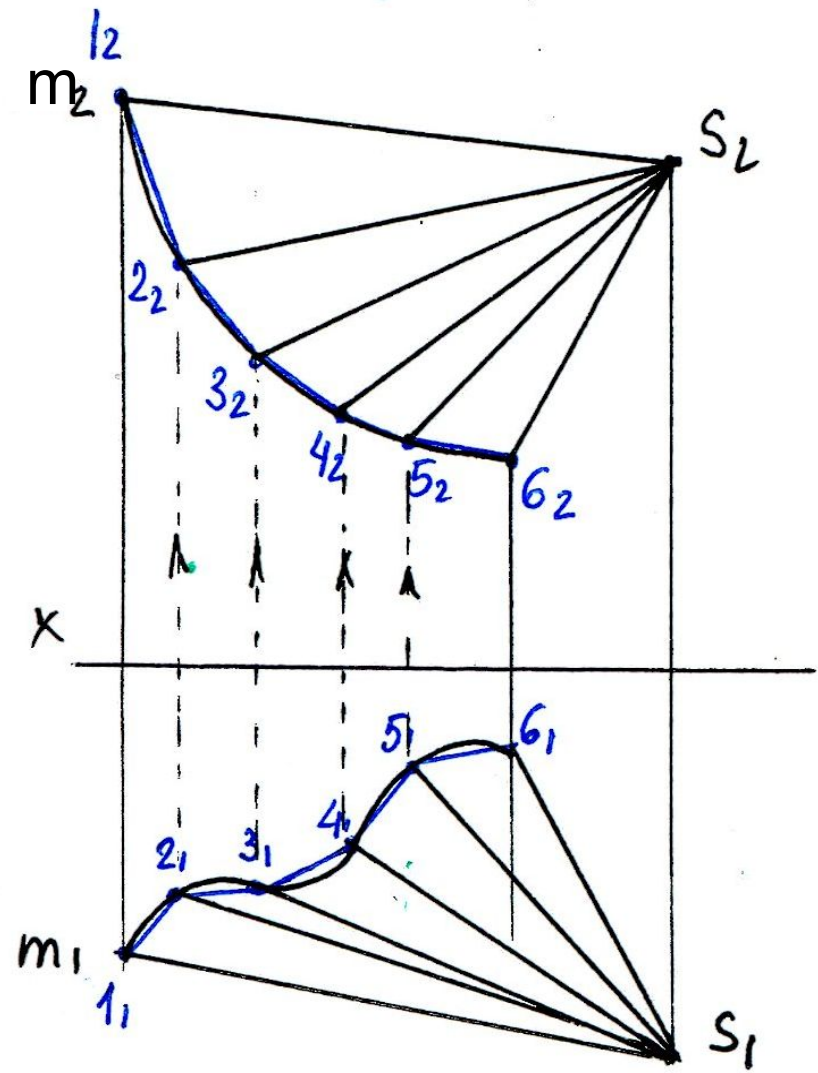


Построение развертки конуса с пространственной кривой направляющей

- Впишем в конус n -угольную пирамиду. Для этого направляющую m разделим на n частей. Чем количество n больше, тем развертка точнее.



Зададим образующие
1-S... 6-S. В данном
примере все ребра (в
том числе и 1-2 ...5-6)
являются прямыми
общего положения.
Следовательно, для
построения развертки
надо искать
натуральные величины
всех ребер



Для определения

натуральных величин

ребер 1-2, 2-3.... можно использовать метод прямоугольного треугольника.

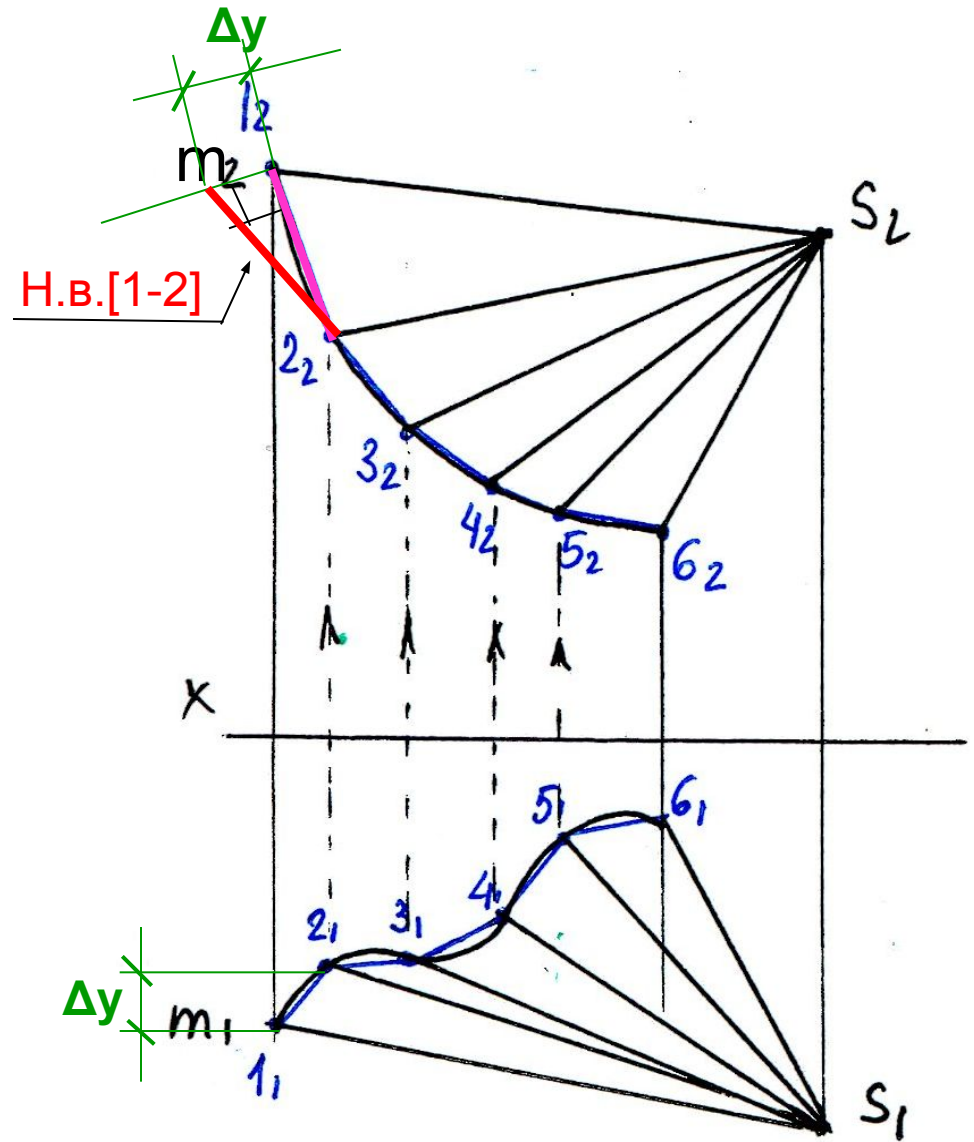
Например, 12-22 **первый катет**,

следовательно с плоскости П1 забираем размер второго катета

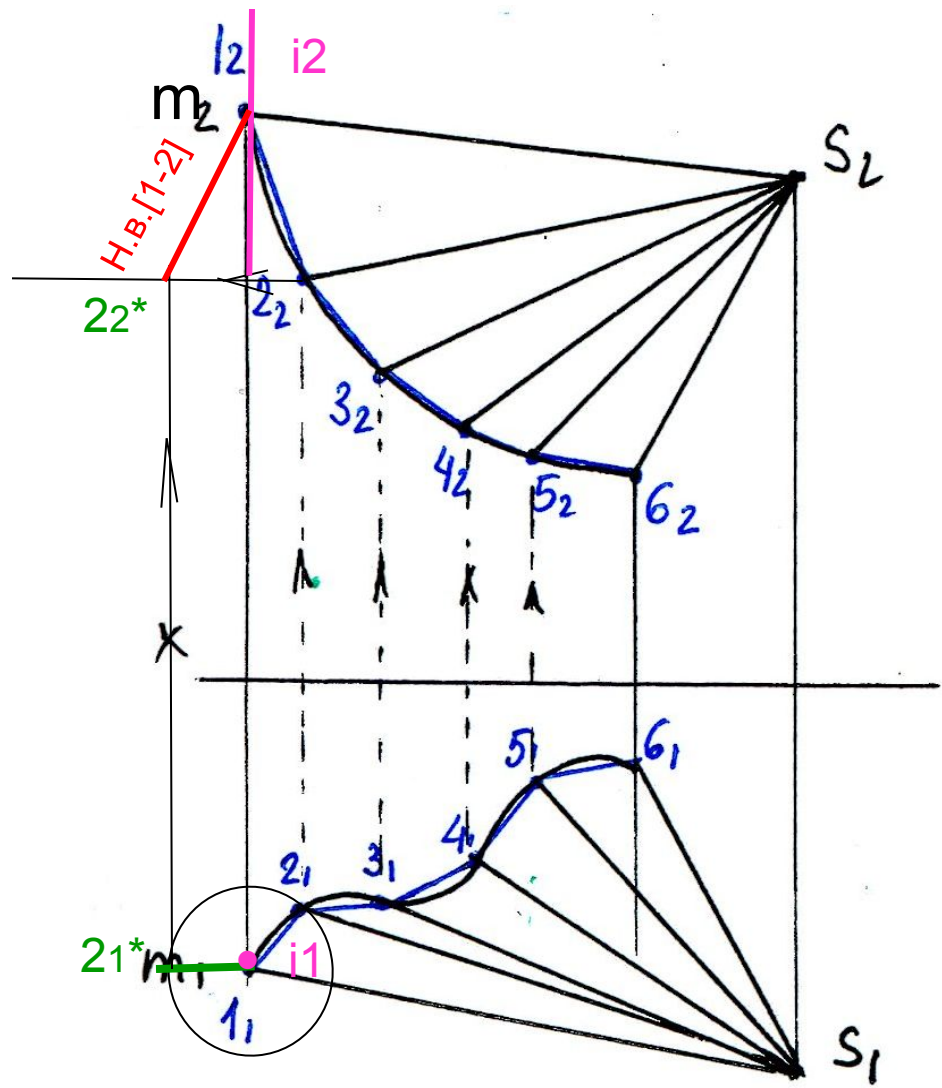
(Δy) и на П2 строим прямоугольный

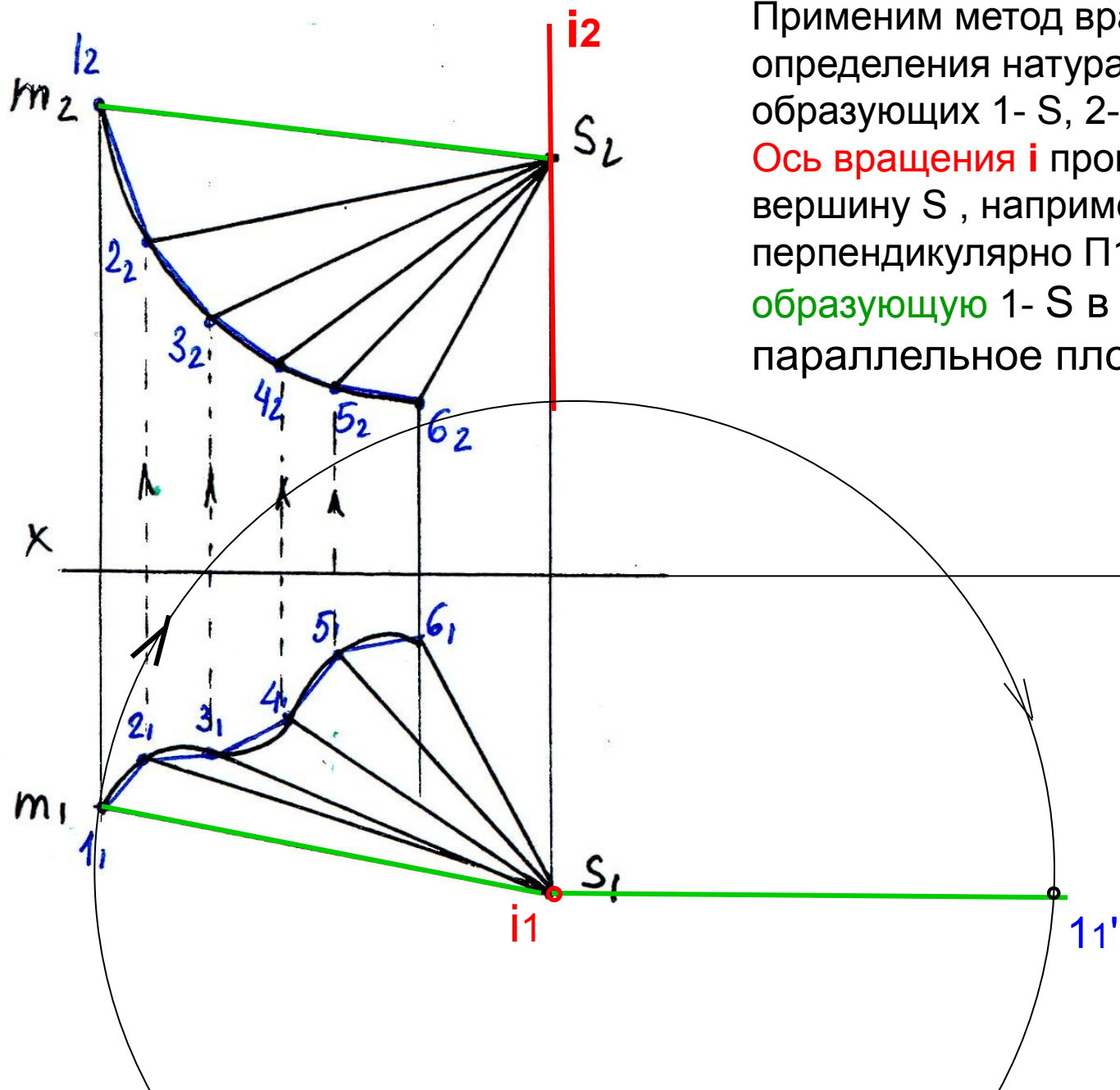
треугольник, гипотенуза которого и является

натуральной величиной отрезка прямой 1-2



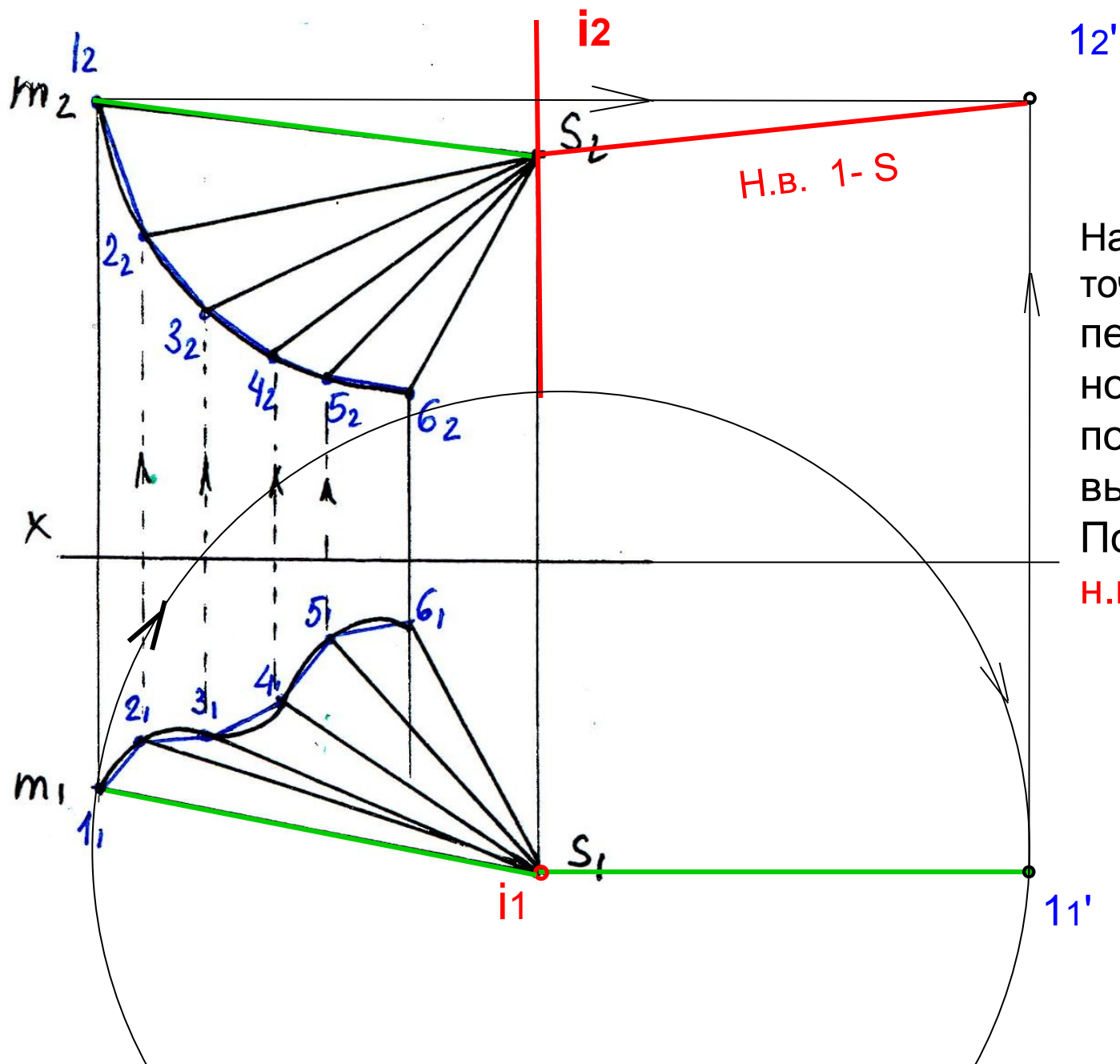
Или другой способ –
 например, способ
 вращения вокруг
 проецирующих осей.
 Развернем отрезок 1-2
 вокруг **проецирующей**
оси i , перпендикулярной
 П1 в положение,
 параллельное
 плоскости П2 и
 определим
натуральную величину
1-2 и далее повторим
 построения с отрезками
 2-3, 3-4.....



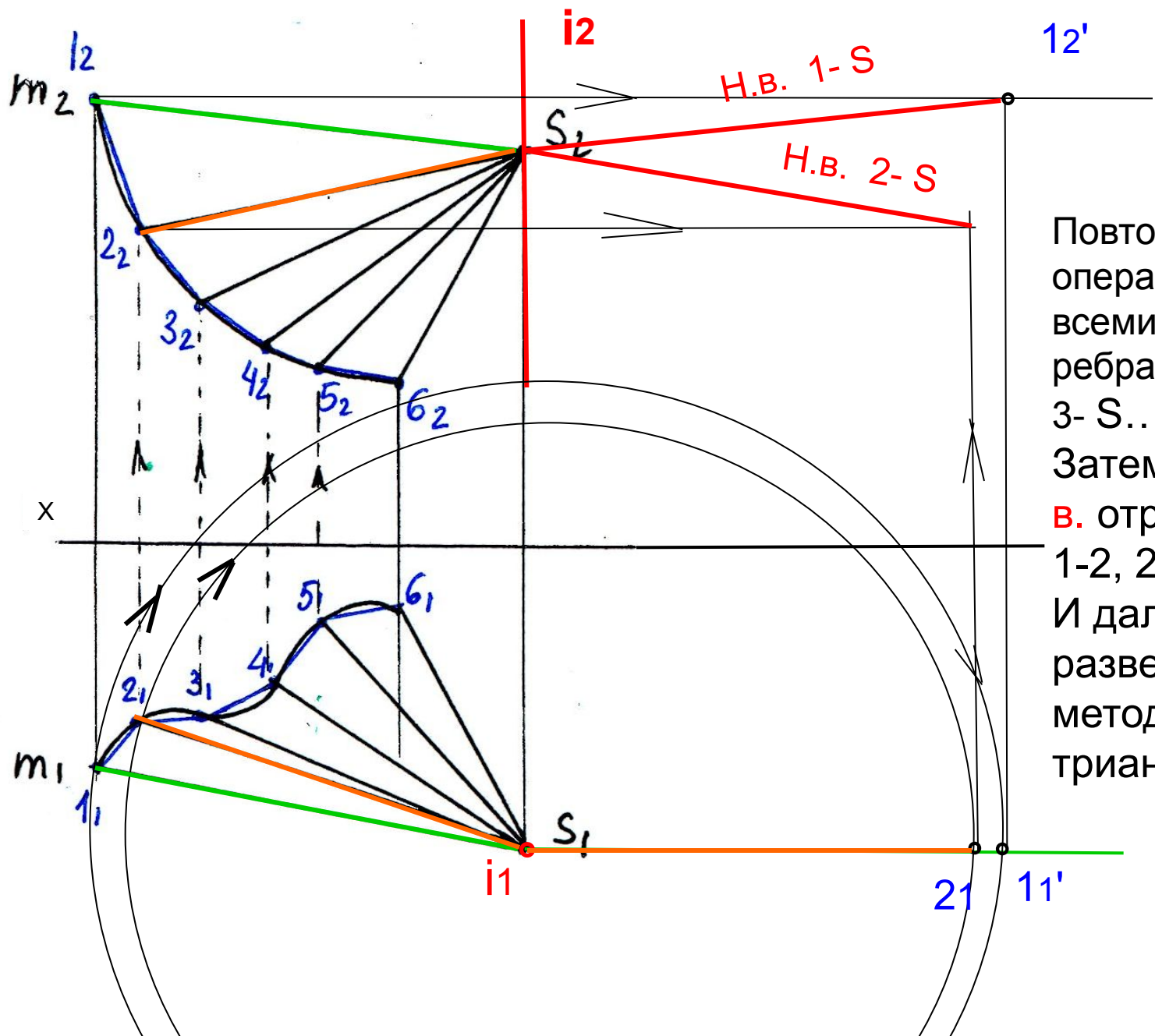


Применим метод вращения для определения натуральных величин образующих 1- S, 2- S, 3- S

Ось вращения i проведем через вершину S, например перпендикулярно П1. Развернем образующую 1- S в положение, параллельное плоскости П2



На П2 проекция
 точки 12
 переместиться в
 новое
 положение на
 высоте точки 1.
 Получим
 Н.В. 1-S



Повторим
 операцию со
 всеми остальными
 ребрами 2-S,
 3-S... 6-S.
 Затем найдем **Н.**
В. отрезков
 1-2, 2-3, 3-4.....
 И далее строим
 развертку
 методом
 триангуляции

Эпюр 2

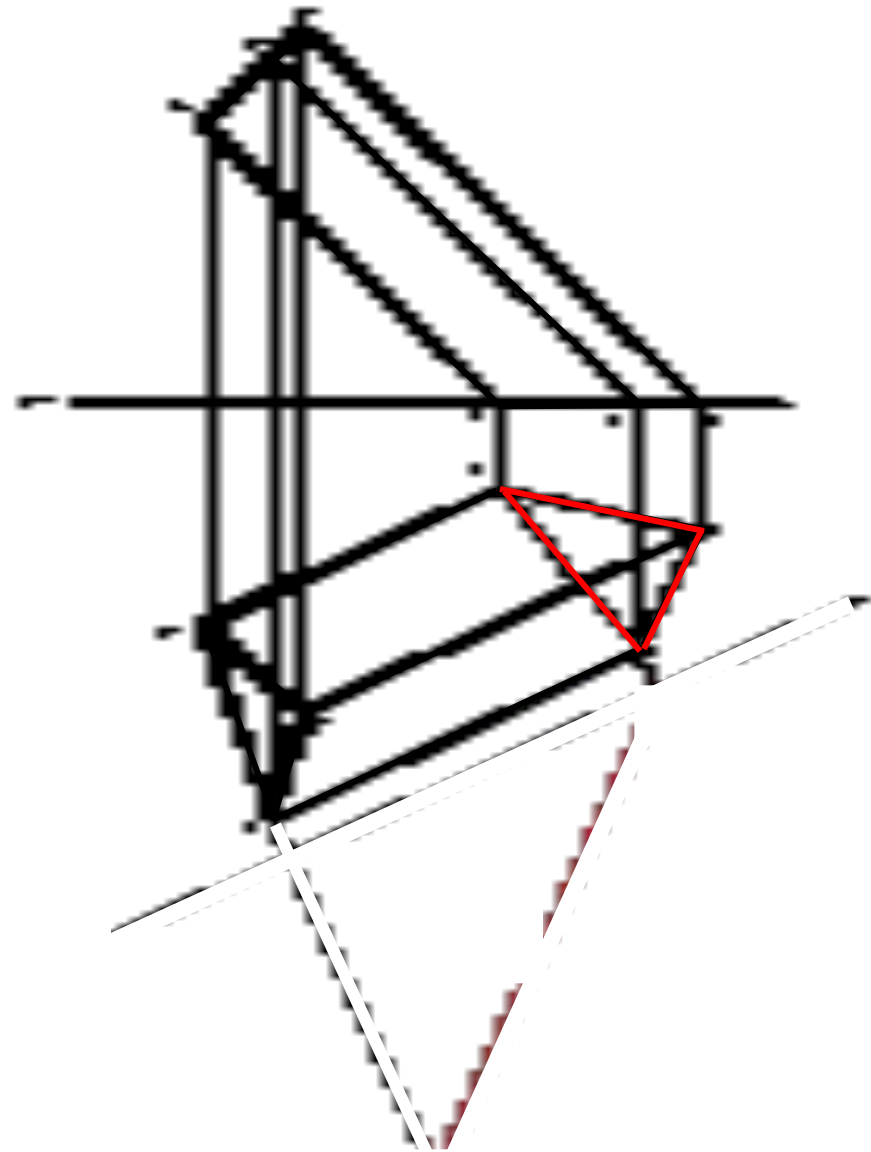
(курсовая работа: лист по теме
«Поверхности»)

- **Эпюр 2:** На листе формата А3 самостоятельно задать чертеж (фасад и план) **усечённой поверхности** пирамиды (основание-многоугольник: 4 и более сторон) **или** конуса. Построить развертку.

Построение развертки призмы

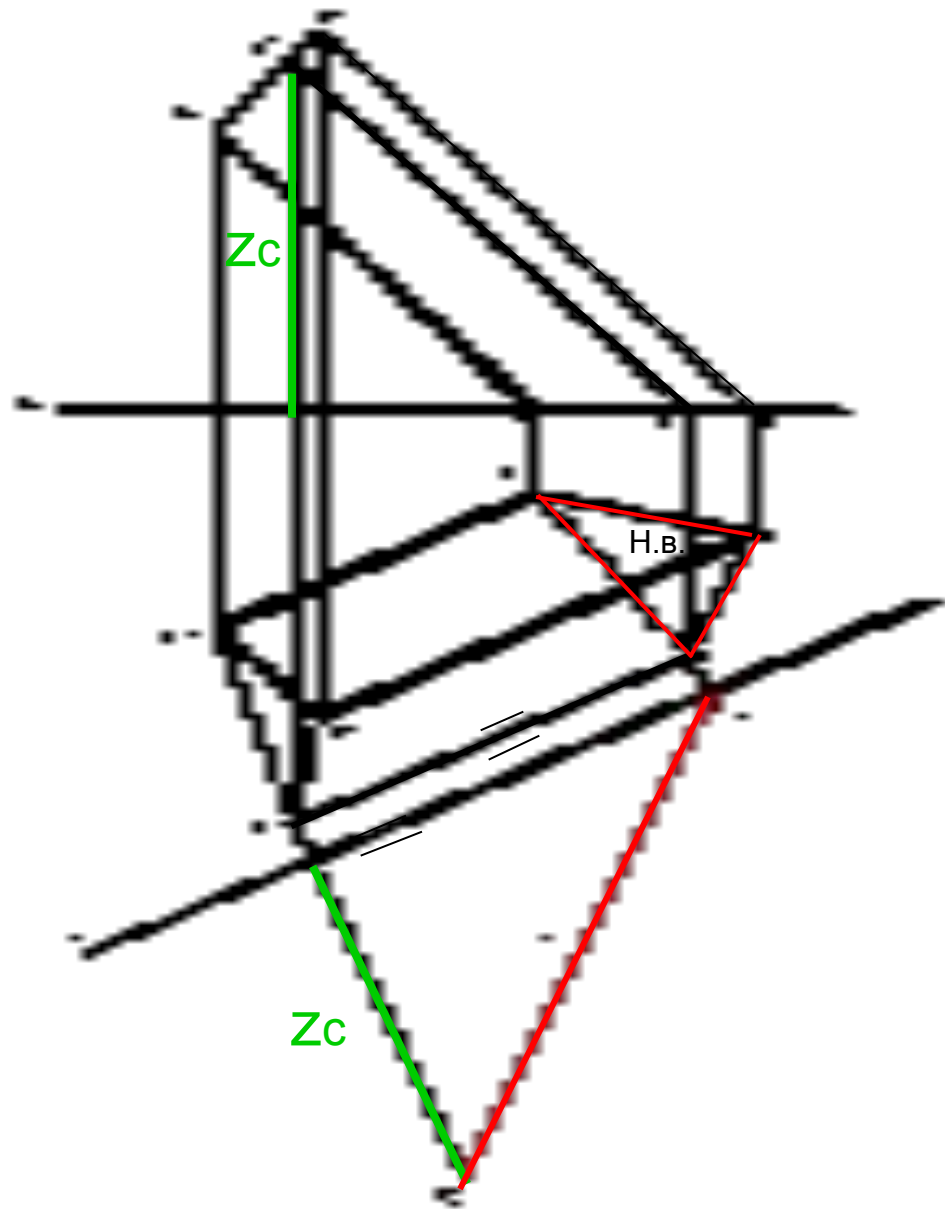
Задача: Построить развертку наклонной призмы с основанием $\triangle ABC$

Решение: $\triangle ABC$ основания призмы расположен в плоскости Π_1 , поэтому проекция $\triangle A_1B_1C_1$ является **натуральной величиной**

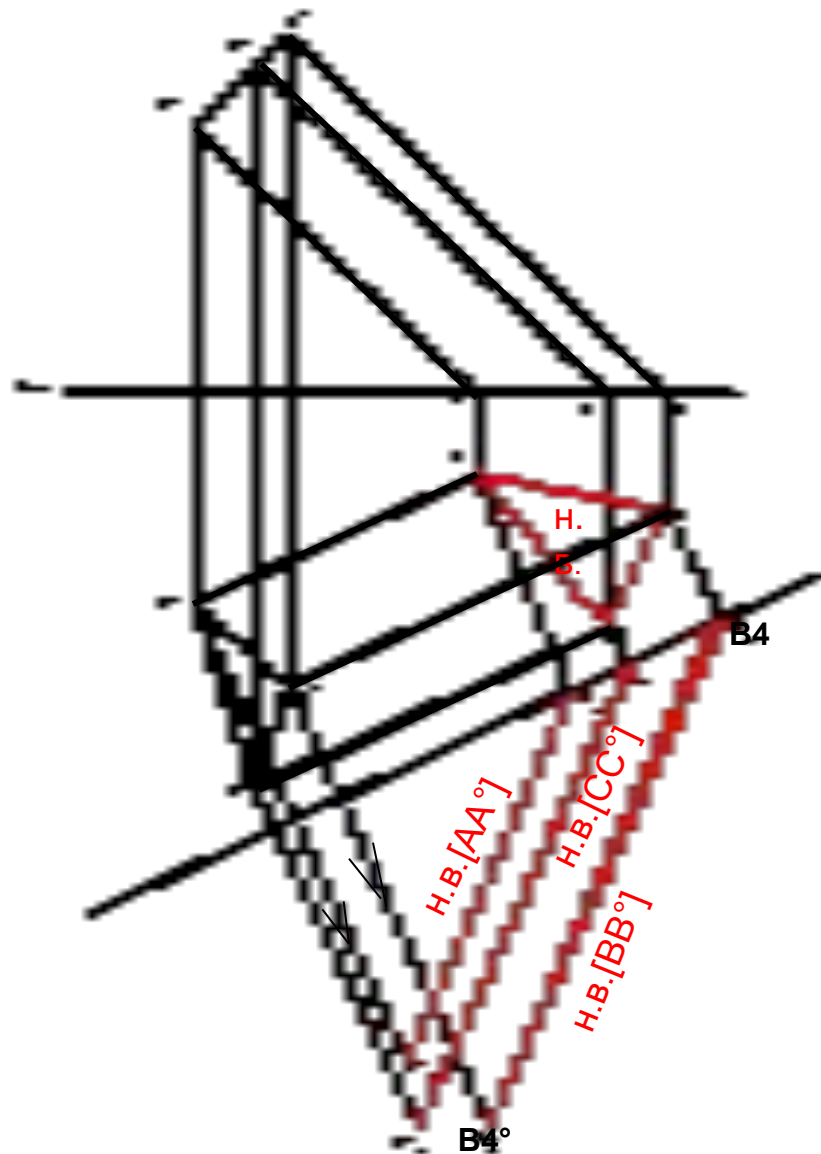


Наклонные ребра призмы – параллельные прямые общего положения. Целесообразно применить метод замены плоскостей проекций для определения **натуральной величины** этих прямых.

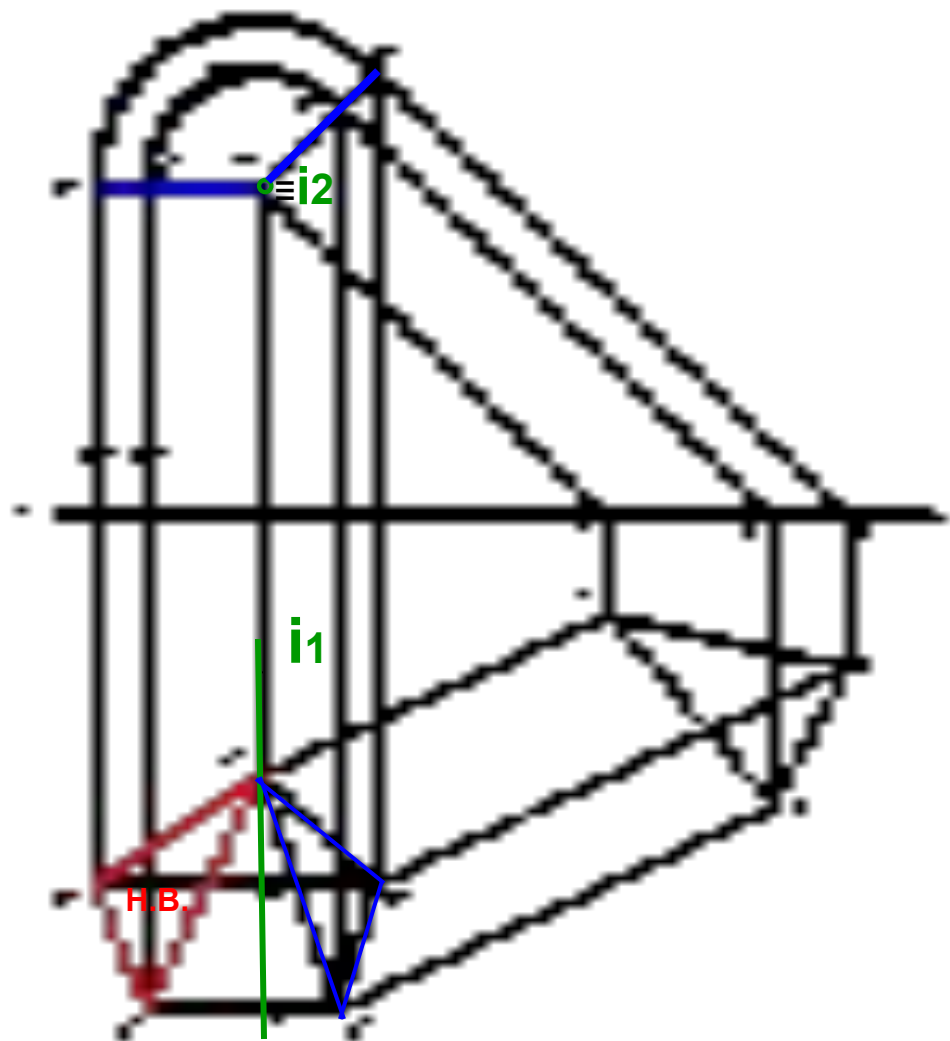
Достаточно заменить плоскость П2 на новую П4, параллельную наклонным ребрам, и они все отразятся на нее в натуральную величину. Новая ось $X_{1,4} \parallel C_1C_1^\circ$. Начнем с ребра CC°
 $[C_4C_4^\circ] = \text{н.в.} [CC^\circ]$.



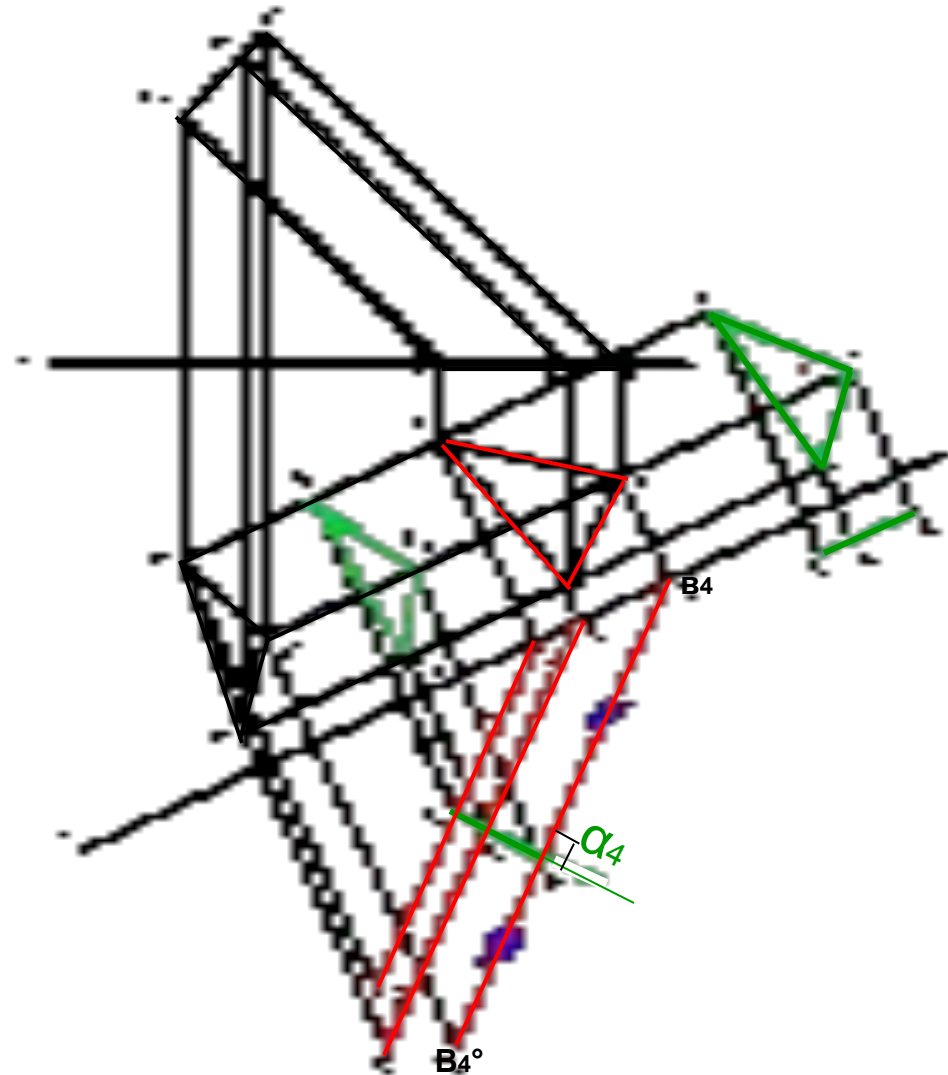
Находим проекции точек А и В на П4
(A_4, B_4 находятся на оси $X_{1,4}$, т.к.
нижнее основание призмы
принадлежит П1). Т.к. ребра
параллельны, проекции $A_4A_4^\circ$ и $B_4B_4^\circ$
параллельны $C_4C_4^\circ$ и являются
натуральными величинами
ребер $[AA^\circ]$ и $[BB^\circ]$.



Т.к. **верхнее основание** является фронтально-проецирующим, используем для нахождения натуральной величины метод вращения вокруг фронтально-проецирующей оси i , проходящей через $(.)A$ ($i_2 \equiv A_2^\circ$). Развернем $- A_2^\circ B_2^\circ C_2^\circ$ в положение, параллельное плоскости Π_1 (на чертеже параллельно оси $X_{1,2}$). На Π_1 получим **натуральную величину** $\triangle A^\circ B^\circ C^\circ$ ($\triangle A_1^\circ B_1^\circ C_1^\circ$).



Далее используем метод нормального (перпендикулярного) сечения, т.к. наклонные ребра расположены к основанию $\triangle ABC$ под углом, величина которого неизвестна. Зададим в любом месте на Π_4 срез плоскостью α_4 , перпендикулярно н.в. наклонных ребер (142434). Методом плоско-параллельного перемещения определим натуральную величину нормального сечения $\triangle 1'2'3'$. Для чего переместим $142434 \parallel X_{1,4}$ и по линиям связи найдем проекции точек на Π_1 : $\triangle 1_1'2_1'3_1' = \text{н.в. нормального сечения}$



Порядок построения развертки.

- Развернем в линию
натуральную величину
нормального сечения

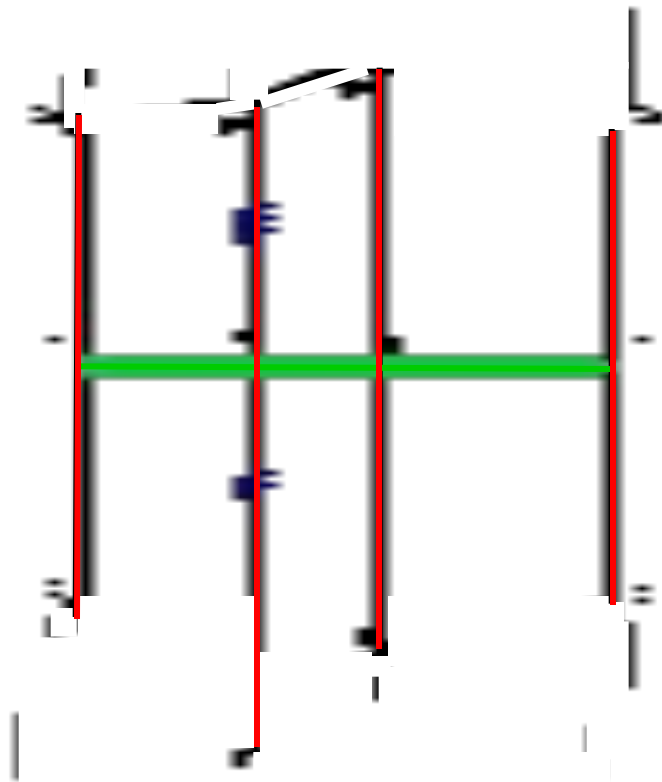
На горизонтальной линии
откладываем отрезки
[1'-2'], [2'-3'], [3'-1'].



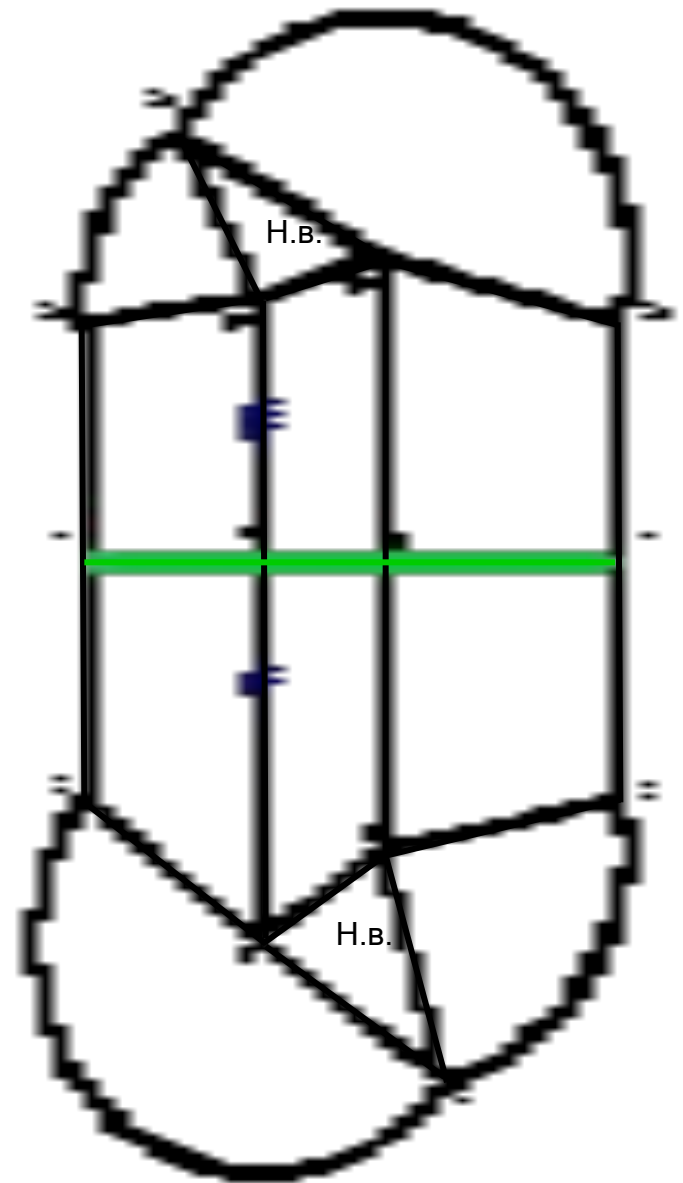
Через отмеченные точки проводим линии, перпендикулярные отрезкам и откладываем на них **натуральные величины** наклонных ребер призмы.

Вниз от нормального сечения откладываем отрезки [1_4A_4], [2_4B_4], [3_4C_4].

Вверх от нормального сечения откладываем отрезки [$1_4A_4^\circ$], [$2_4B_4^\circ$], [$3_4C_4^\circ$], измеряя данные отрезки на П4

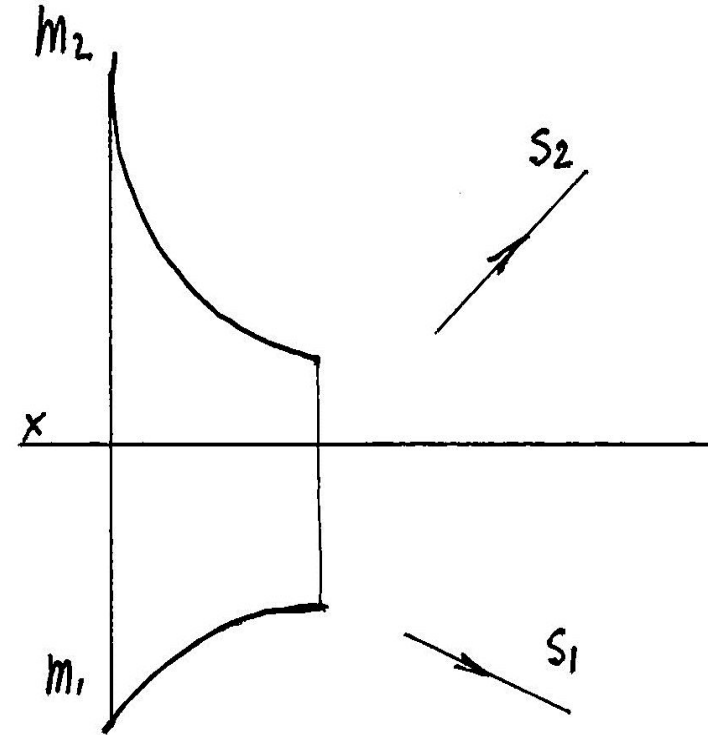
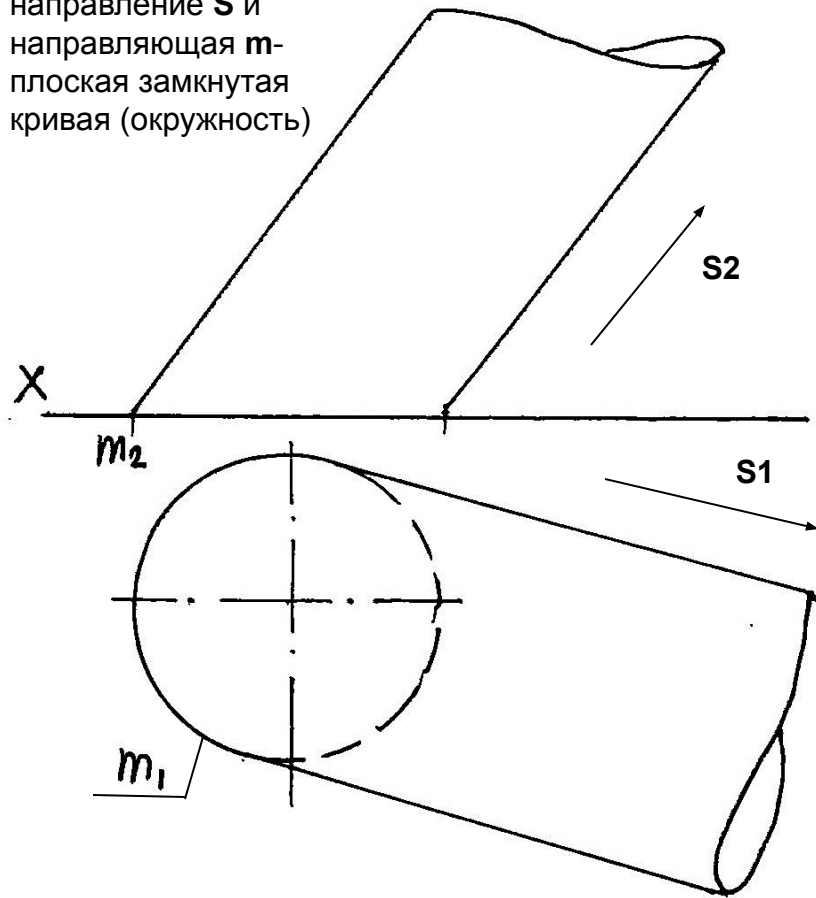


Получим развертку боковых граней призмы. С помощью засечек строим верхнее и нижнее основания призмы, измеряя **натуральные величины оснований** на П1



Построение развертки цилиндра

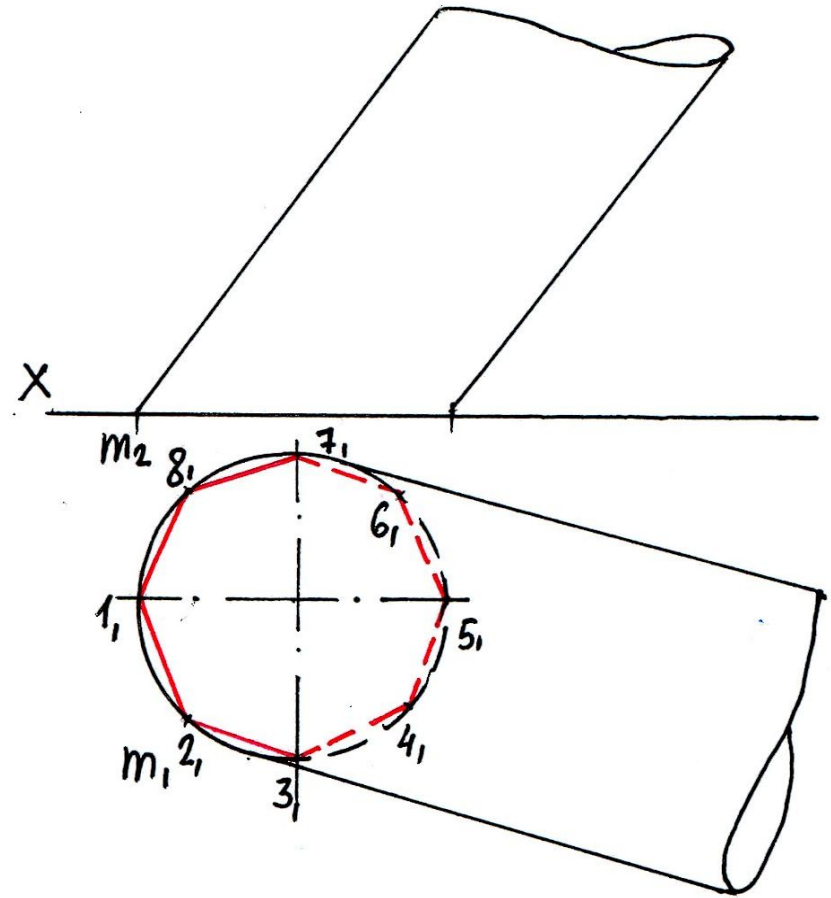
Определитель:
направление S и
направляющая m -
плоская замкнутая
кривая (окружность)



Определитель: направление S и направляющая m -
пространственная не замкнутая кривая

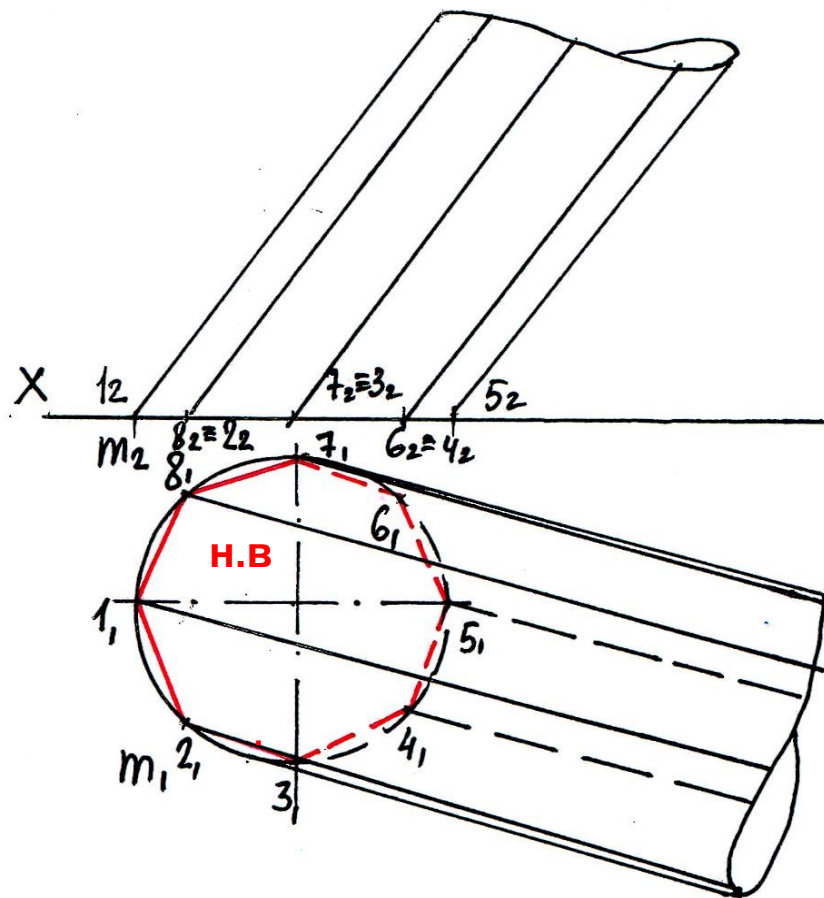
Построение развертки цилиндра с плоской кривой направляющей

- Впишем в цилиндр n -угольную призму. Для этого основание цилиндра разделим на n частей. Чем количество n больше, тем развертка точнее.
- Если в основании цилиндра окружность, то вписываем **правильный n -угольник**



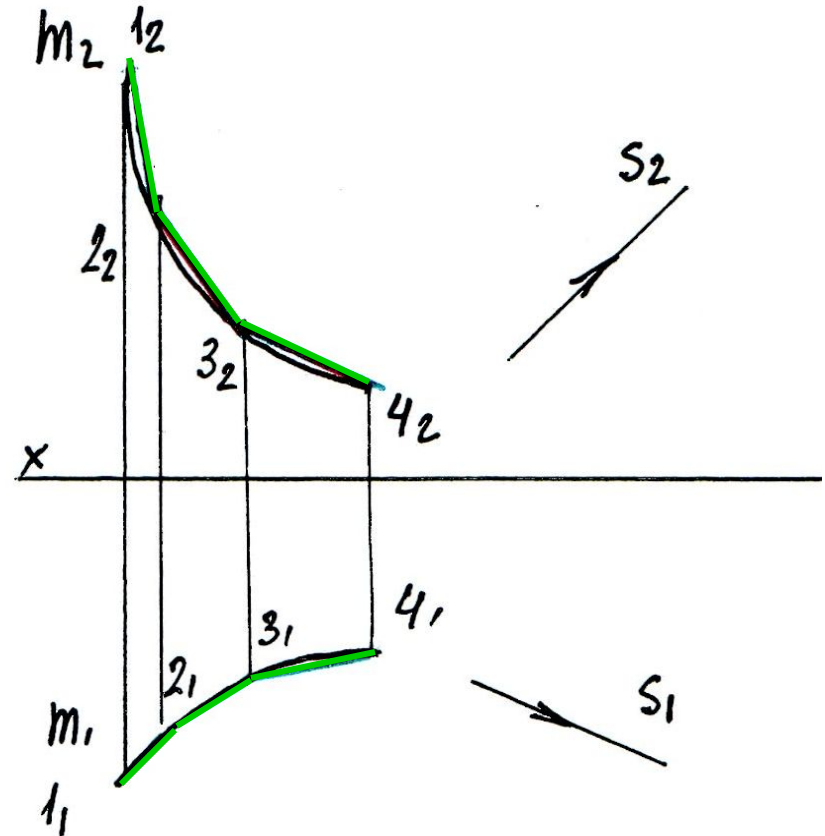
Если основание лежит на Π_1 , то оно проецируется в **натуральную величину**. Ребра вписанной в цилиндр призмы необходимо ограничить, т.е. задать верхний срез.

Остается найти **натуральные величины** верхнего основания и ребер 1-8 и построить развертку (в данном случае восьмиугольной призмы).



Построение развертки цилиндра с пространственной кривой направляющей

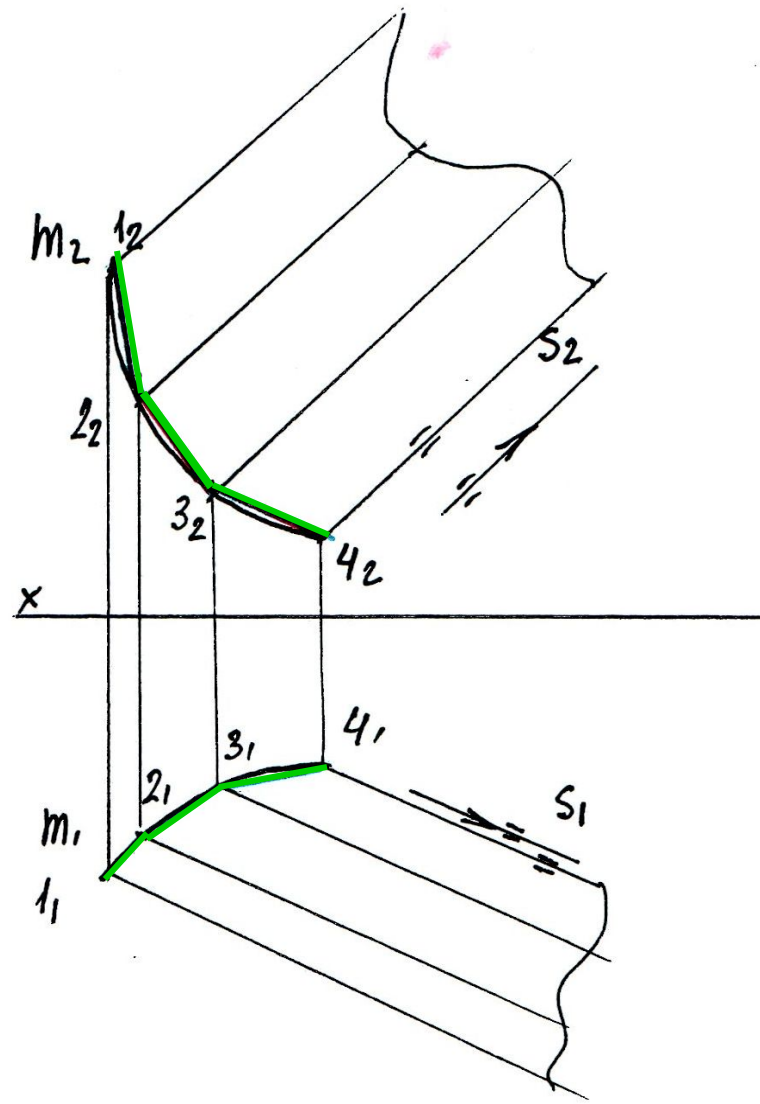
- Направляющая может быть замкнутой или разомкнутой
- Впишем в цилиндр n -угольную призму. Для этого направляющую m разделим на n частей. Чем количество n больше, тем развертка точнее.



Зададим образующие 1...4
параллельно
направлению S . В
данном примере все
образующие являются
прямыми общего
положения.

Следовательно, для
построения развертки
надо искать

натуральные величины
всех образующих (их
необходимо ограничить,
т.е. задать верхний срез
по цилиндру) и отрезков
направляющей 1-2, 2-3
и 3-4, используя методы
преобразования
плоскостей проекций
(см. развертку призмы)



Эпюр 3

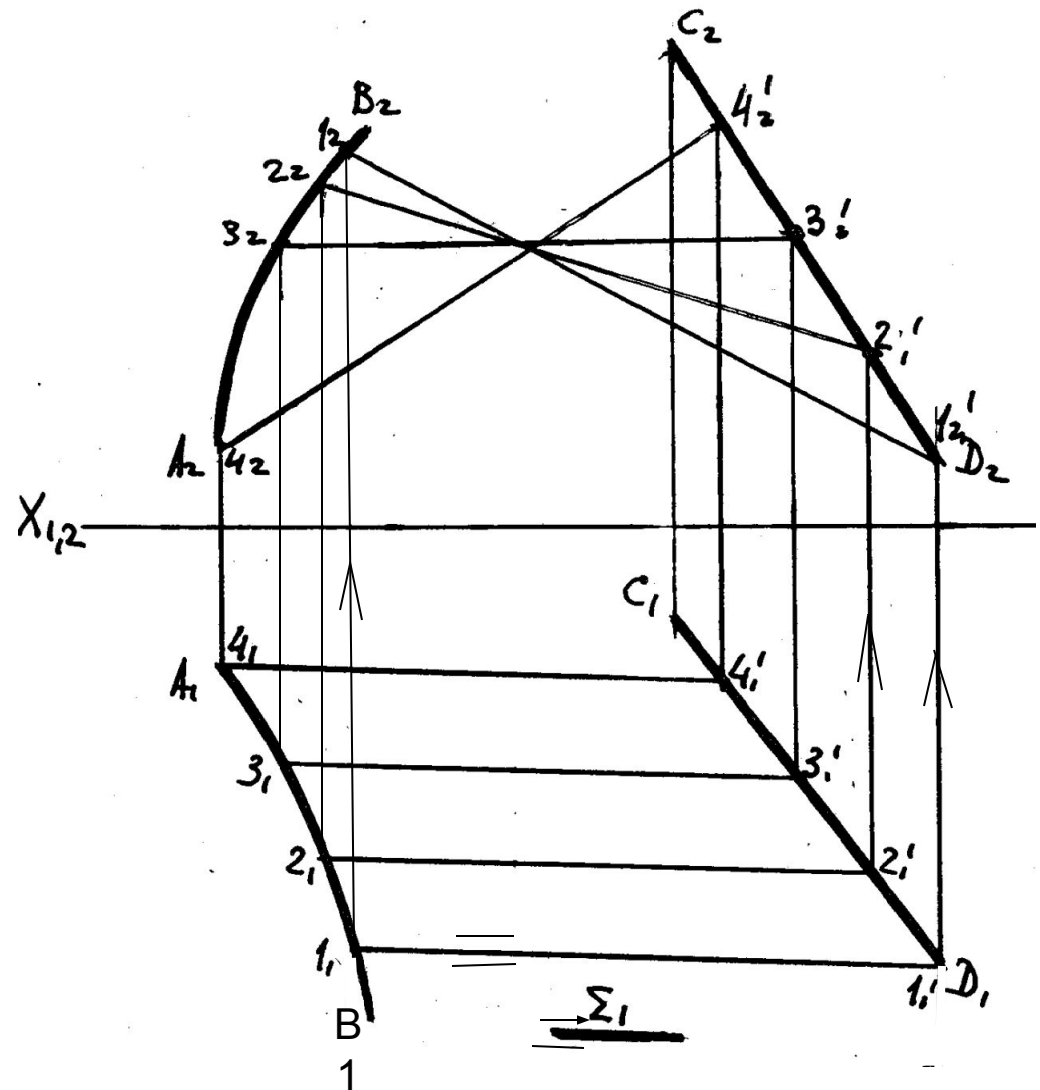
(курсовая работа: лист по теме
«Поверхности»)

- **Эпюр 3**: На листе формата А3 самостоятельно задать чертеж (фасад и план) **усечённой поверхности** призмы (основание: многоугольник 4 и более сторон) **или** цилиндра. Построить развертку.

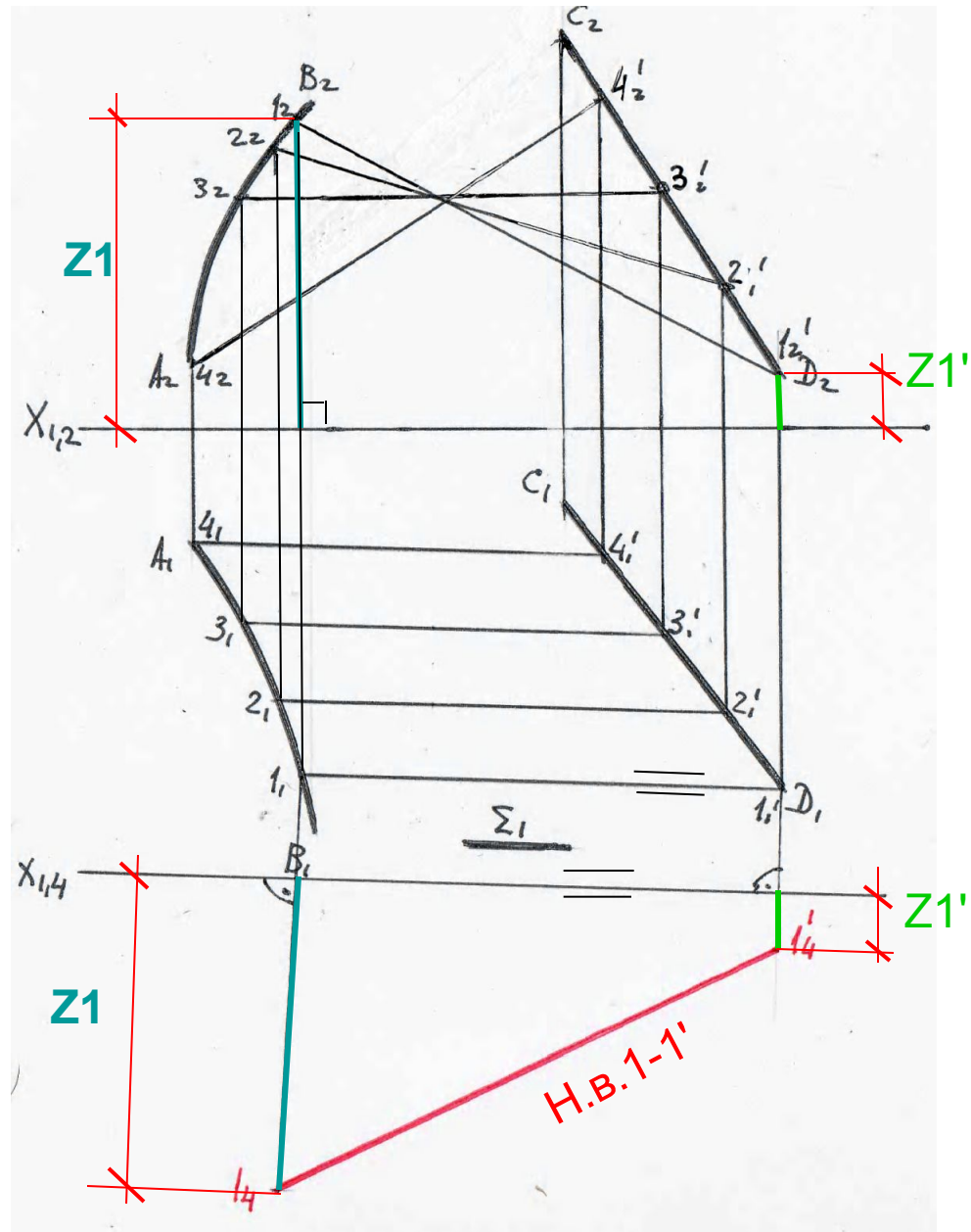
Построение развертки поверхности Каталана (коноида)

Для построения развертки поверхности Коноида необходимо найти натуральные величины всех его элементов: образующих и направляющих.

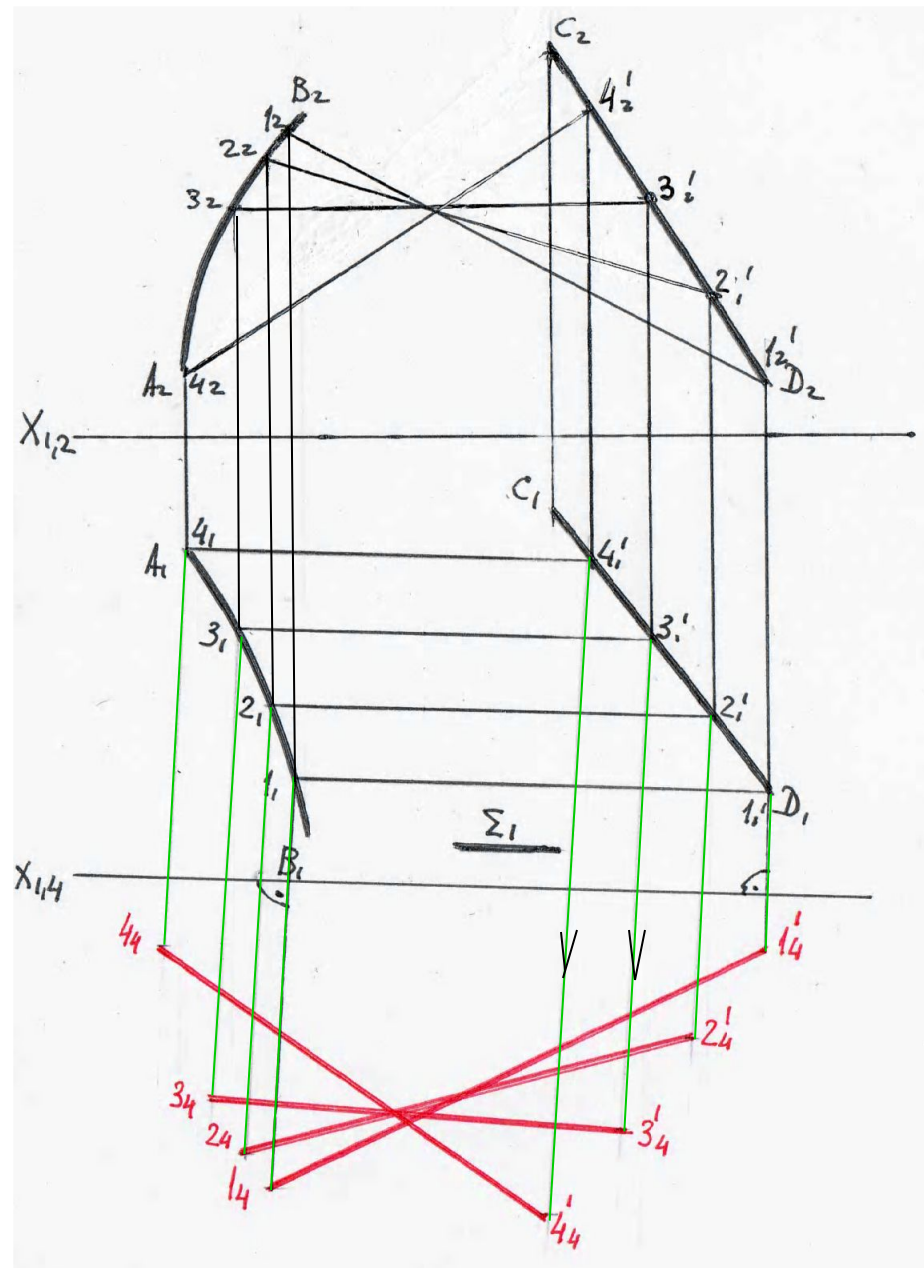
Зададим несколько отсеков поверхности, взяв их между соседними образующими.



Т.к. образующие 1-1', 2-2', 3-3' и 4-4' расположены параллельно плоскости Σ_1 , их **натуральную величину** следует искать методом замены плоскостей проекций. Заменяем плоскость П2 на новую П4 $\parallel \Sigma_1$ (на чертеже новая ось $X_{1,4} \parallel \Sigma_1$). Забираем высоты точек с П2 и откладываем их по линиям связи с соответствующими горизонтальными проекциями этих точек на П4. **Проекция образующей 1-1' на П4 = натуральной величине.**



Строим
натуральные
величины всех
образующих
14-14' 44-44'

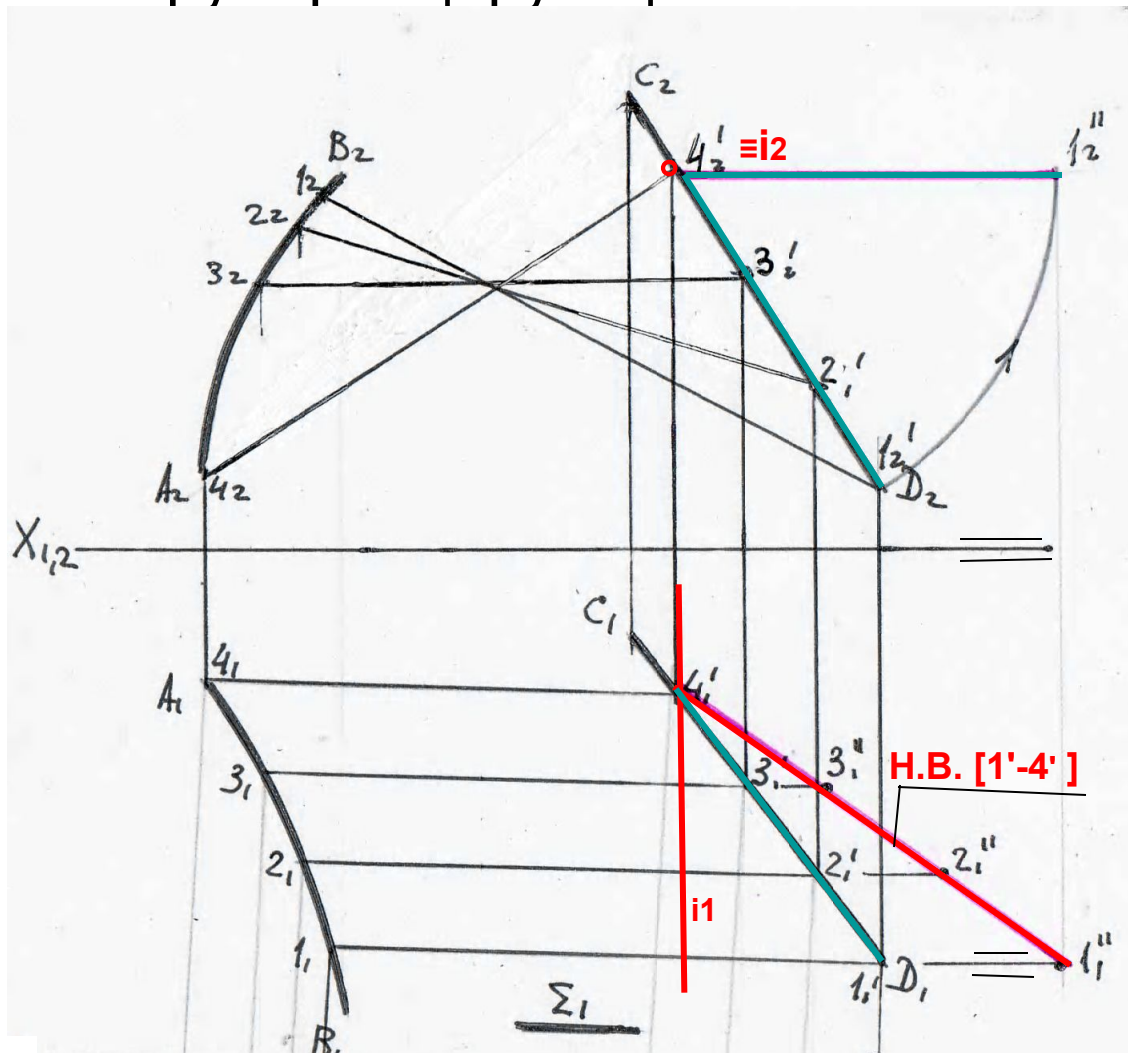


Направляющая C-D – прямая общего положения. Ее натуральную величину можно найти любым способом, например, вращением вокруг проецирующей оси

Зададим ось вращения
через (.): $i \perp \Pi_2$
($i_2 \equiv 4_2'$). Развернем
отрезок $1_2'-4_2'$ в
положение,
параллельное Π_1 .

$1_1''-4_1'' = \text{Н.В. [1-4]}$

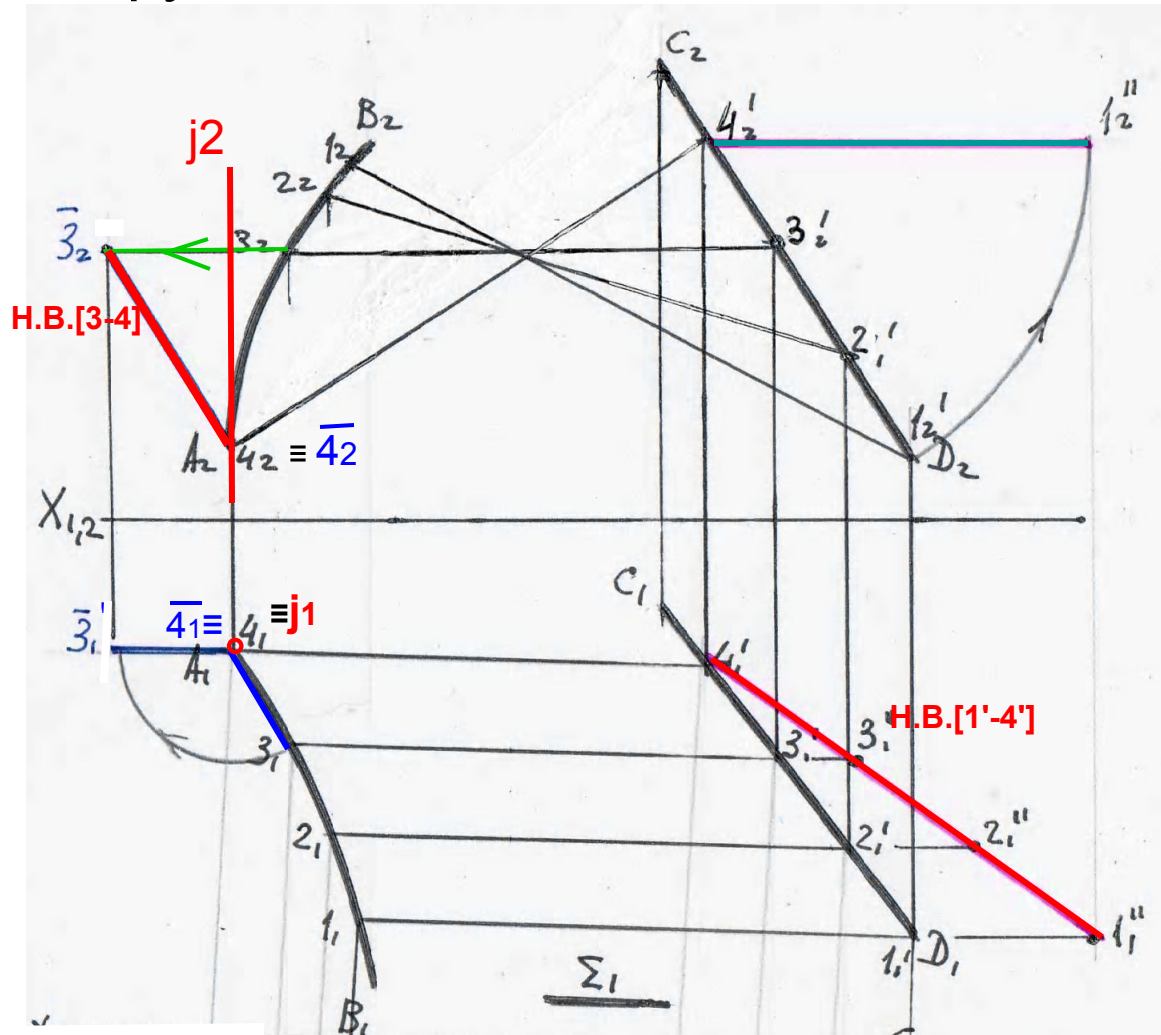
Точки $2'$ и $3'$ принадлежат
прямой $1'-4'$, поэтому на
 Π_1 их горизонтальные
проекции $2_1'$ и $3_1'$
перемещаются
параллельно оси $X_{1,2}$ в
новое положение $2_1''$ и
 $3_1''$ на **натуральную
величину [1'-4']**



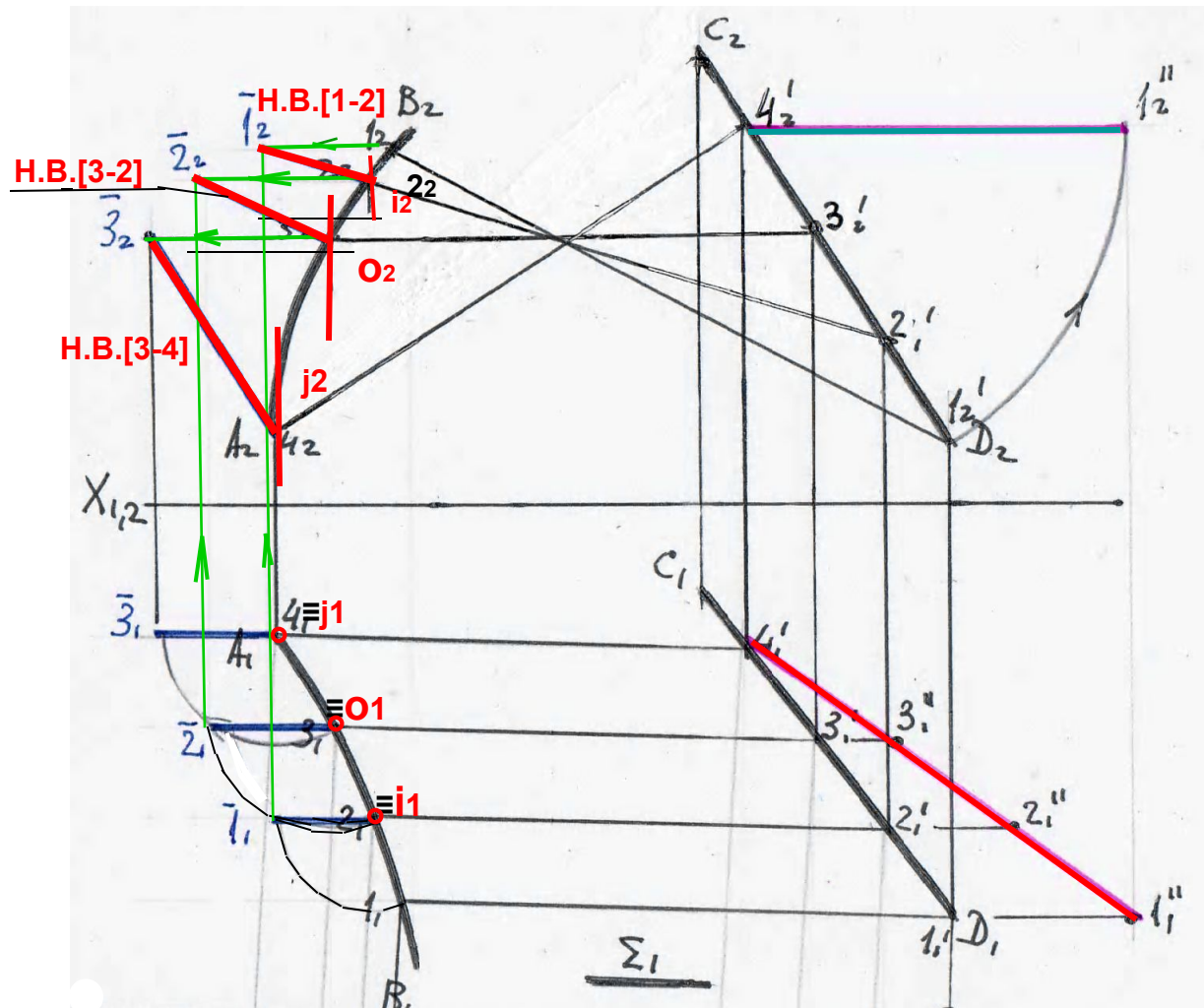
Вторая направляющая АВ – пространственная кривая.
 Каждый отрезок находим методом вращения вокруг
 проецирующих осей

Например, заменим
 дугу 3_1-4_1 на хорду
 3_1-4_1 . Развернем
 отрезок $3-4$ вокруг
 горизонтально-
 проецирующей оси j
 $(j_1 \equiv 4_1)$ в положение,
 параллельное Π_2
 (на чертеже

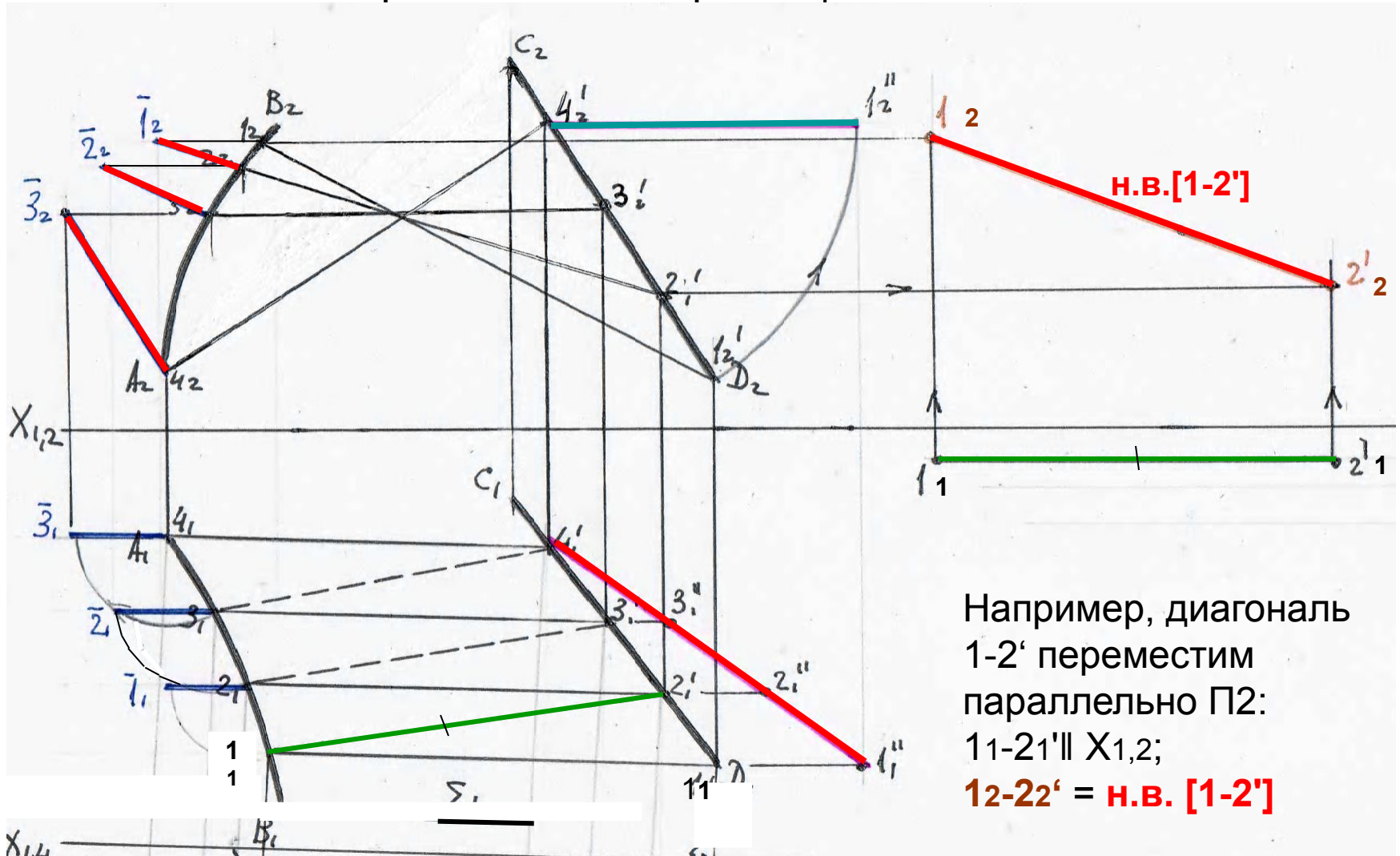
$3_1-4_1 = \bar{3}_1-\bar{4}_1$;
 $\bar{3}_1-\bar{4}_1 \parallel \text{оси } X_{1,2} \rightarrow$
 $\bar{3}_2-\bar{4}_2 = \text{Н.В.}[3-4]$



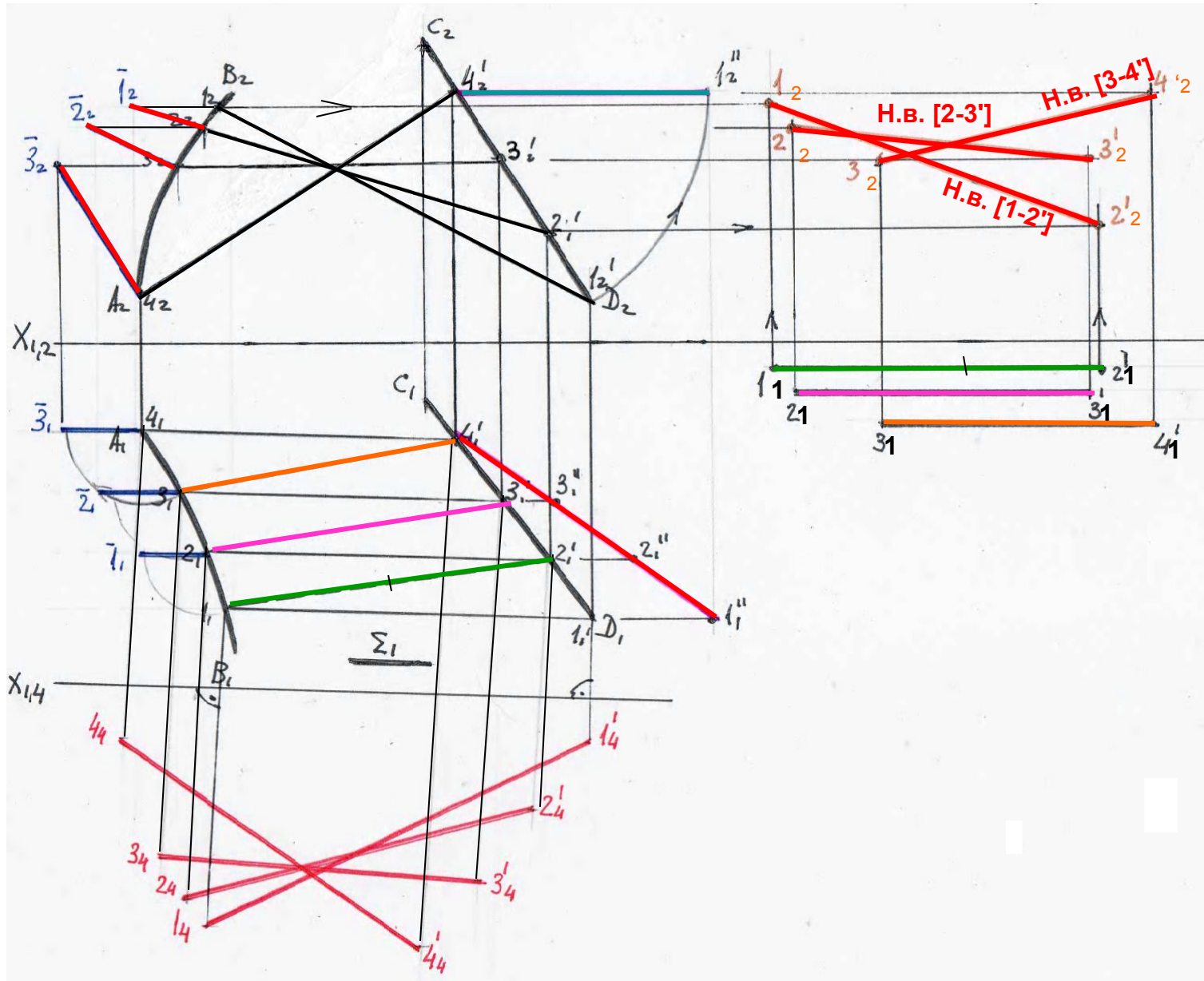
Таким же способом находим натуральные величины
отдельно каждого отрезка направляющей АВ



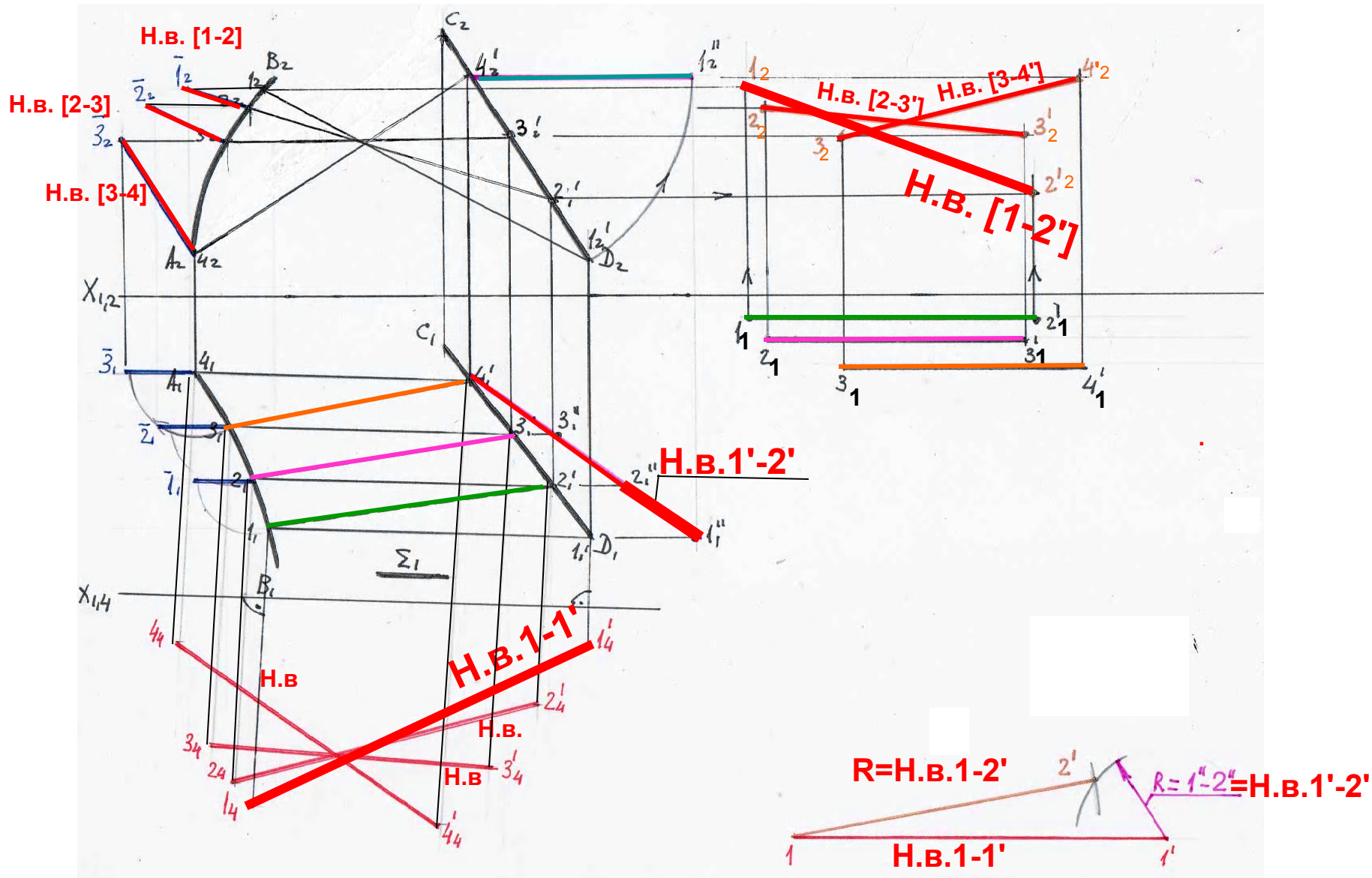
Четырехугольные отсеки, на которые была разделена поверхность, не являются плоскими. Поэтому необходимо их разделить диагоналями на треугольники и найти натуральную величину этих диагоналей. Используем метод плоско - параллельного перемещения



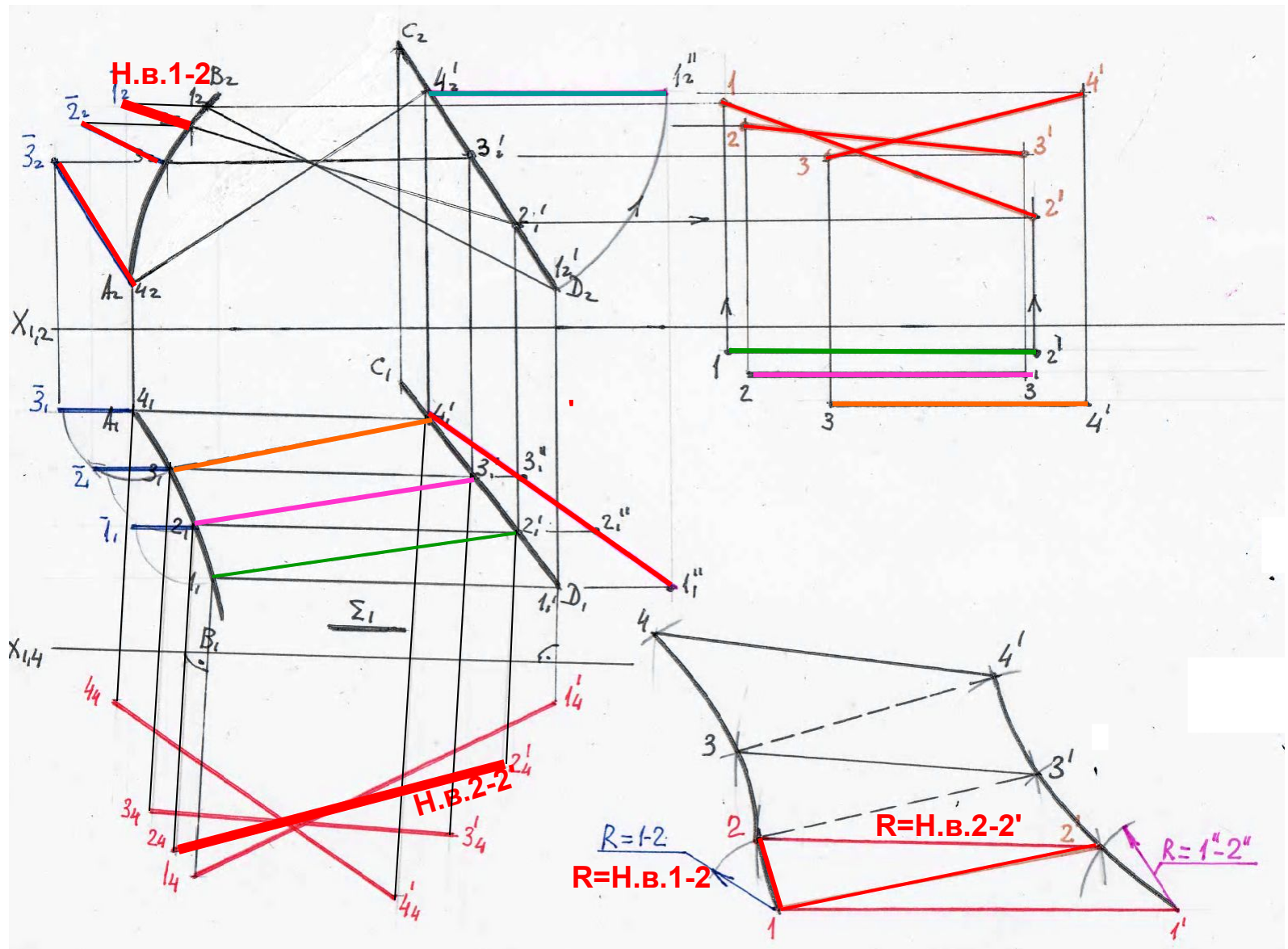
Находим натуральные величины остальных диагоналей



Строим методом триангуляции н.в. $\Delta 1-2'-1'$



Завершаем построение развертки, последовательно выстраивая следующие треугольники. Используем только **натуральные величины** найденных отрезков



Эпюр 4

(курсовая работа: лист по теме
«Поверхности»)

- **Эпюр 4:** На листе формата А3 самостоятельно задать чертеж (фасад и план) **поверхности Каталана** (цилиндронд, или коноид, или косая плоскость). Построить развертку (не менее 5-и отсеков)

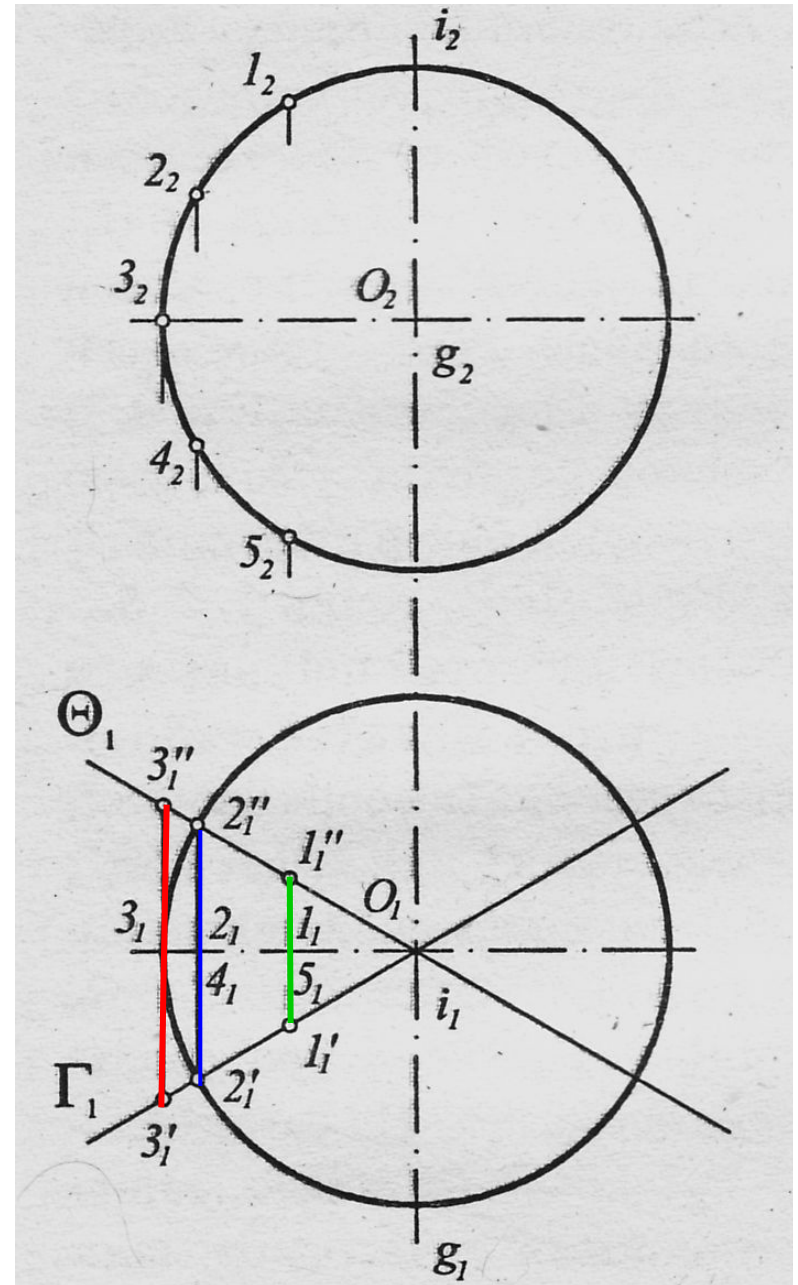
Построение развертки поверхности сферы

Сферическая поверхность не развертываемая. Сферу нельзя развернуть в плоскость без разрывов и складок. Поэтому можно построить лишь **условную развертку**.

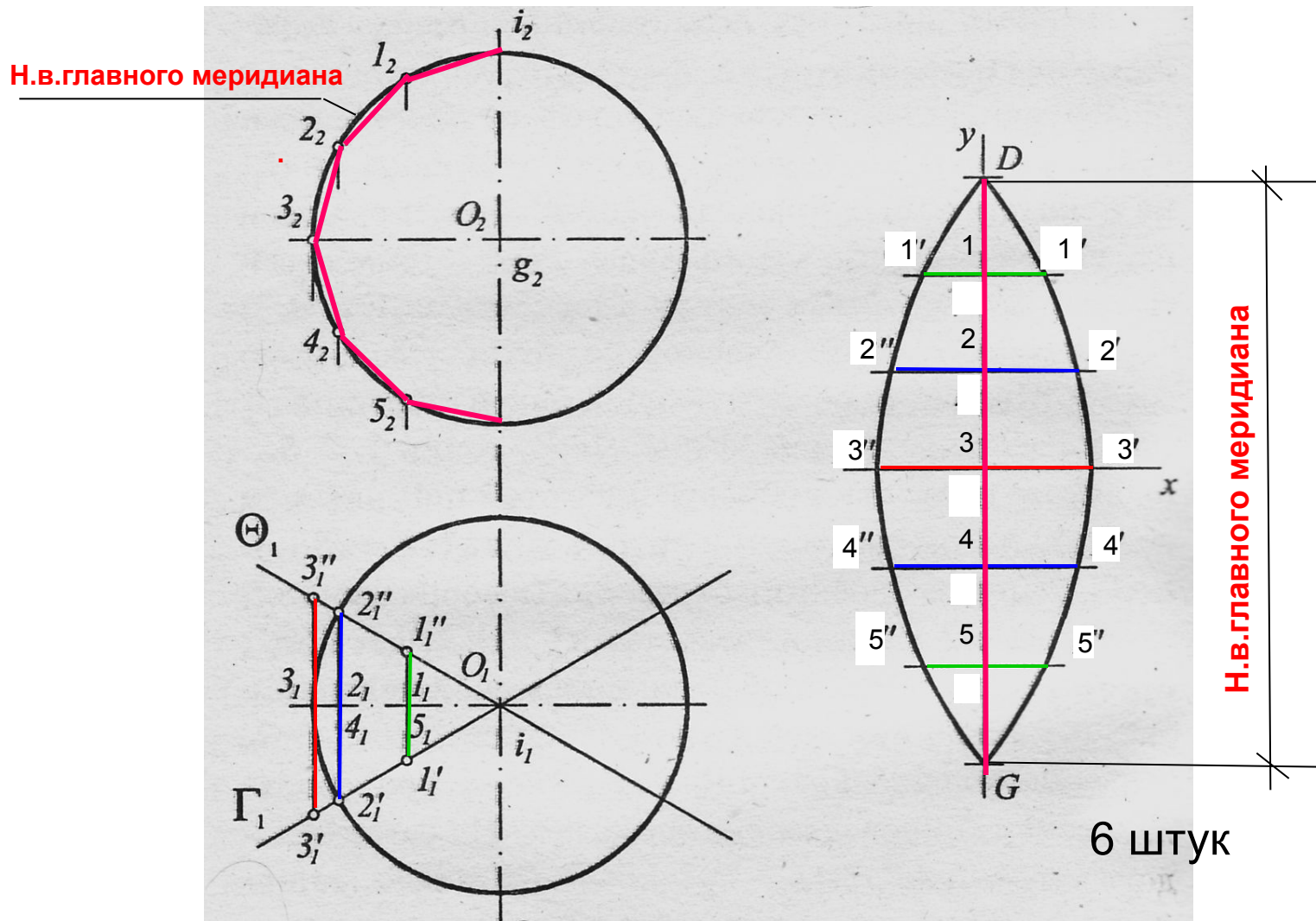
Один из способов построения развертки заключается в аппроксимации (замене) сферических элементов на цилиндрические.

Поверхность сферы разделим меридианами на части (доли). Чем количество долей больше, тем развертка точнее.

Участки поверхности, заключенные между смежными меридианами, заменяются цилиндрической поверхностью, касательной к сфере по главному меридиану.



Построим развертку одной доли. Наметим ось симметрии элемента, на которой отложим длину **главного меридиана** = н.в. Для этого разделим главный меридиан на 6 равных частей.



6 штук

В точках 1,2....5. на развертке отложим размер ширины доли, который берем с П1

Эпюр 5

(курсовая работа: лист по теме
«Поверхности»)

- **Эпюр 5:** На листе формата А3 самостоятельно задать чертеж (фасад и план) поверхности вращения (сферу не задавать!). Построить развертку: план разбить минимум на 8 частей. Криволинейные участки образующей (главный меридиан) на фасаде заменить ломаной линией, максимально приближенной к кривой образующей.