

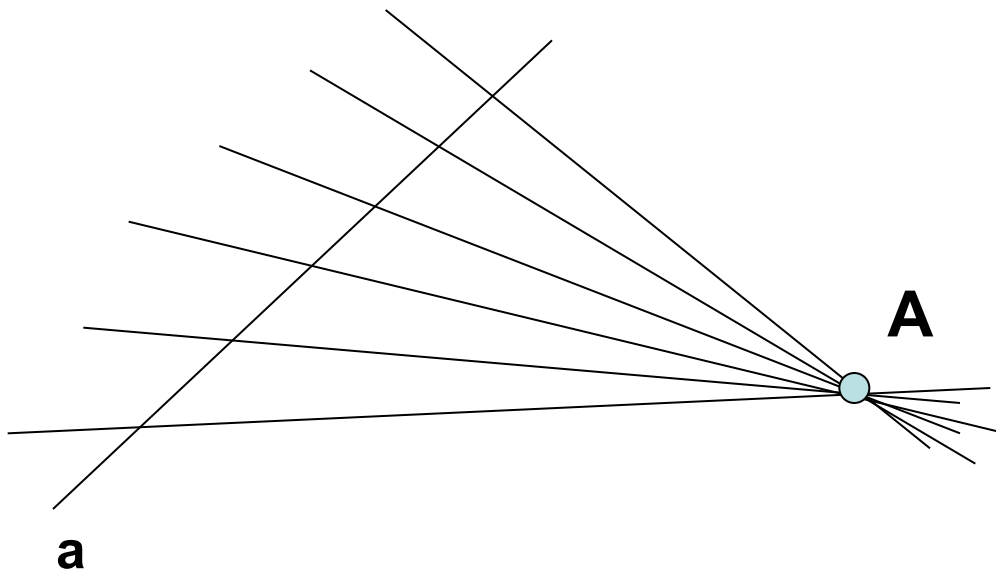
# Лекция 3. Ортогональные проекции плоскости

- Способы задания плоскости
- Плоскости общего и частного положений
- Особые линии плоскости

Лектор Стриганова Л.Ю.

# ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ ПЛОСКОСТИ

**ПЛОСКОСТЬ – МНОЖЕСТВО ПОЛОЖЕНИЙ  
ПРЯМОЙ ЛИНИИ ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ ОДНУ  
ТОЧКУ ПРОСТРАНСТВА И ПЕРЕСЕКАЮЩИХ  
ВНЕ ЕЕ ПРЯМУЮ ЛИНИЮ**



# СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ПЛОСКОСТИ

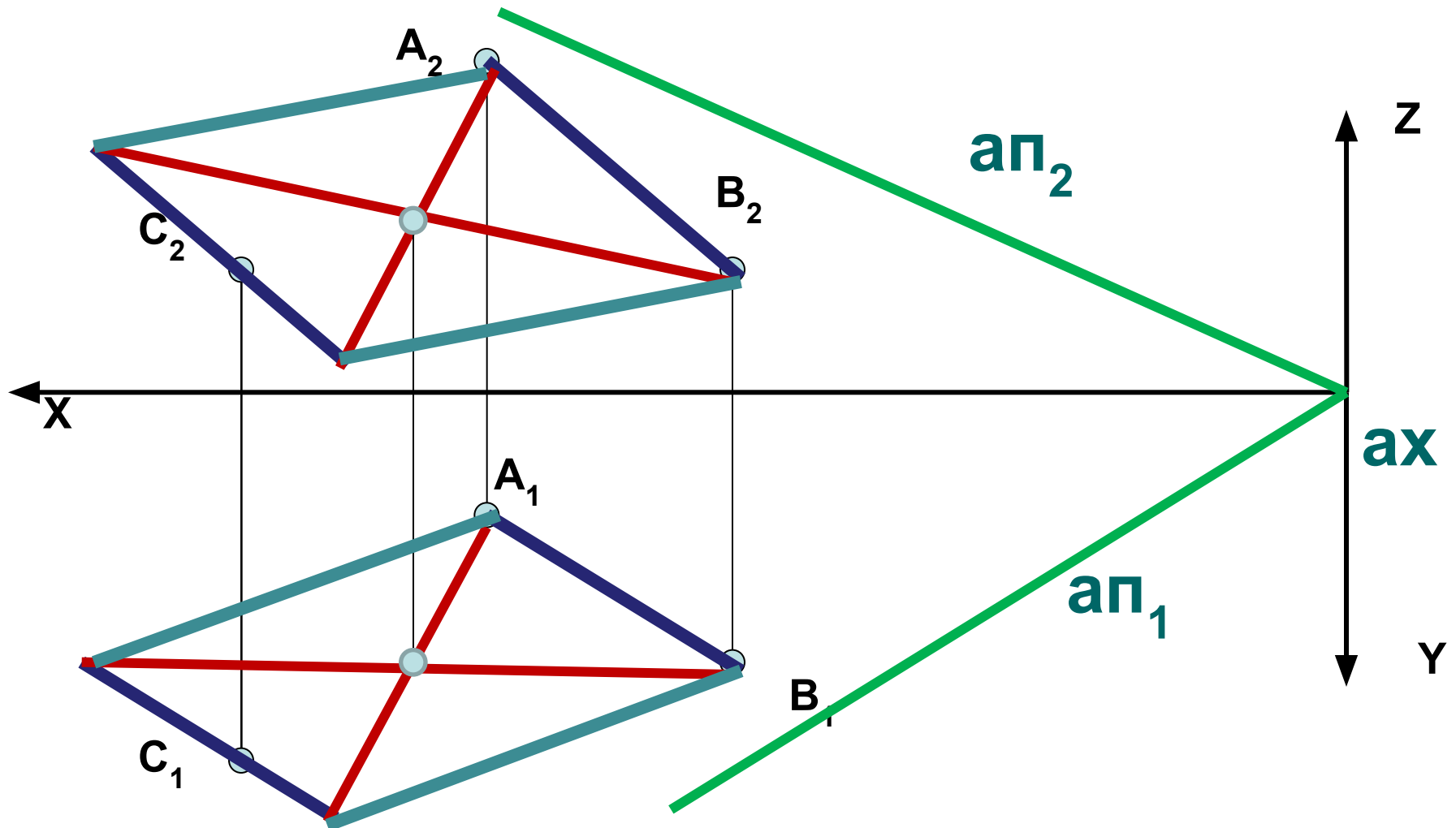
1. Аналитический способ

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

2. Графические способы

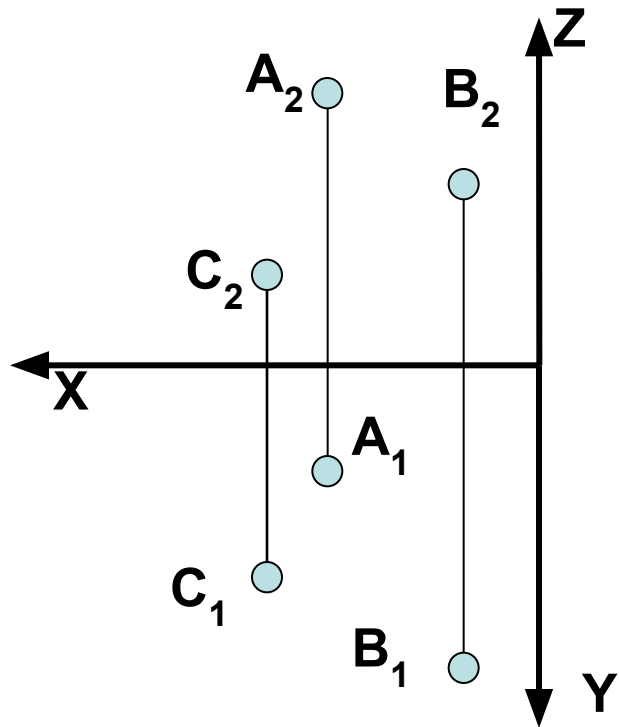
# Графические способы задания плоскости

Существуют 6 способов задания плоскости на эюре, каждый из которых последовательно переходит один в другой

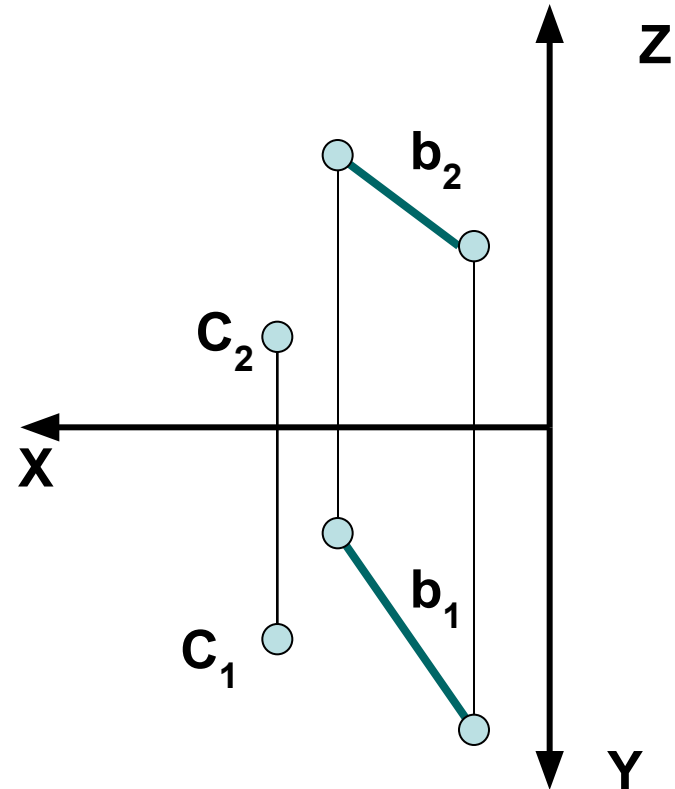


# Графические способы задания плоскости

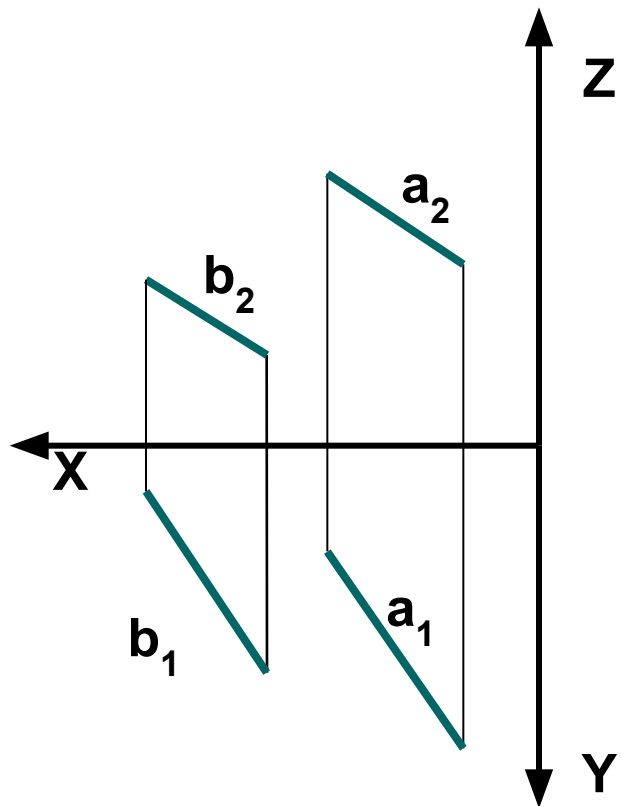
1. Три точки не принадлежащие одной прямой



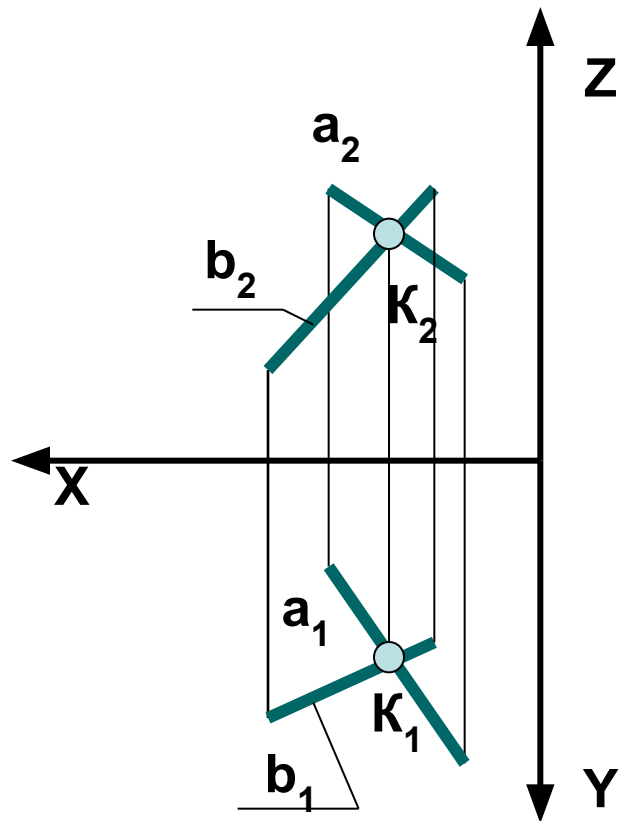
2. Прямая и точка вне этой прямой



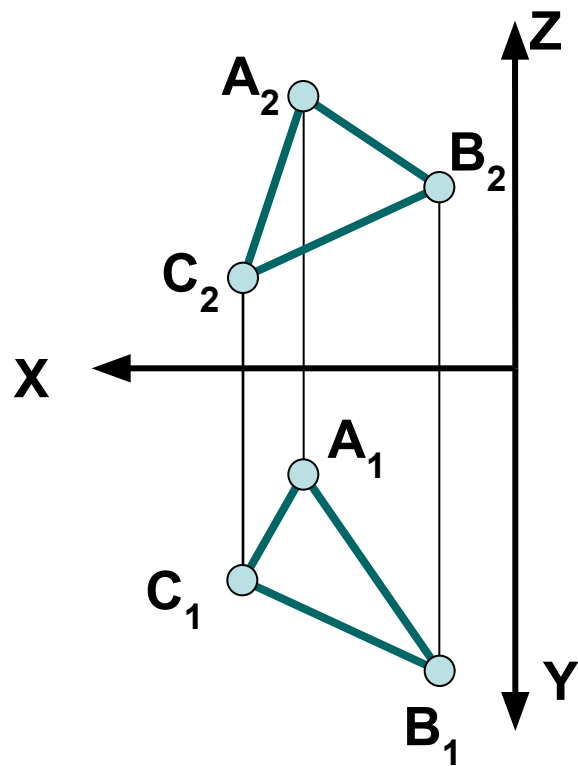
### 3. Параллельные прямые



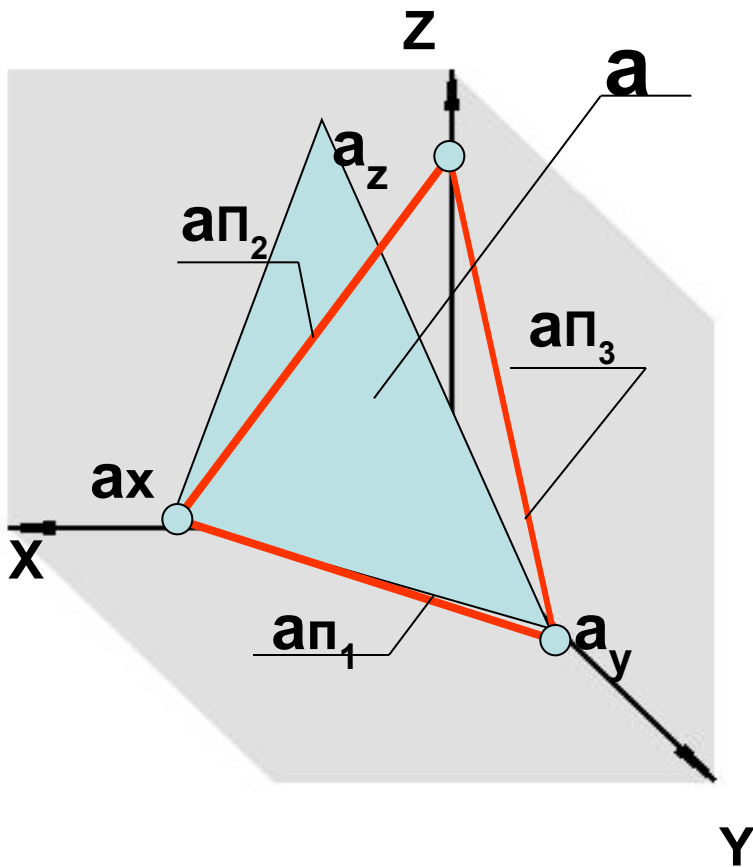
### 4. Пересекающиеся прямые



## 5. Плоская фигура



## 6. Следы плоскости – линии пересечения данной плоскости с плоскостями проекций



**а**-плоскость;

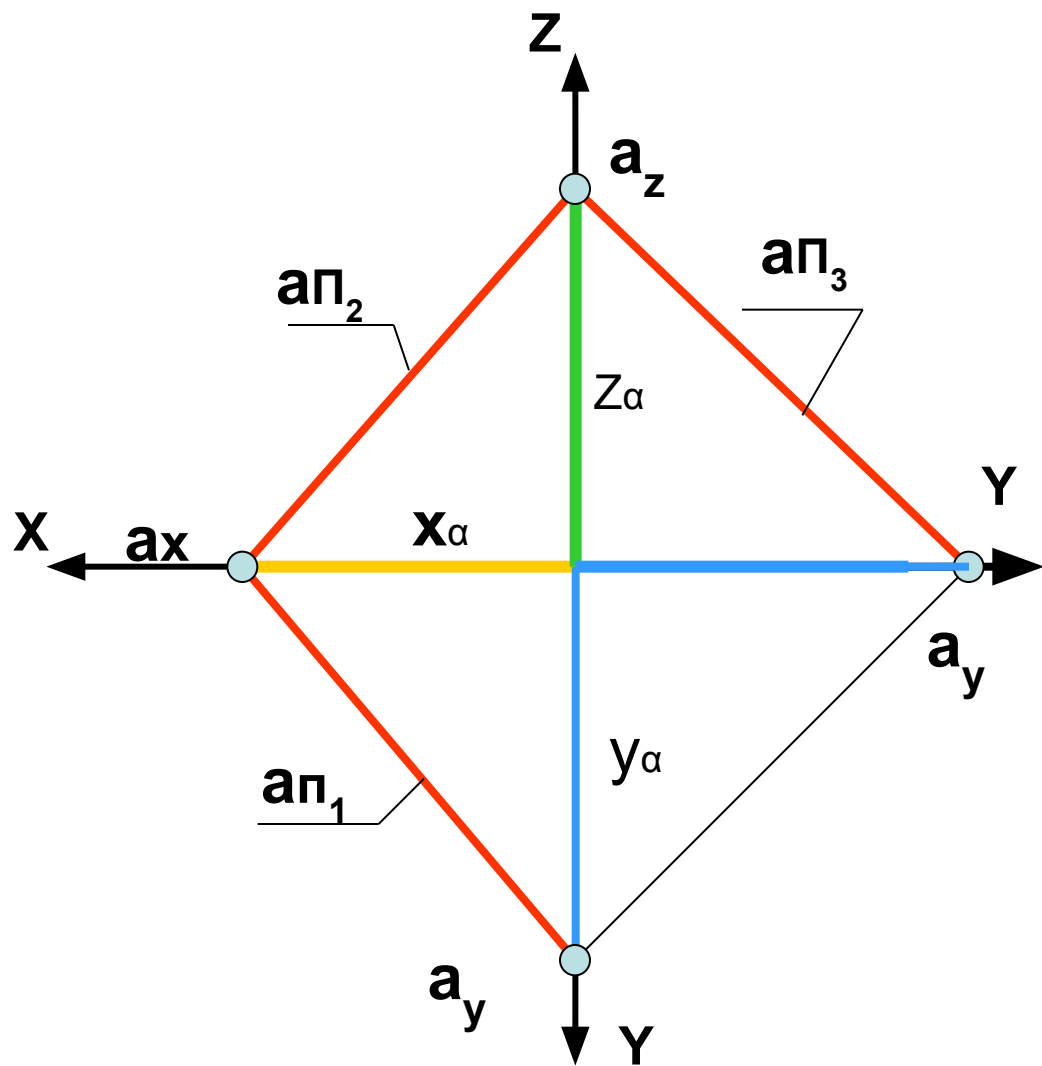
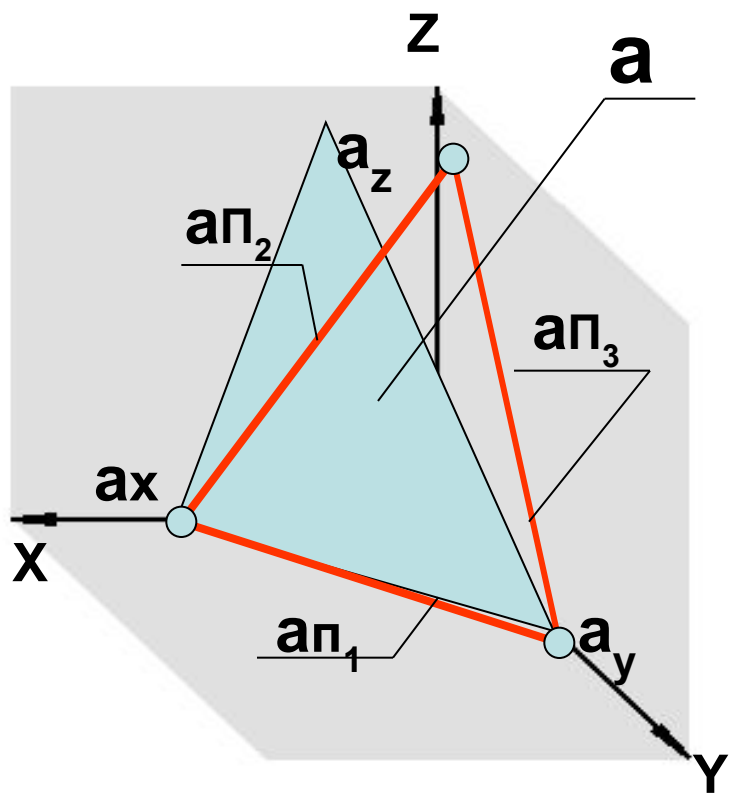
**ап<sub>1</sub>** - горизонтальный след  
плоскости **а**;

**ап<sub>2</sub>** - фронтальный след  
плоскости **а**;

**ап<sub>3</sub>** - профильный след  
плоскости **а**;

**ах, ау, аз** - точки схода следов.





# ОТНОСИТЕЛЬНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ПЛОСКОСТЕЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ПЛОСКОСТЕЙ ПРОЕКЦИЙ

1. Относительно плоскостей проекций плоскости разделяют:

- плоскости частного положения
- плоскости общего положения

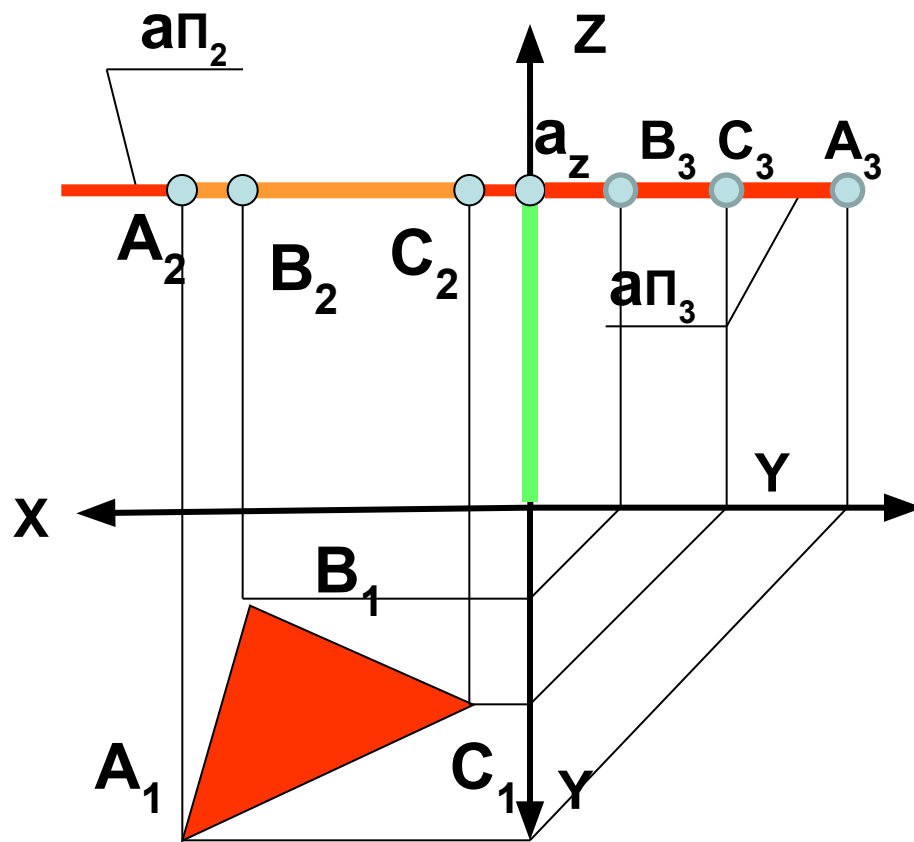
2. Плоскости частного положения разделяют:

- плоскости параллельные плоскостям проекций – **плоскости уровня**
- плоскости перпендикулярные плоскостям проекций – **плоскости проецирующие**

# ПЛОСКОСТИ ЧАСТНОГО ПОЛОЖЕНИЯ

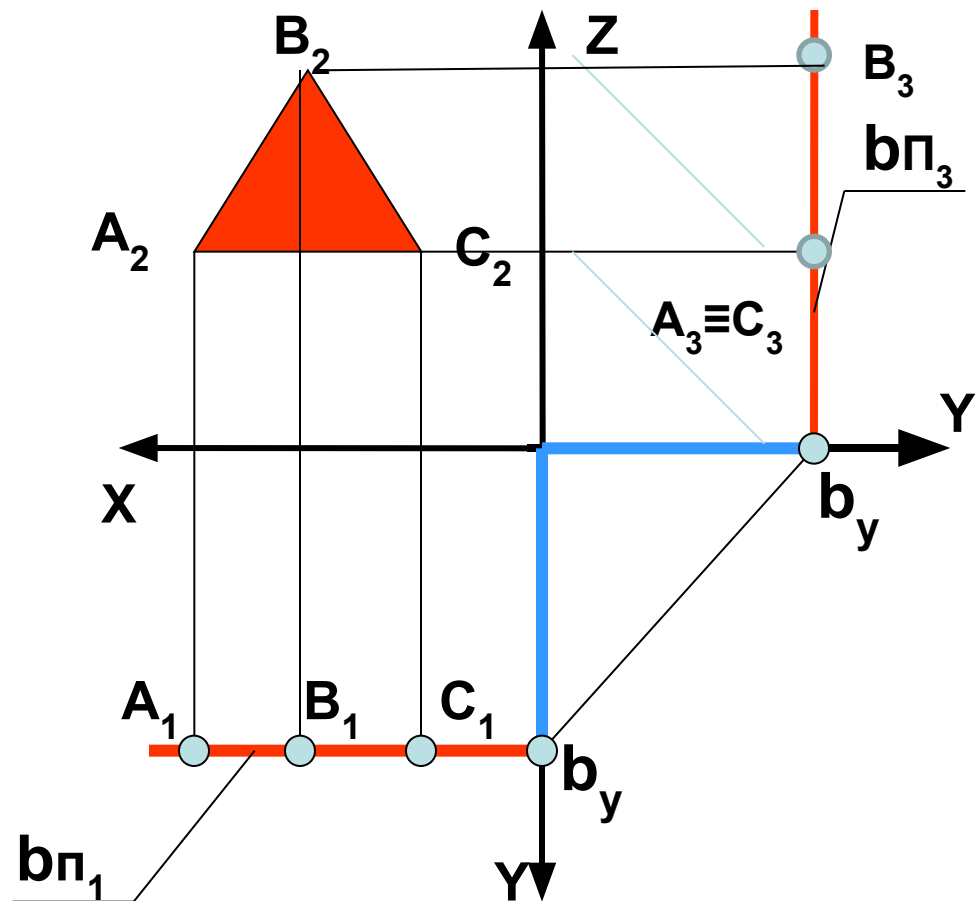
1. Плоскости уровня – это плоскости параллельные плоскостям проекций

Горизонтальная плоскость уровня  $a\parallel\Pi_1$



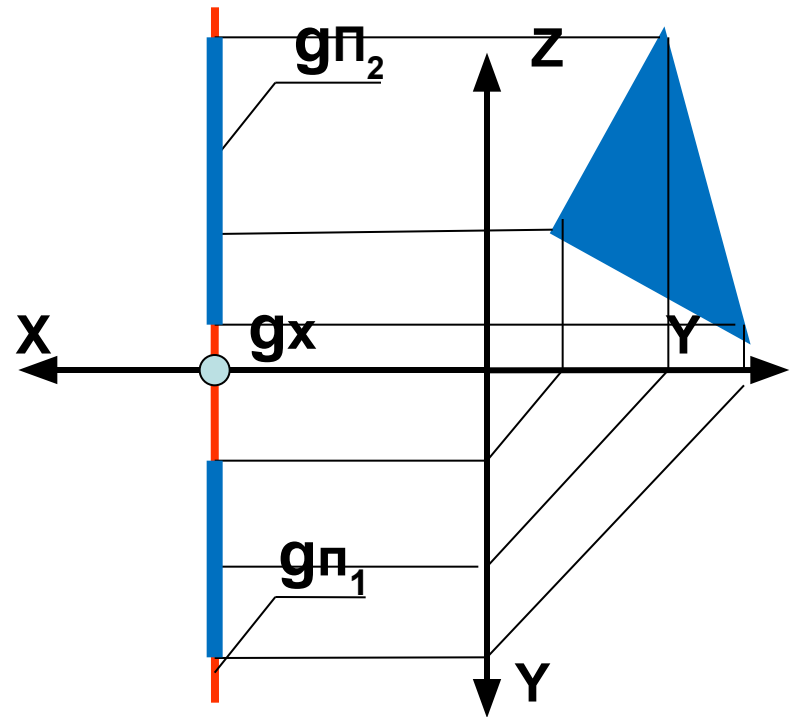
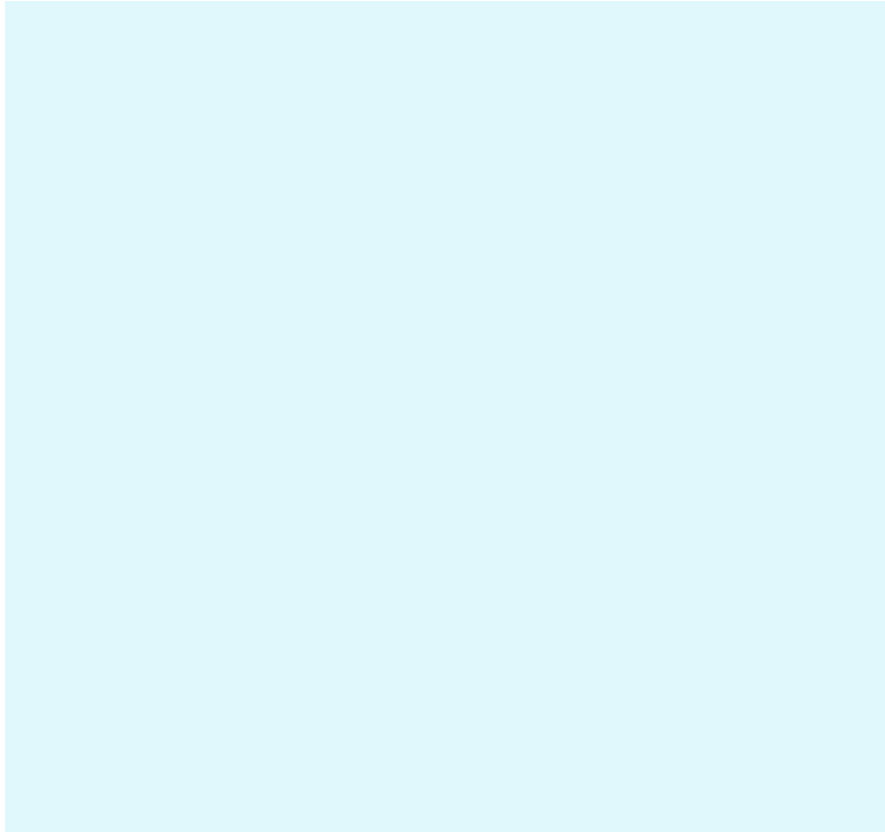
$$\triangle ABC \square \square; |ABC| = |A_1B_1C_1|$$

# Фронтальная плоскость уровня $b \parallel \Pi_2$



$\Delta ABC \square \square$ ;  $|ABC| = |A_2B_2C_2|$

# Профильная плоскость уровня $\square \square \square \Pi_3$

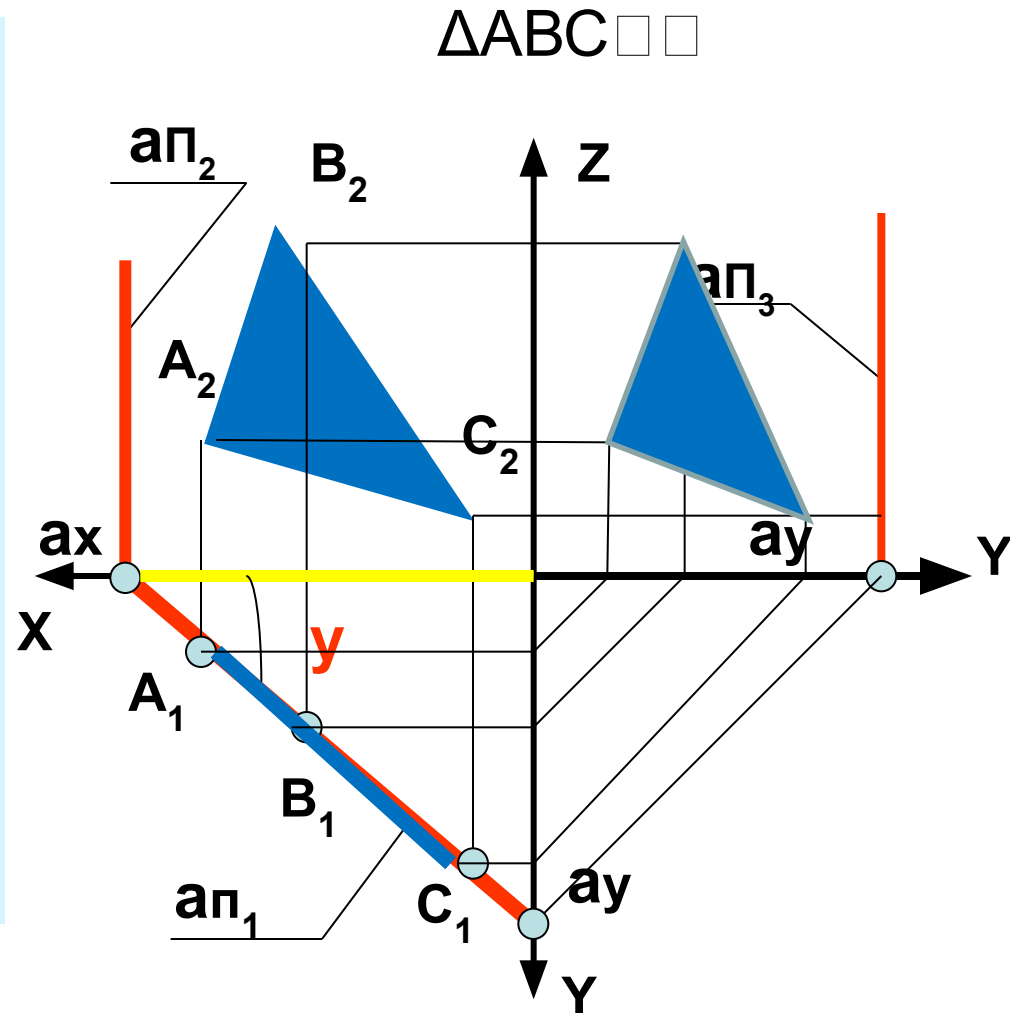


# Особенности чертежа плоскостей уровня

- Фигуры принадлежащие плоскостям уровня проецируются в натуральную величину на параллельную плоскость проекций
- На другие плоскости проекций фигуры принадлежащие плоскостям уровня проецируются в прямую линию

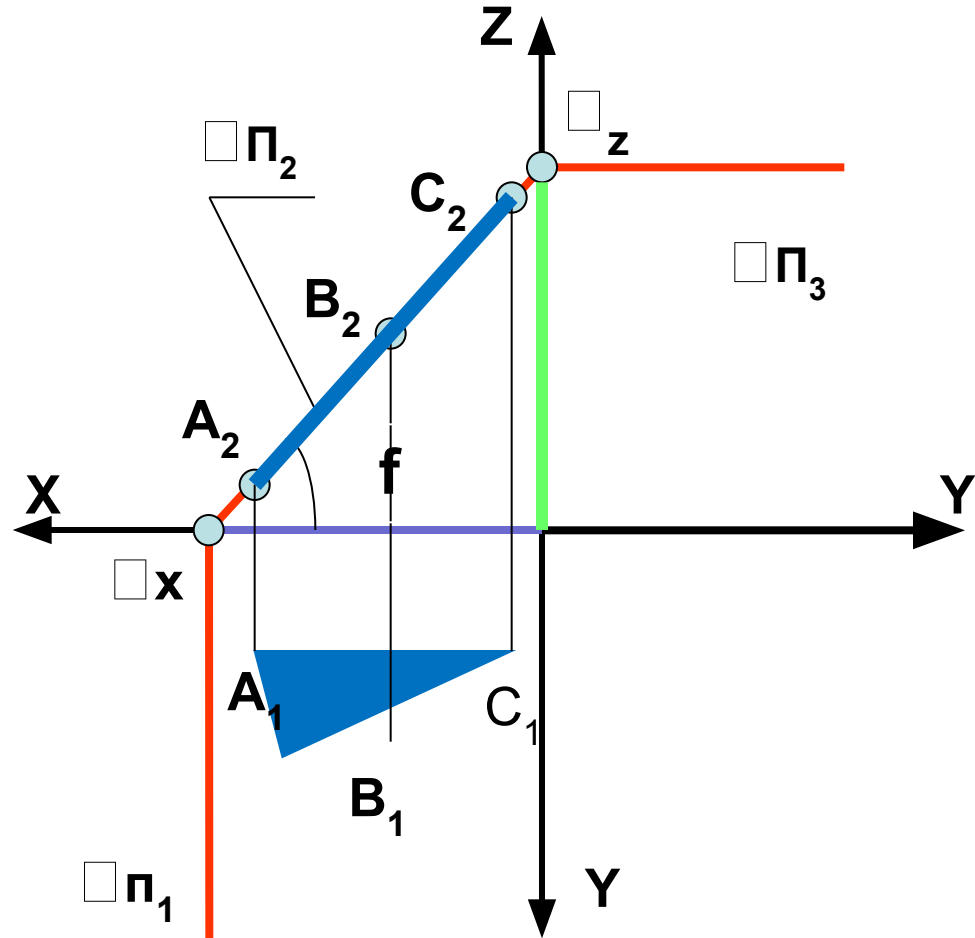
## 2. Проецирующие плоскости - это плоскости перпендикулярные плоскостям проекций

Горизонтально проецирующая плоскость  $\square \perp \Pi_1$



# Фронтально проецирующая плоскость $\perp \Pi_2$

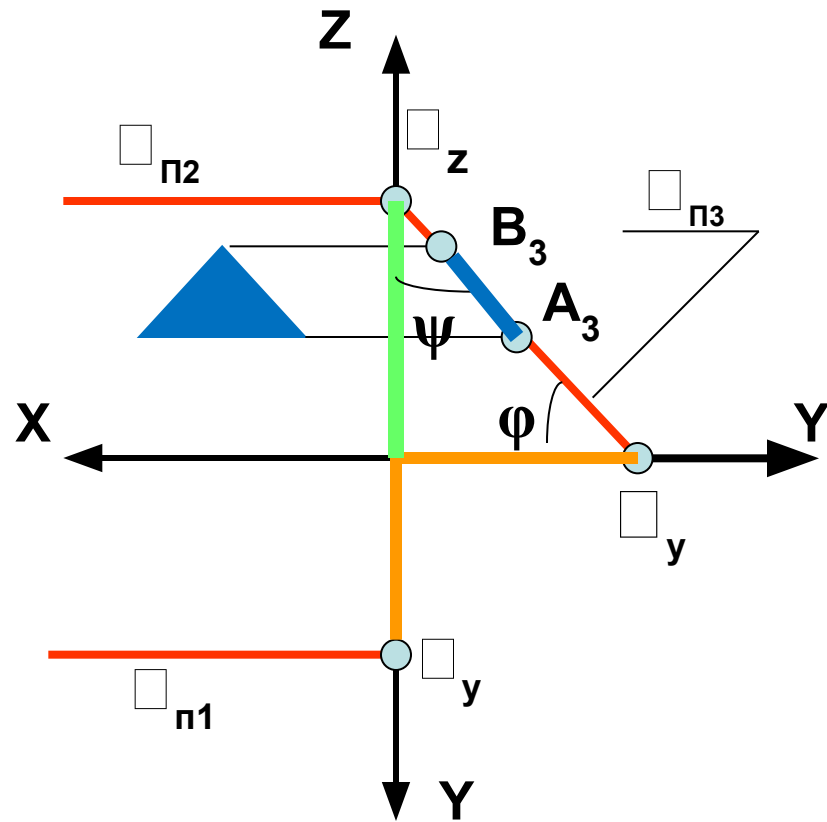
$\triangle ABC$





# Профильно проецирующая плоскость $\perp \Pi_3$

$\triangle ABC$

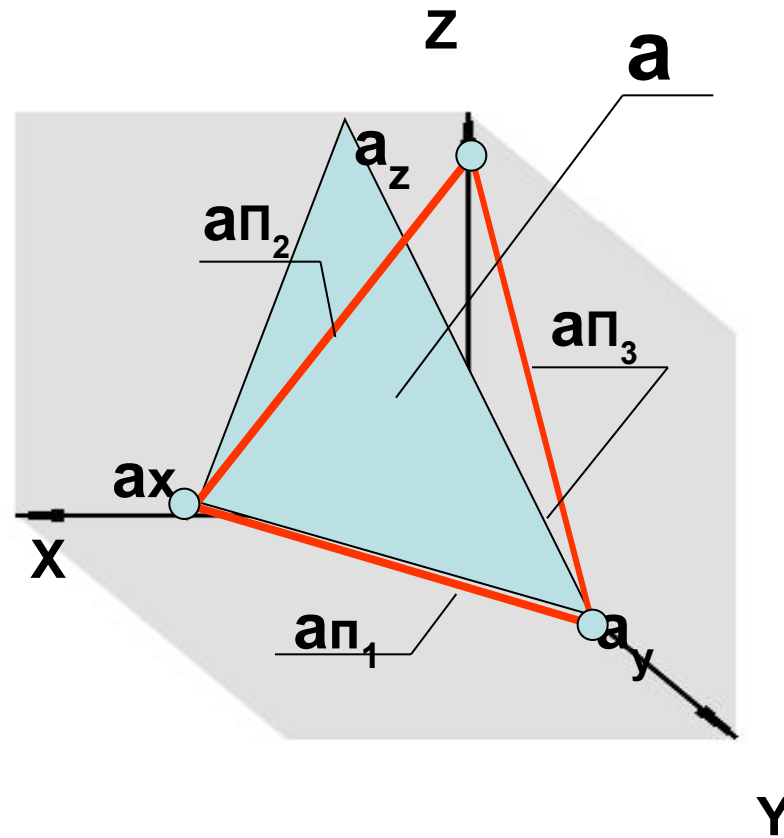


## Особенности чертежа проецирующих плоскостей

- Фигуры принадлежащие проецирующим плоскостям на перпендикулярную плоскость проекций проецируются в прямую линию (вырожденная проекция)
- Угол наклона между вырожденной проекцией и осями координат равен углу между заданной плоскостью и плоскостью проекций

# ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ ПЛОСКОСТИ ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ

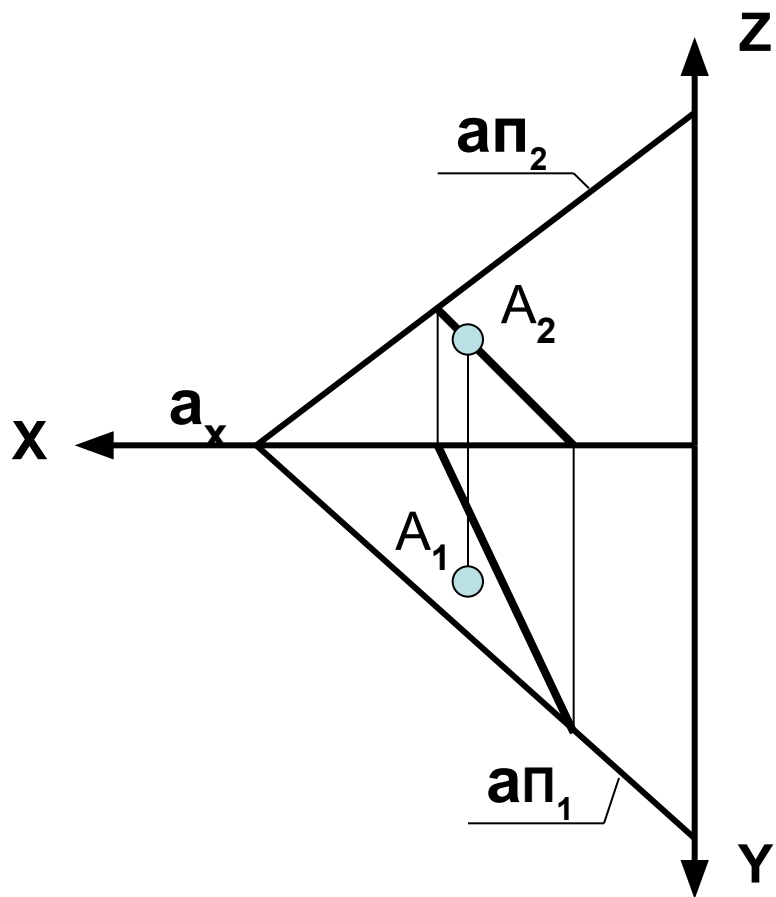
- Плоскость общего положения не параллельна и не перпендикулярна ни одной из плоскостей проекций.



# ПРИНАДЛЕЖНОСТЬ ТОЧКИ И ПРЯМОЙ ПЛОСКОСТИ

1. Точка принадлежит плоскости, если она принадлежит прямой в этой плоскости
2. Прямая принадлежит плоскости если она проходит:
  - а) через две точки этой плоскости
  - б) через точку плоскости параллельно какой-либо прямой этой плоскости

# Принадлежит ли точка А плоскости а?



точка А плоскости а  
не принадлежит

# ОСОБЫЕ ЛИНИИ ПЛОСКОСТИ

1. **ЛИНИИ УРОВНЯ ПЛОСКОСТИ** – линии параллельные плоскостям проекций и принадлежащие данной плоскости;
2. **ЛИНИИ НАИБОЛЬШЕГО НАКЛОНА (ЛНН) ПЛОСКОСТИ** – определяют угол наклона данной плоскости к одной из плоскостей проекций.

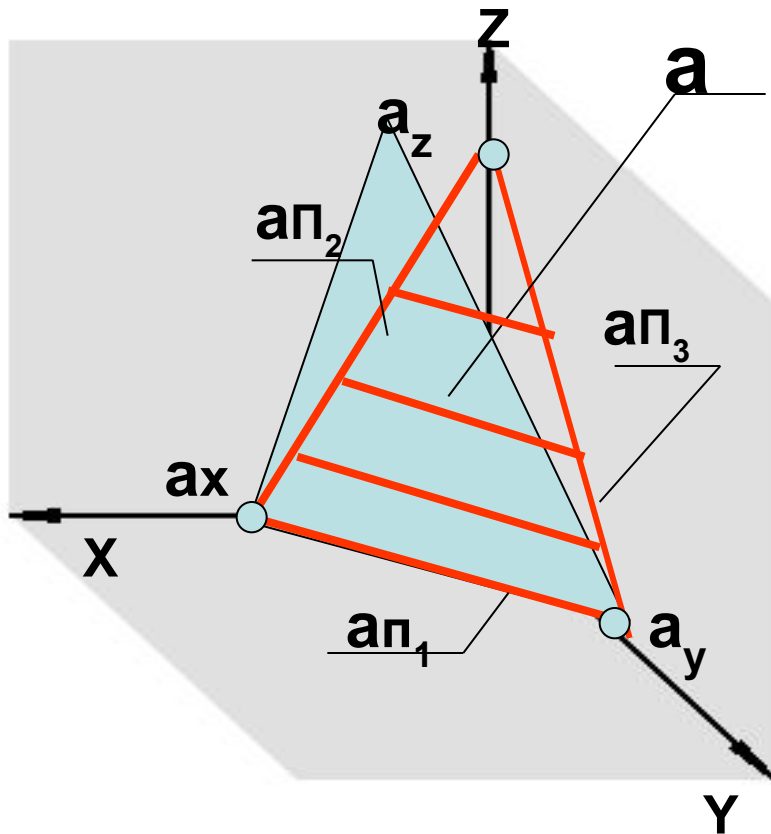
**ЛНН** перпендикулярны линиям уровня:

горизонтали на плоскости  $\Pi_1$ ;

фронталы на плоскости  $\Pi_2$ .

# ЛИНИИ УРОВНЯ ПЛОСКОСТИ

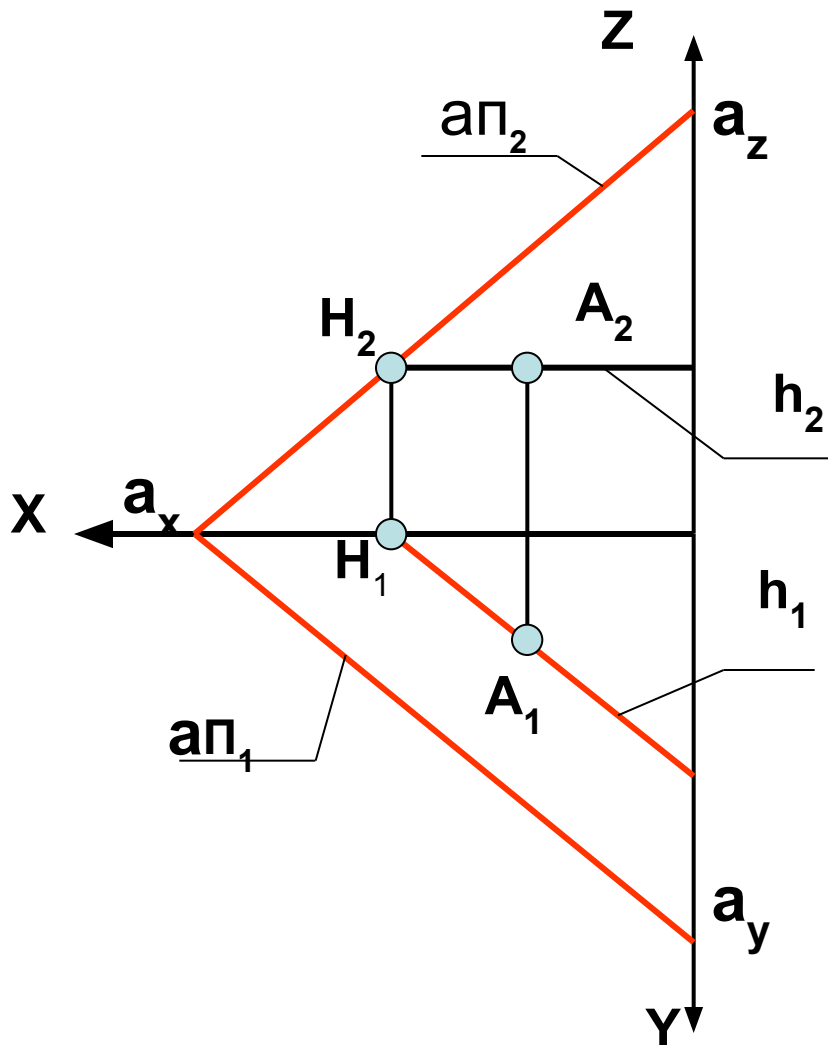
## Горизонталь плоскости



Горизонталь  $h$  параллельна горизонтальной плоскости проекций и принадлежит плоскости  $a$

# 1. ЛИНИИ УРОВНЯ ПЛОСКОСТИ

Горизонталь плоскости  $\square$



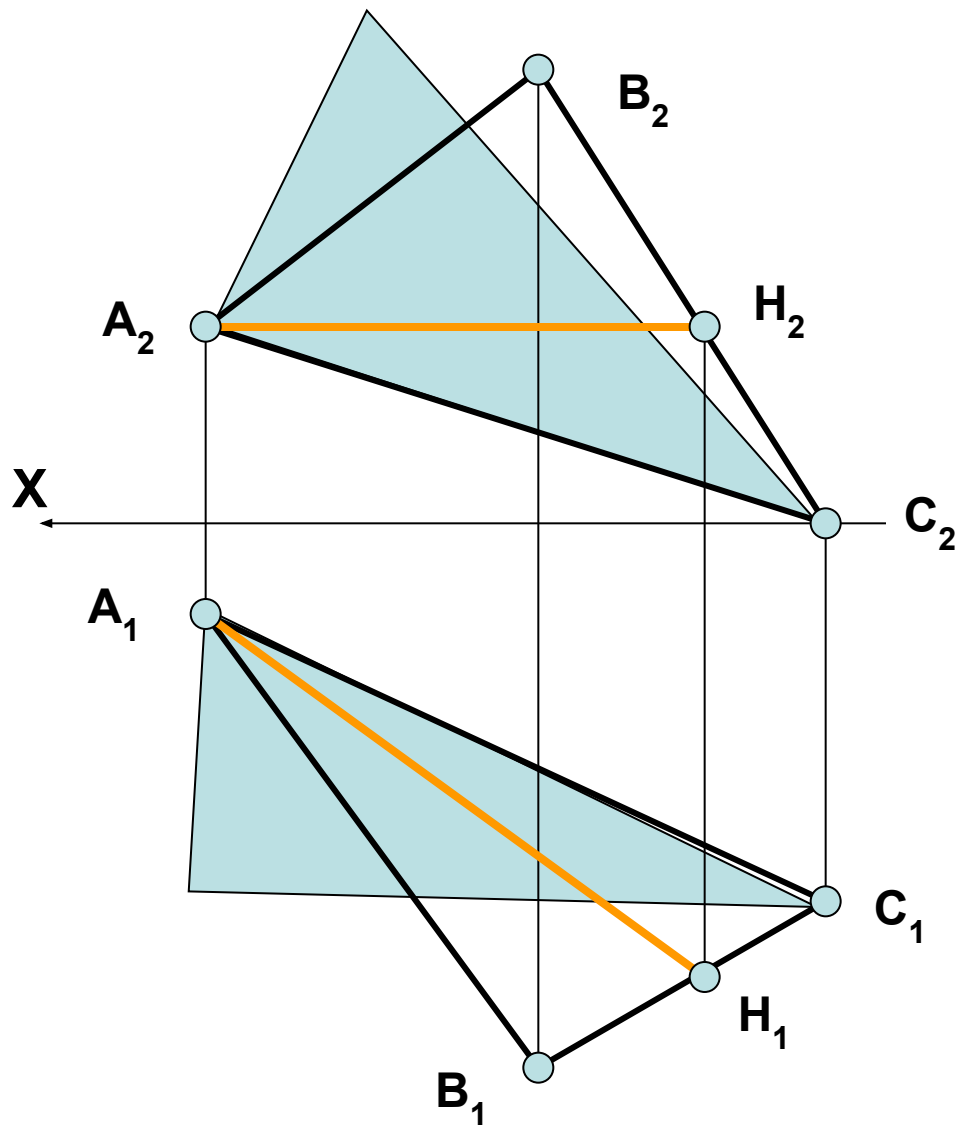
$AN(h)$  горизонталь  
плоскости  $a$ ;

Следы плоскости –  
линии уровня плоскости

- $\square_{п1}$  – горизонталь плоскости
- $\square_{п2}$  – фронталь плоскости

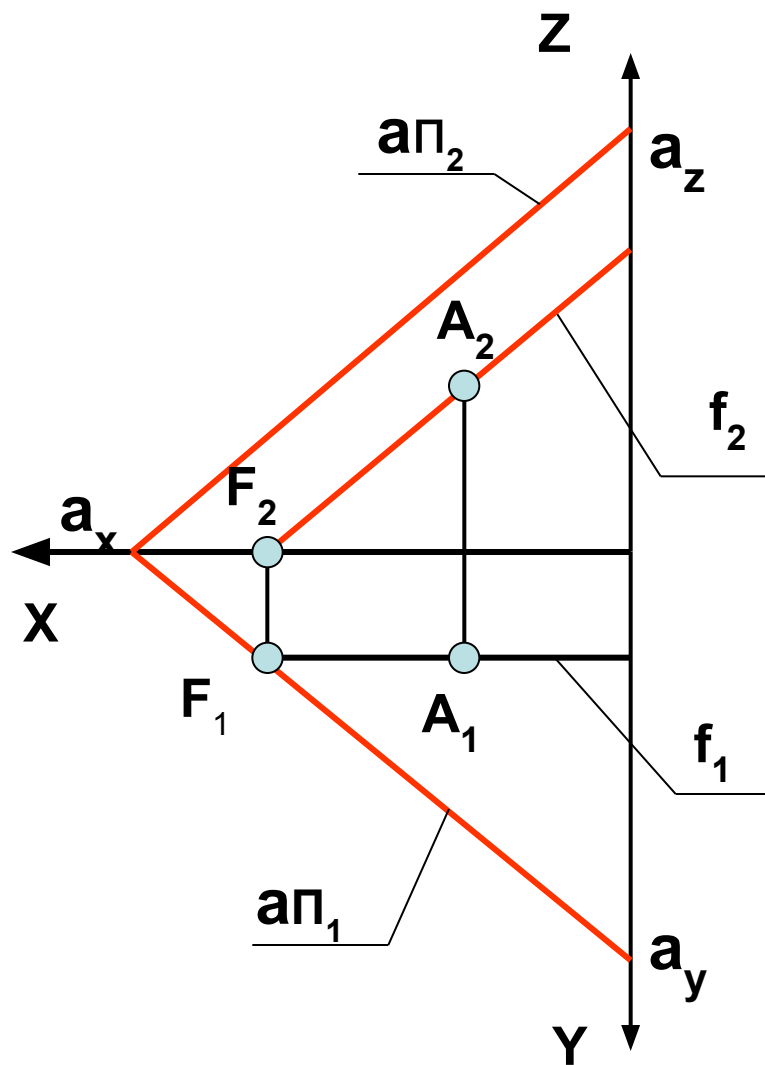


# Горизонталь плоскости треугольника



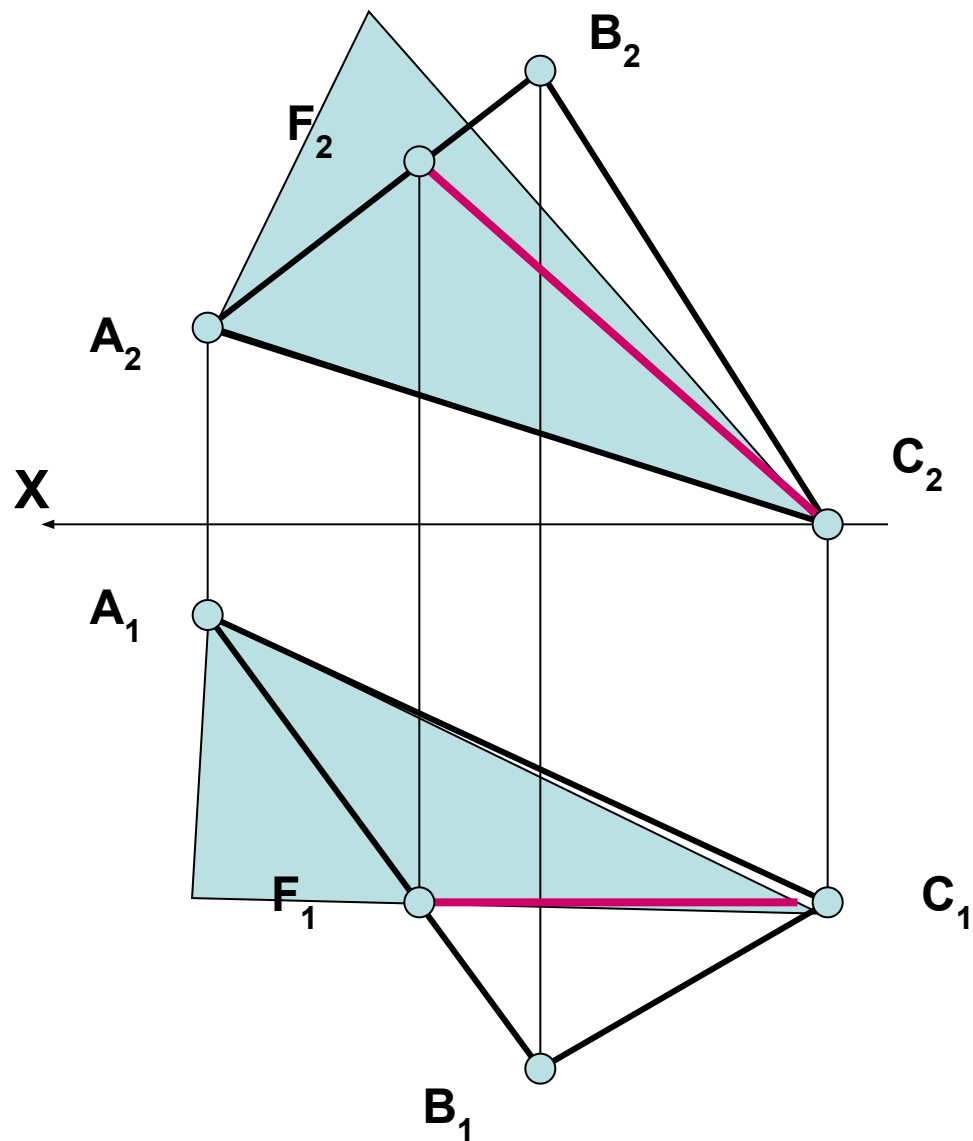
$AH(h)$ —  
горизонталь  
 $\triangle ABC$

# Фронталь плоскости □



AF (f)- фронталь  
плоскости а

# Фронталь плоскости треугольника

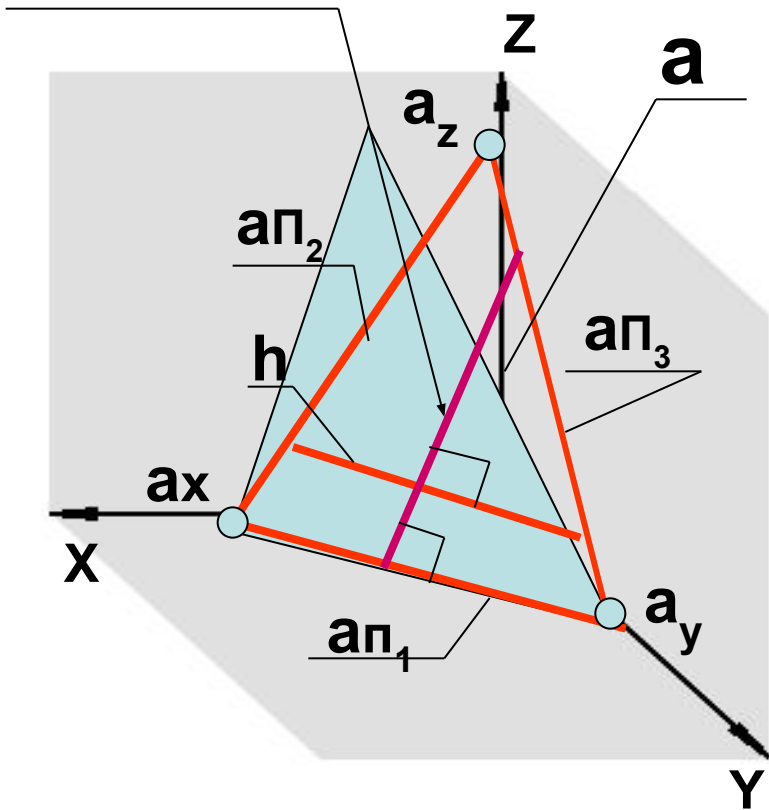


CF (f) фронталь  
плоскости  $\triangle ABC$

## 2. ЛИНИИ НАИБОЛЬШЕГО НАКЛОНА ПЛОСКОСТИ К ПЛОСКОСТЯМ ПРОЕКЦИЙ

### Линия ската

Линия ската

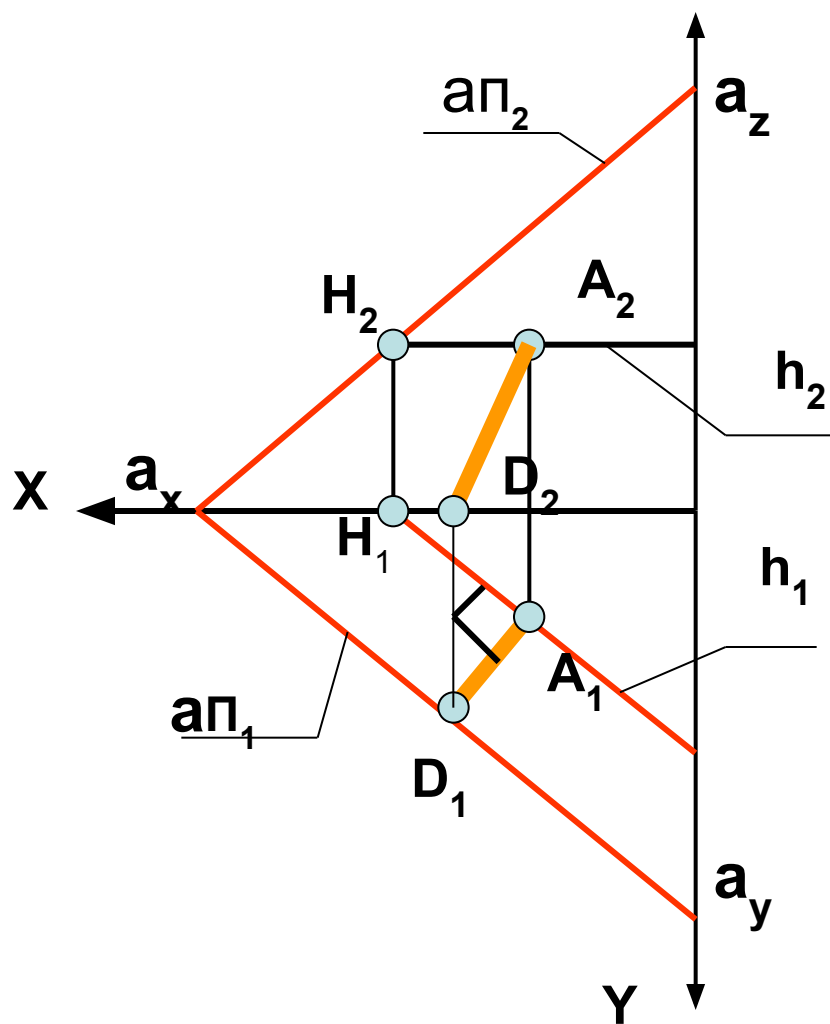


1. Линия наибольшего наклона плоскости  $\alpha$  к горизонтальной плоскости проекций - **Линия ската** плоскости  $\alpha$ .

2. **Линия Ската**  $\perp \alpha_{п1}$ ;

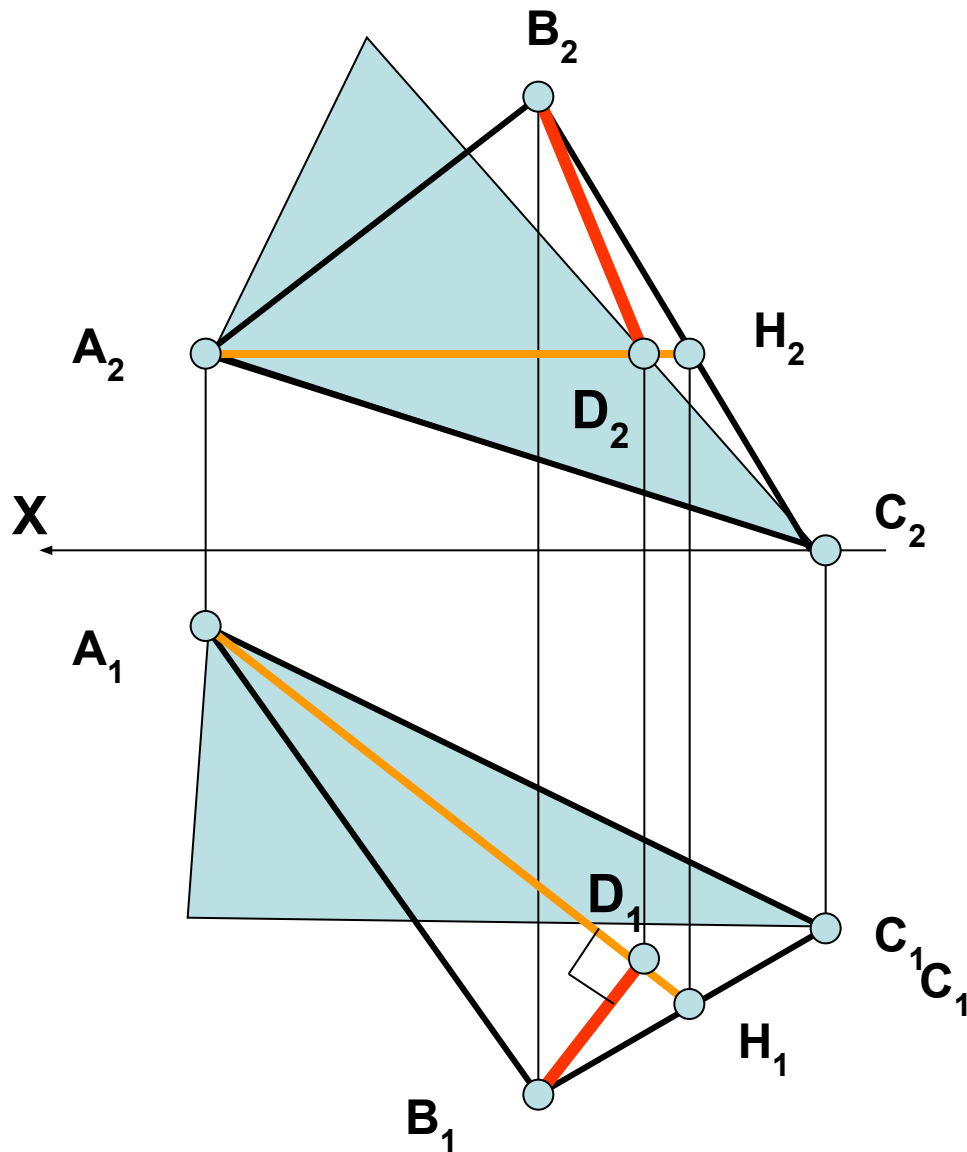
3. **Линия Ската**  $\perp h_1$ .

# Линия ската



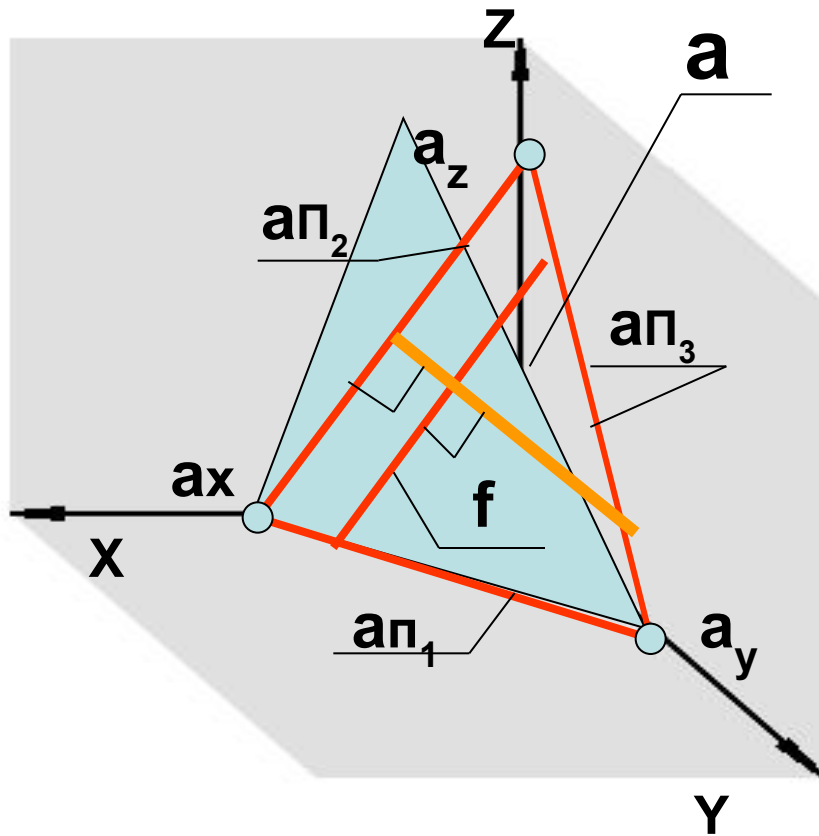
1.  $A_1D_1 \perp A_1H_1 \parallel \Pi_1$ .
2.  $A_1D_1 \perp \alpha_{\Pi_1}$

# Линия ската треугольника



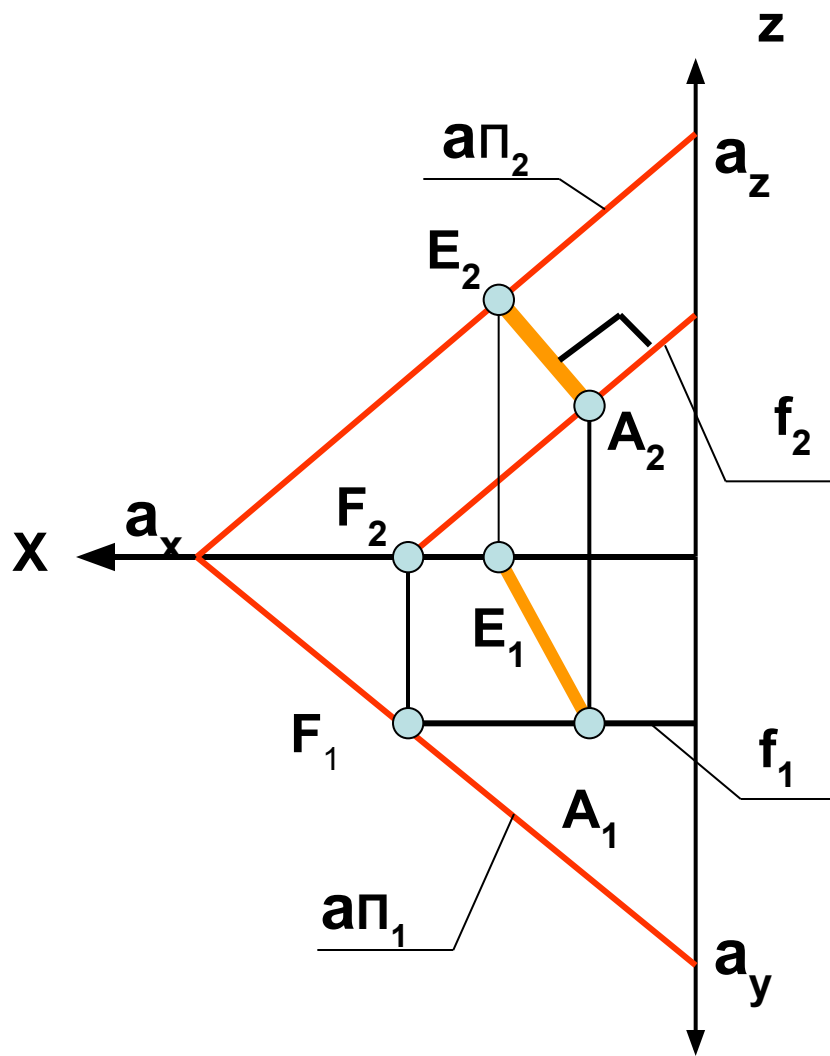
1.  $B_1D_1 \perp A_1H_1$
2.  $BD$  – линия ската треугольника

# ЛИНИЯ НАИБОЛЬШЕГО НАКЛОНА ПЛОСКОСТИ



1. ЛНН к  $\Pi_2 \perp \alpha_{п2}$
2. ЛНН к  $\Pi_2 \perp f \parallel \Pi_2$

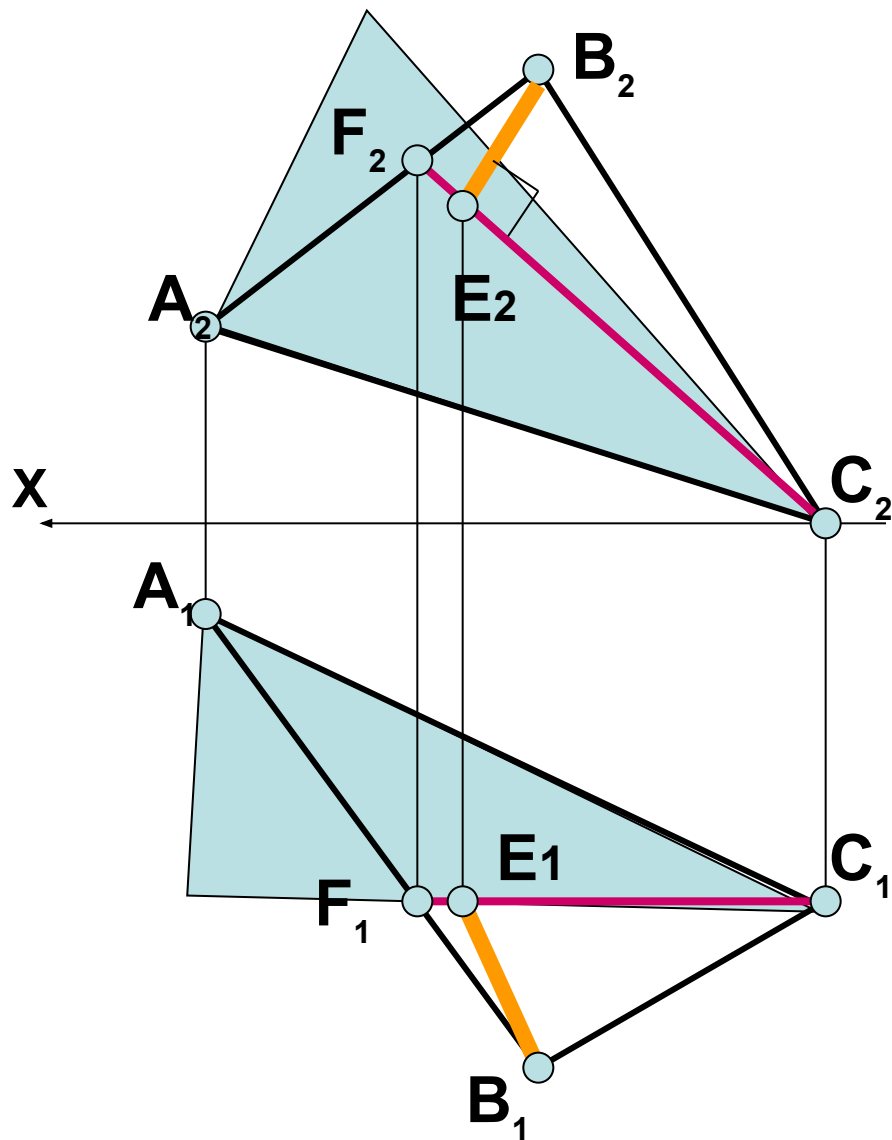
# Линия наибольшего наклона плоскости к фронтальной плоскости проекций



$AE$  – ЛНН к  $\Pi_2$   
 $A_2E_2 \perp A_2F_2 \square\square\Pi_2$   
 $A_2E_2 \perp \square_{\Pi_2}$



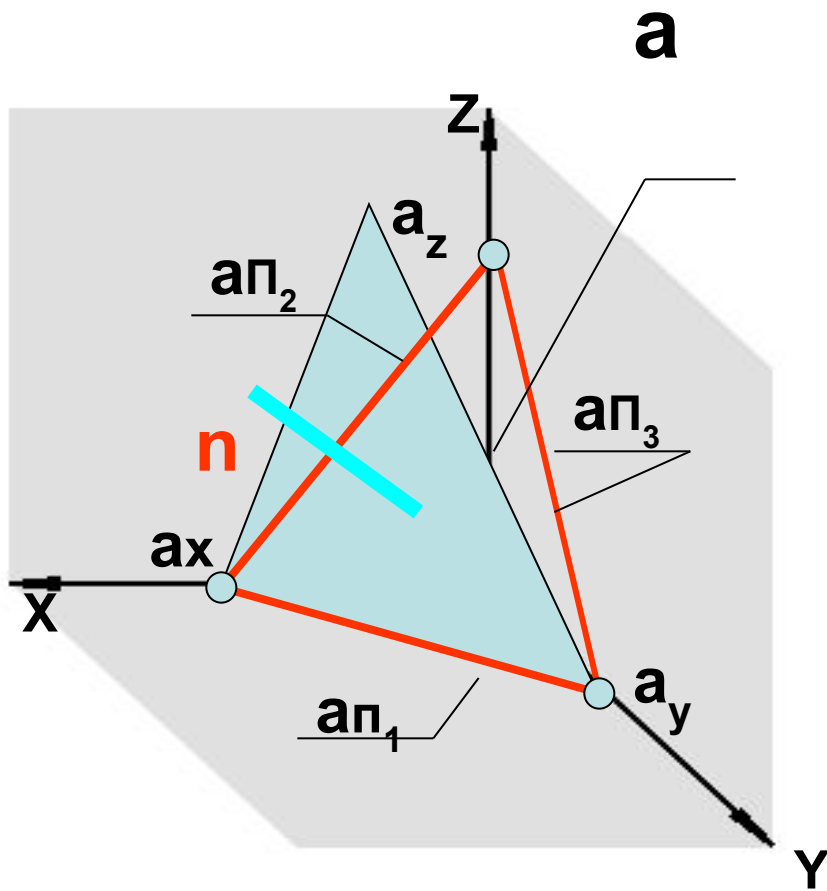
# ЛИНИЯ НАИБОЛЬШЕГО НАКЛОНА плоскости $\Delta ABC$ к фронтальной плоскости проекций



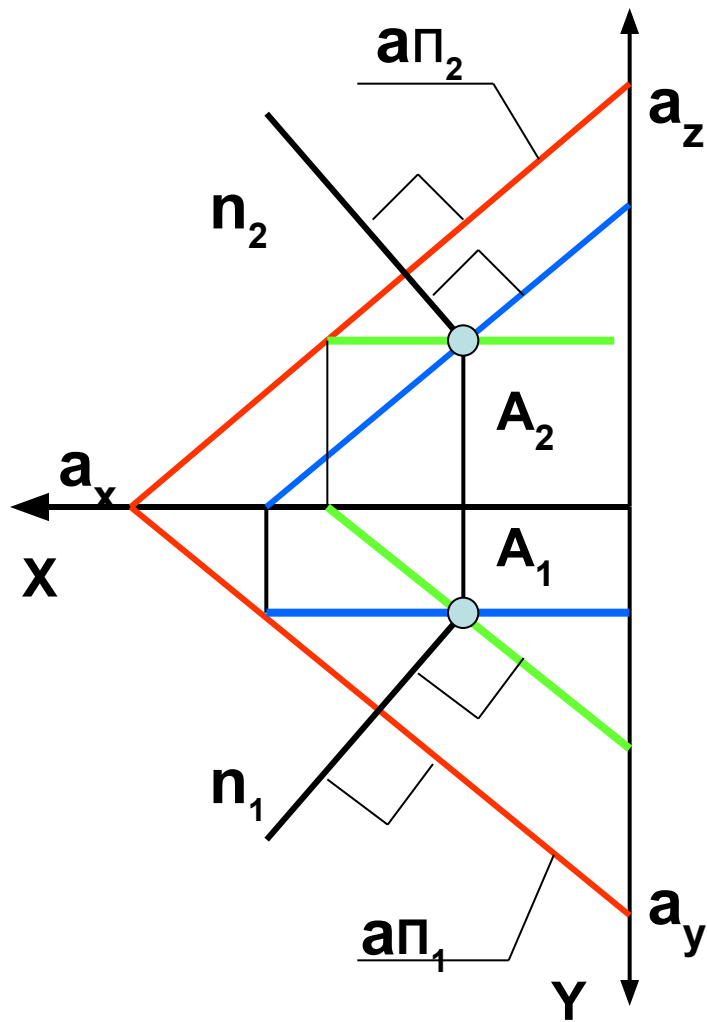
$BE$  – ЛНН к  $\Pi_2$

$B_2E_2 \perp C_2F_2 \square \square \Pi_2$

# НОРМАЛЬ ПЛОСКОСТИ



- Нормаль плоскости  $n$  – линия перпендикулярная заданной плоскости



- Проекции нормали перпендикулярны проекциям линий уровня плоскости  $\mathbf{a}$ :

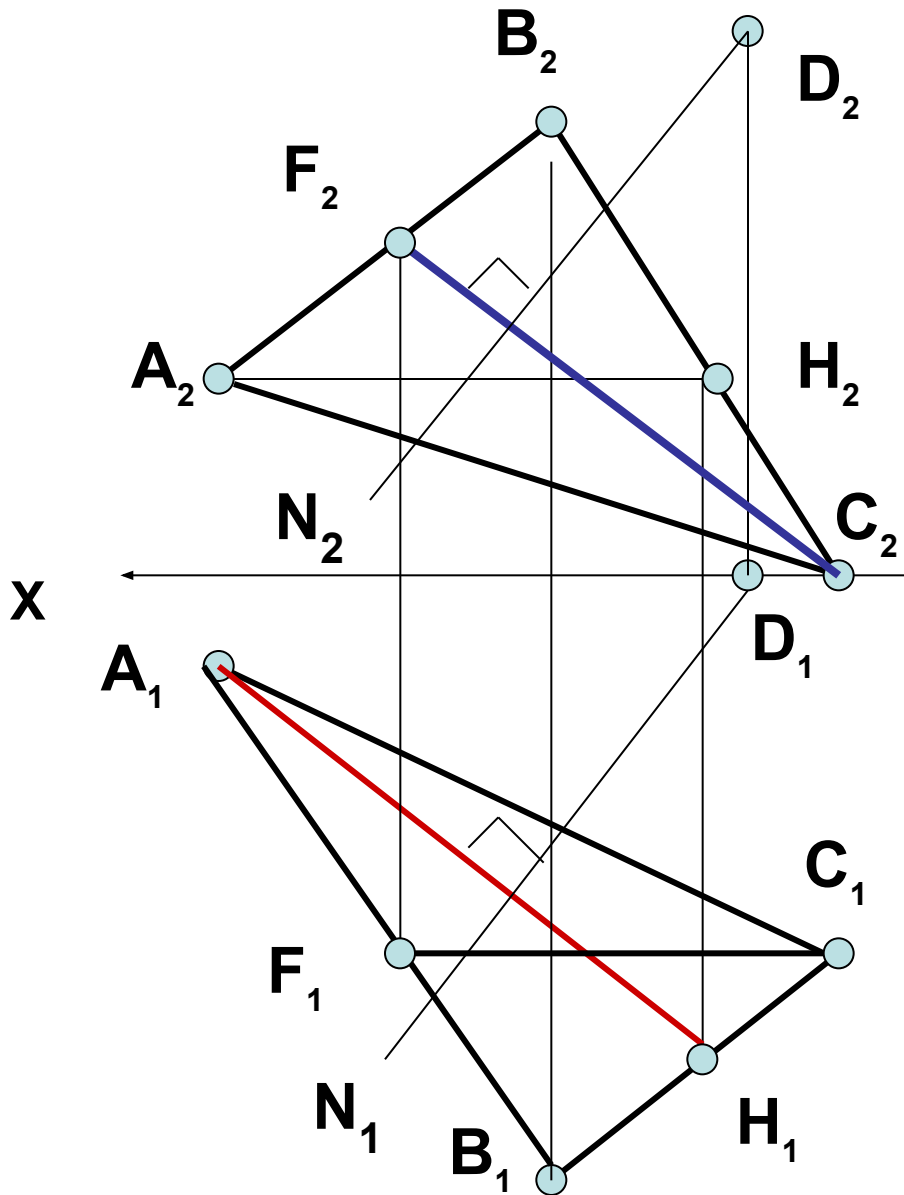
горизонтالي на  $\Pi_1$ ;  
фронтали на  $\Pi_2$ .

- Проекции нормали перпендикулярны следам плоскости  $\mathbf{a}$ :

$$\mathbf{n}_1 \perp \mathbf{a}_{\pi_1};$$

$$\mathbf{n}_2 \perp \mathbf{a}_{\pi_2}.$$

# НОРМАЛЬ ПЛОСКОСТИ ТРЕУГОЛЬНИКА



1. Проведем горизонталь АН. На горизонтальной плоскости проекции нормали перпендикулярна горизонтали  $D_1N_1 \perp A_1H_1$

Точку N выберем произвольно

2. Проведем фронталь СF

На фронтальной плоскости проекции нормали перпендикулярна фронтали  $D_2N_2 \perp C_2F_2$

# ОТНОСИТЕЛЬНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ, ПЛОСКОСТЕЙ



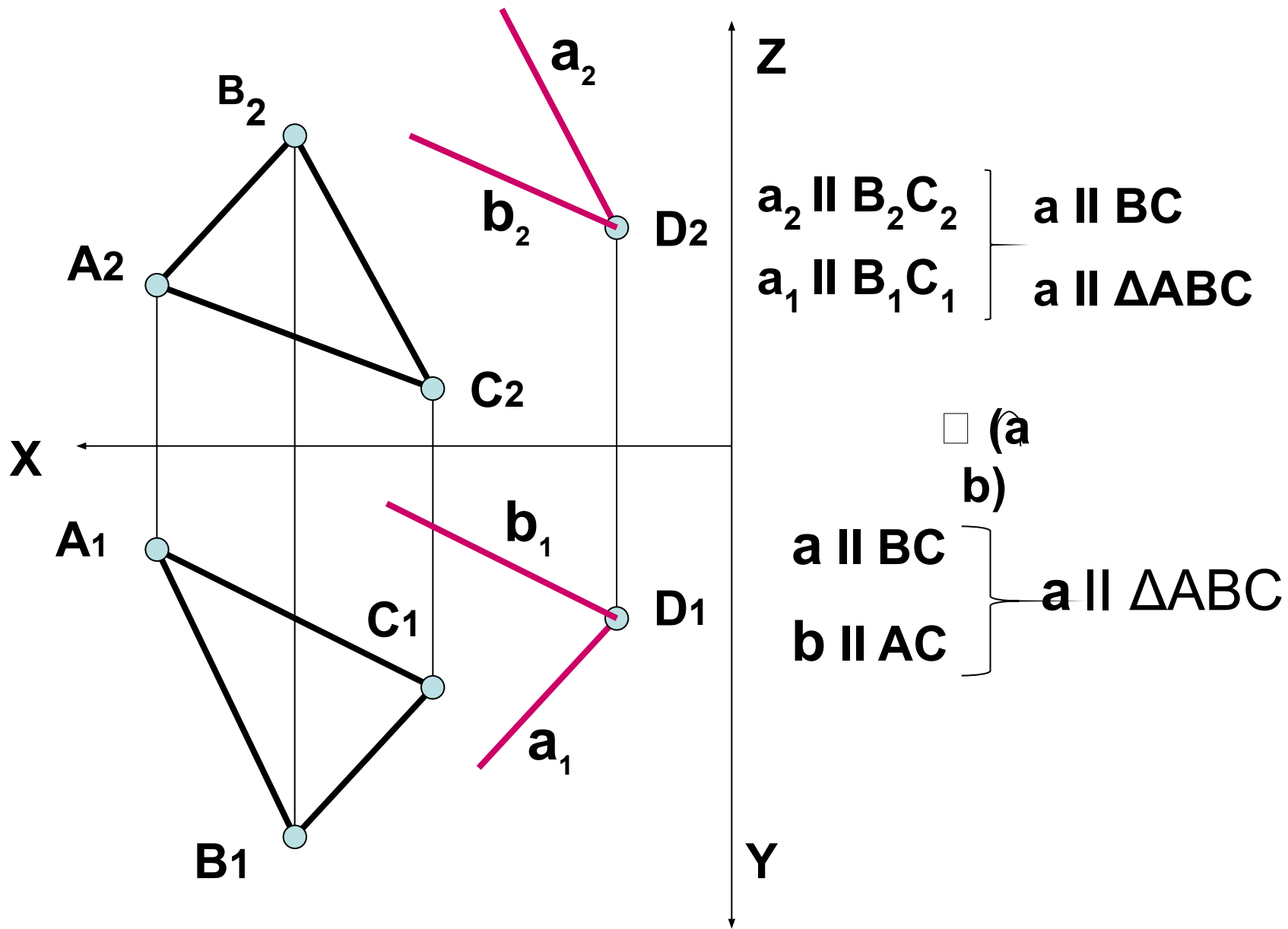
# ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ, ПЛОСКОСТИ

- 1. ПРЯМАЯ ПАРАЛЛЕЛЬНА ПЛОСКОСТИ, ЕСЛИ ОНА ПАРАЛЛЕЛЬНА ЛЮБОЙ ПРЯМОЙ ПРИНАДЛЕЖАЩЕЙ ПЛОСКОСТИ**
- 2. ПЛОСКОСТИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫ, ЕСЛИ ДВЕ ПЕРЕСЕКАЮЩИЕСЯ ПРЯМЫЕ ОДНОЙ ПЛОСКОСТИ, ПАРАЛЛЕЛЬНЫ ДВУМ ПЕРЕСЕКАЮЩИМСЯ ПРЯМЫМ ДРУГОЙ ПЛОСКОСТИ**

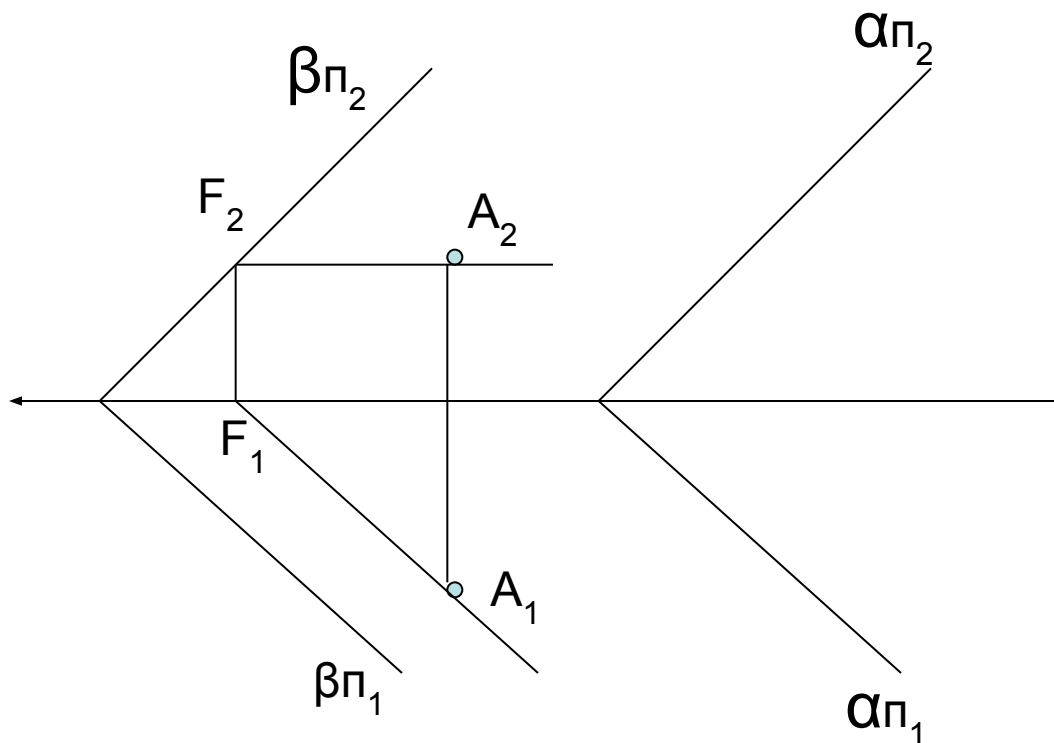


- Через точку  $D$  провести прямую  $a$  параллельную  $\Delta ABC$  и плоскость  $\alpha$  ( $a \cap b$ ) параллельную  $\Delta ABC$





Построить следы плоскости  $\beta$ , параллельной  $\alpha$  и проходящей через точку  $A$



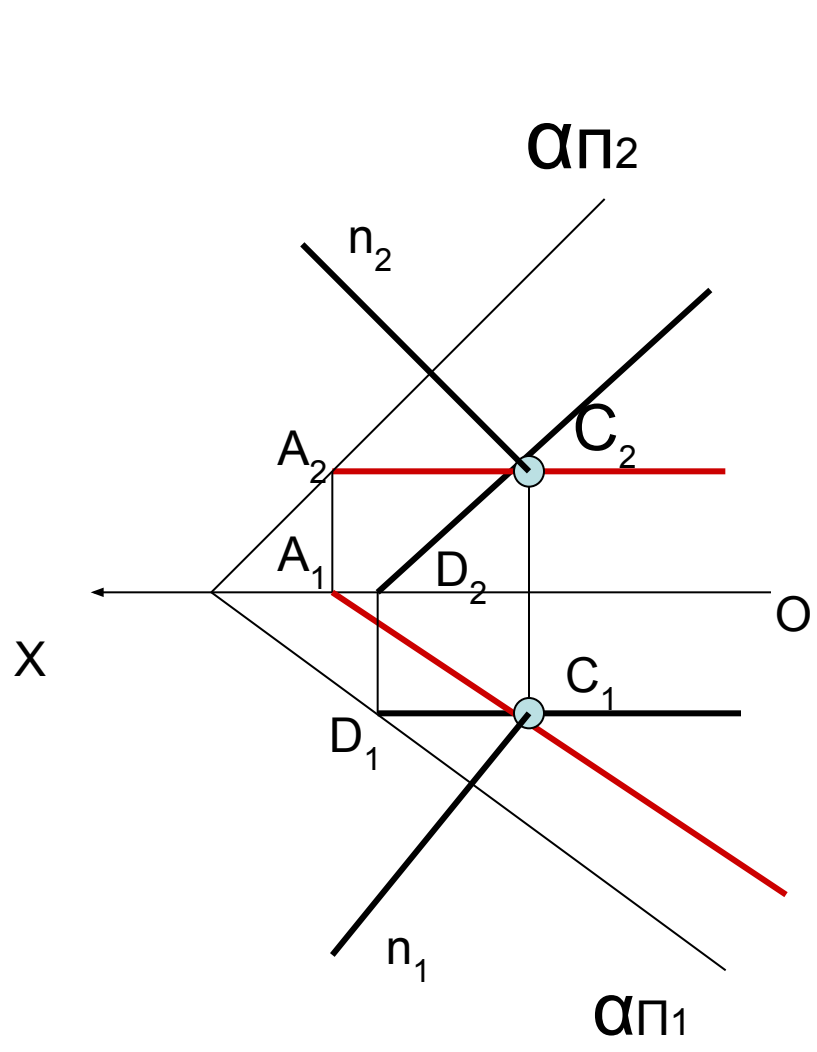
Проведем через точку  $A$  горизонталь параллельную горизонтальному следу плоскости  $\alpha$

# ПРЯМАЯ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНАЯ ПЛОСКОСТИ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ ПЛОСКОСТИ

- *ПРЯМАЯ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНА ПЛОСКОСТИ, ЕСЛИ ОНА ПЕРПЕНДИКУЛЯРНА ДВУМ ПЕРЕСЕКАЮЩИМСЯ ПРЯМЫМ ПРИНАДЛЕЖАЩИМ ЭТОЙ ПЛОСКОСТИ*
- *В соответствии с теоремой о проекциях прямого угла прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна одноименным проекциям горизонтали и фронтали плоскости*
- *ДВЕ ПЛОСКОСТИ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫ, ЕСЛИ ОДНА ПЛОСКОСТЬ ПРОХОДИТ ЧЕРЕЗ ПЕРПЕНДИКУЛЯР К ДРУГОЙ*

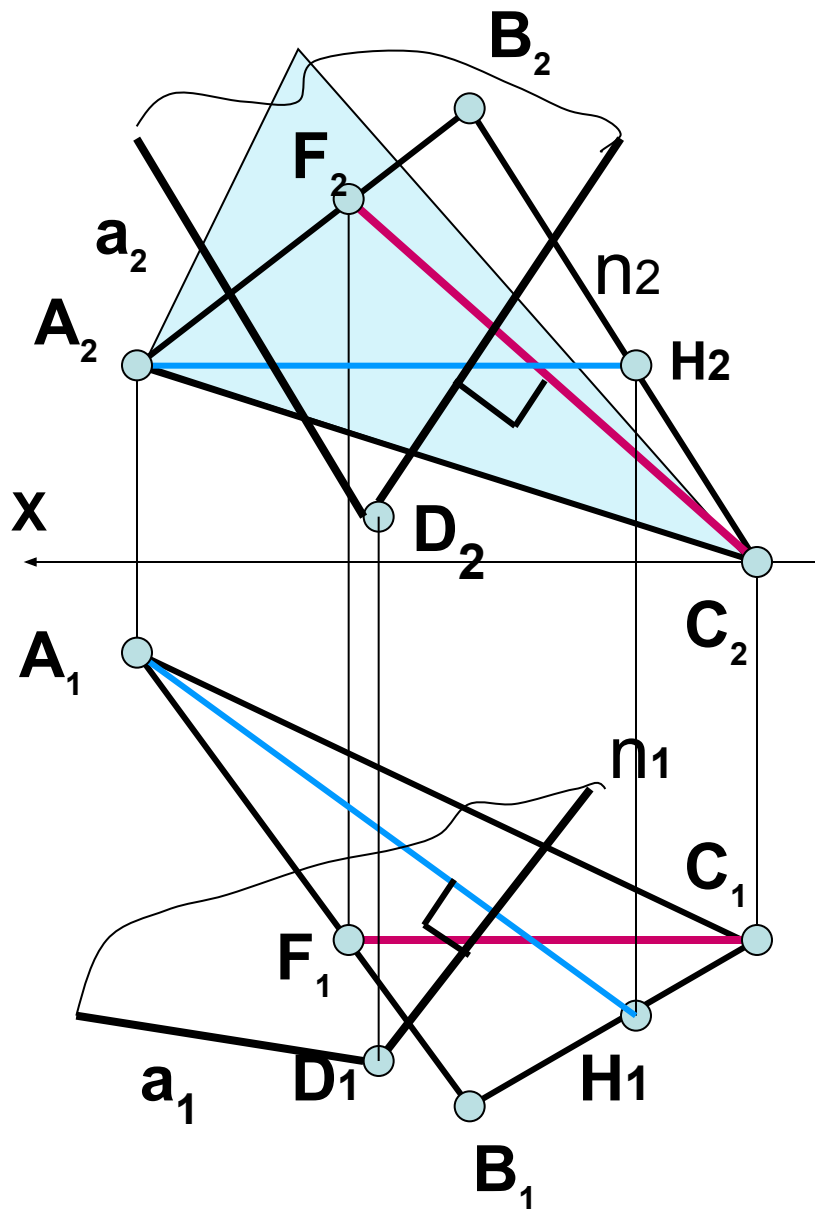
# Задача

- Построить проекции нормали плоскости  $\alpha$ , проходящей через точку  $S$  плоскости



$C \in$   
 $\alpha$

- Через точку  $D$  провести перпендикуляр к плоскости  $\Delta ABC$  и плоскость  $\alpha$  ( $n \perp \alpha$ ) перпендикулярную  $\Delta ABC$
- $A(80, 10, 30)$
- $B(40, 60, 50)$
- $C(10, 45, 0)$
- $D(50, 55, 5)$

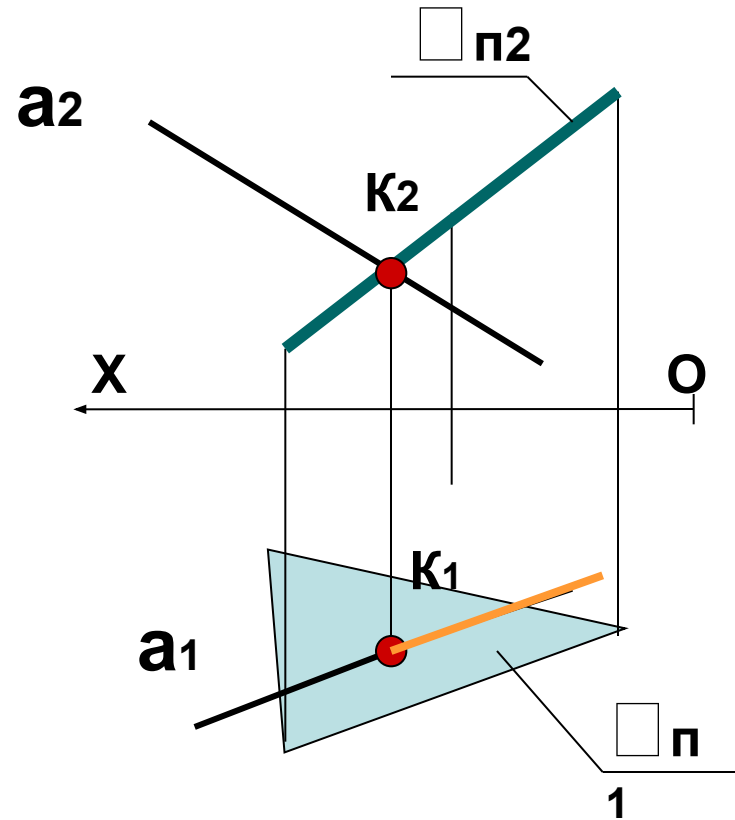
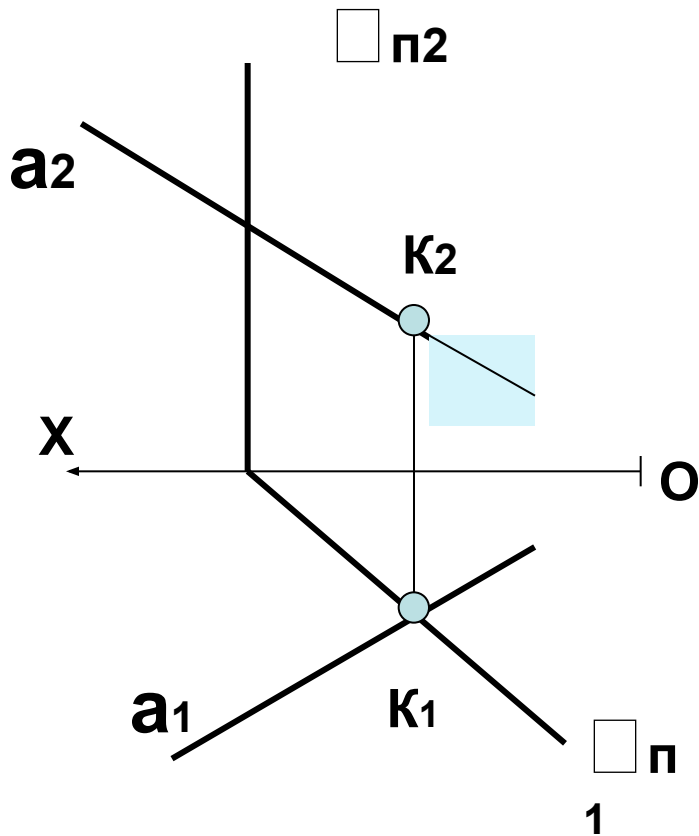


1.  $n_1 \perp A_1H_1 \parallel \Pi_1$
3.  $n_2 \perp C_2F_2 \parallel \Pi_2$
4.  $a$  – произвольная  
прямая

# ПЕРЕСЕКАЮЩИЕСЯ ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ

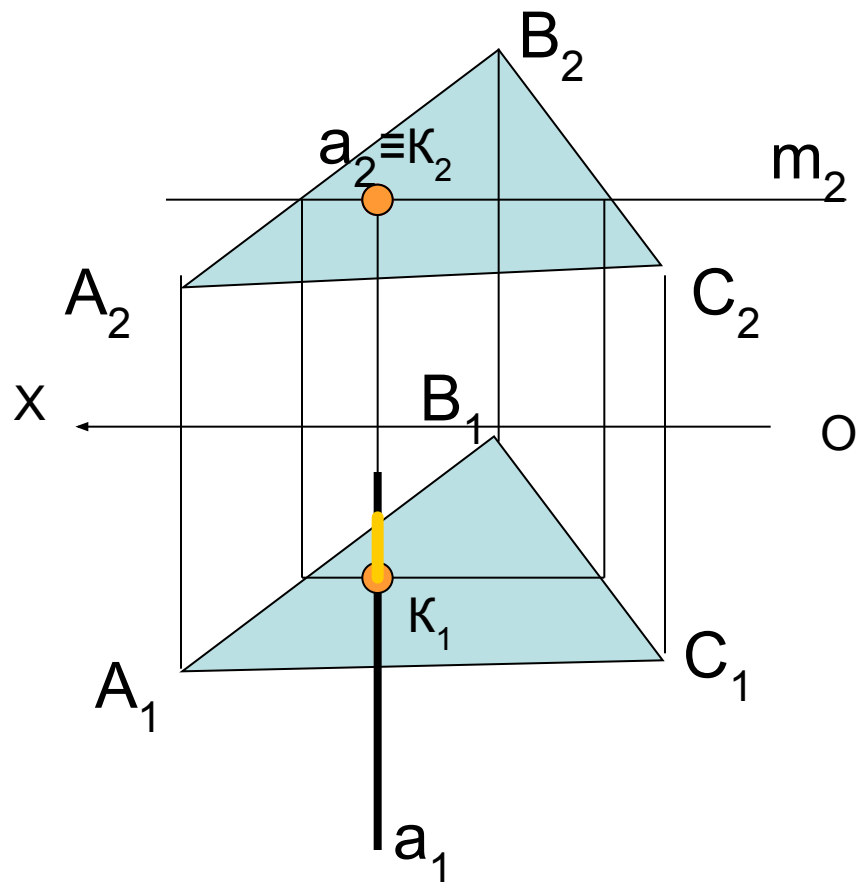
***ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ ПЕРЕСЕКАЮТСЯ,  
ЕСЛИ У НИХ ЕСТЬ ОДНА ОБЩАЯ ТОЧКА***





- *Точка пересечения прямой и плоскости частного положения определяется на пересечении следа плоскости и проекции прямой*

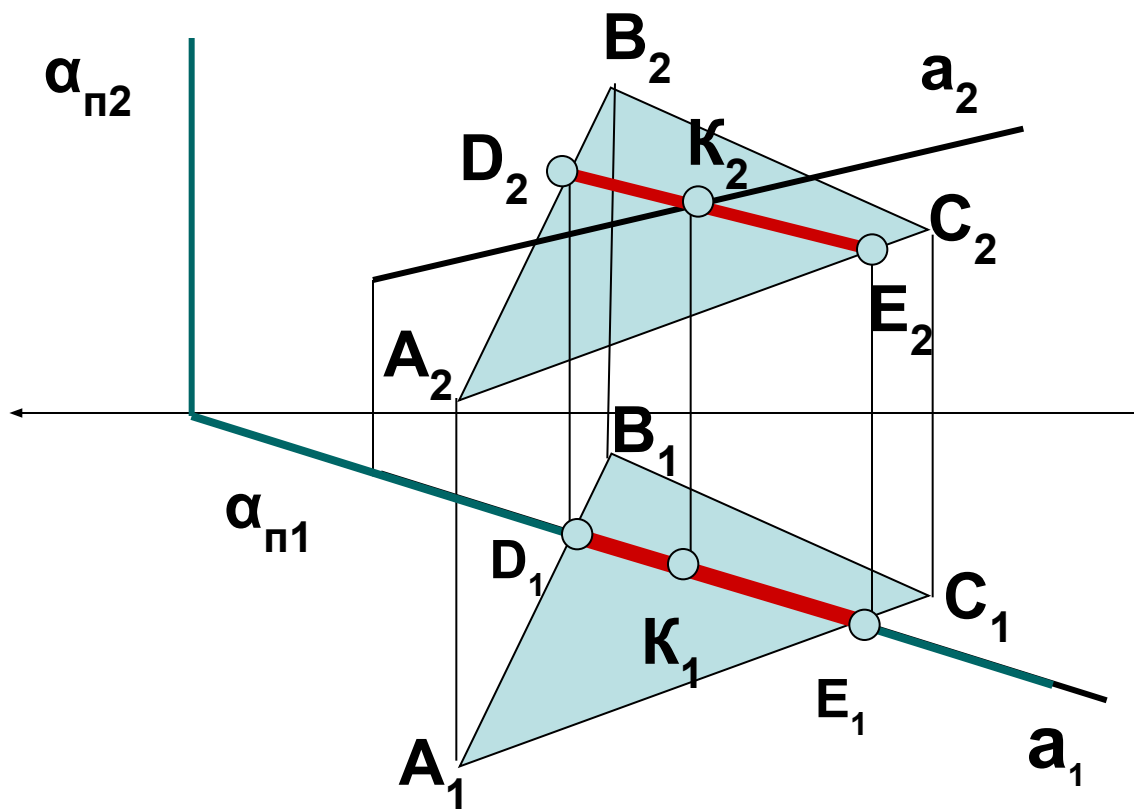
# Пересечение прямой частного положения и плоскости общего положения



# Пересечение прямой общего положения и плоскости общего положения

## *СПОСОБ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ СЕКУЩИХ ПЛОСКОСТЕЙ*

1. Через прямую проводят плоскость частного положения  $\alpha \perp P_1$ .
2. Определяют линию пересечения заданной плоскости и введенной плоскости  $\alpha$ .
3. Определяют точку пересечения заданной прямой и построенной линии пересечения. Это искомая точка пересечения заданной плоскости и прямой  $a$ .
4. Определяют видимость заданной прямой.

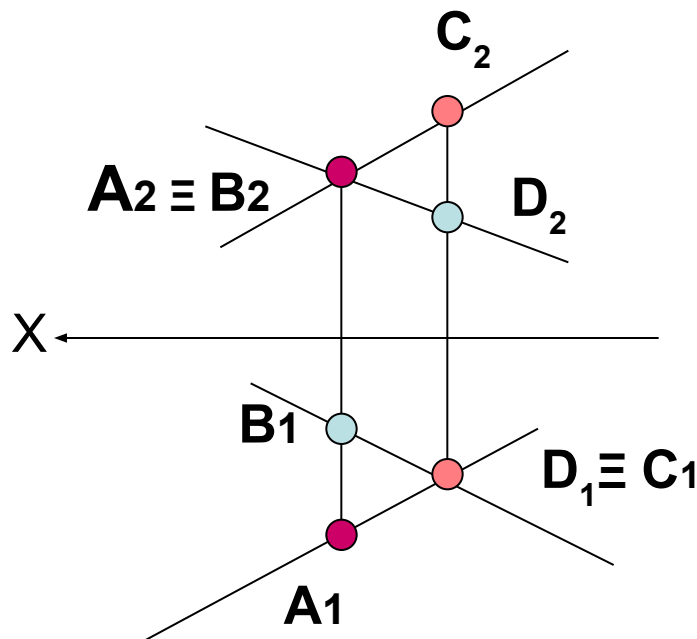


Видимость прямой определяют по конкурирующим точкам

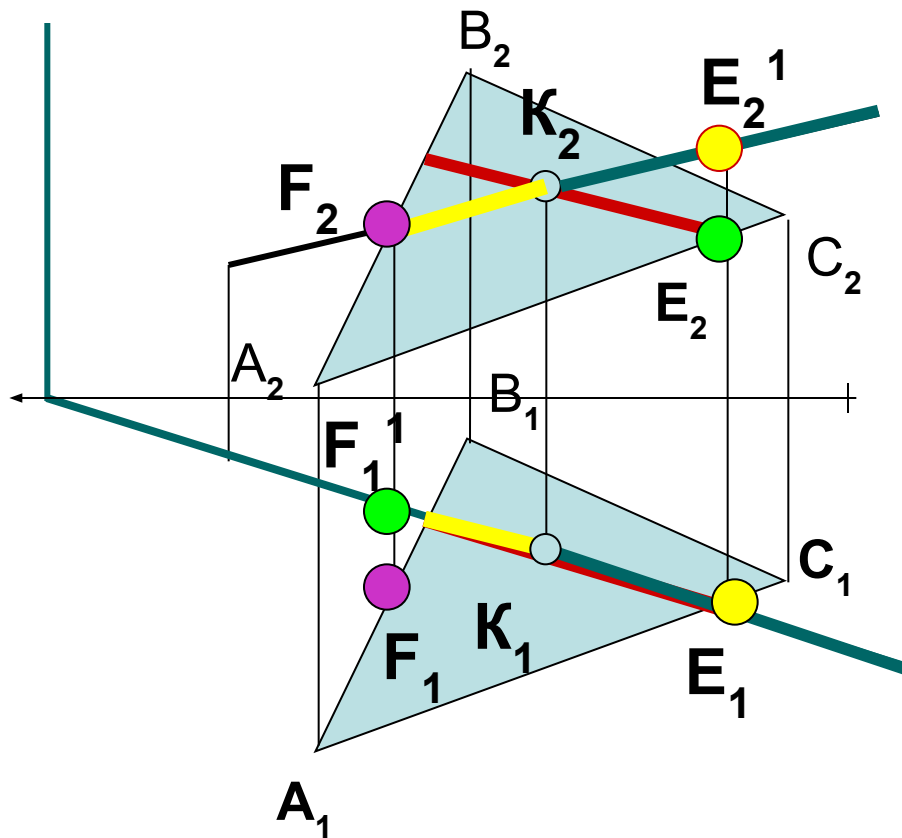
Видимость прямых определяют по **конкурирующим точкам** - **которые принадлежат скрещивающимся прямым.**

Конкурирующие точки располагаются дальше или ближе относительно плоскости  $\Pi_2$  (точки A и B),  
выше или ниже относительно плоскости  $\Pi_1$  (точки C и D).

*На горизонтальной плоскости проекций видима точка C имеющая большую координату Z,  
на фронтальной плоскости проекций видима точка A имеющая большую координату Y.*



# Определение видимости прямой

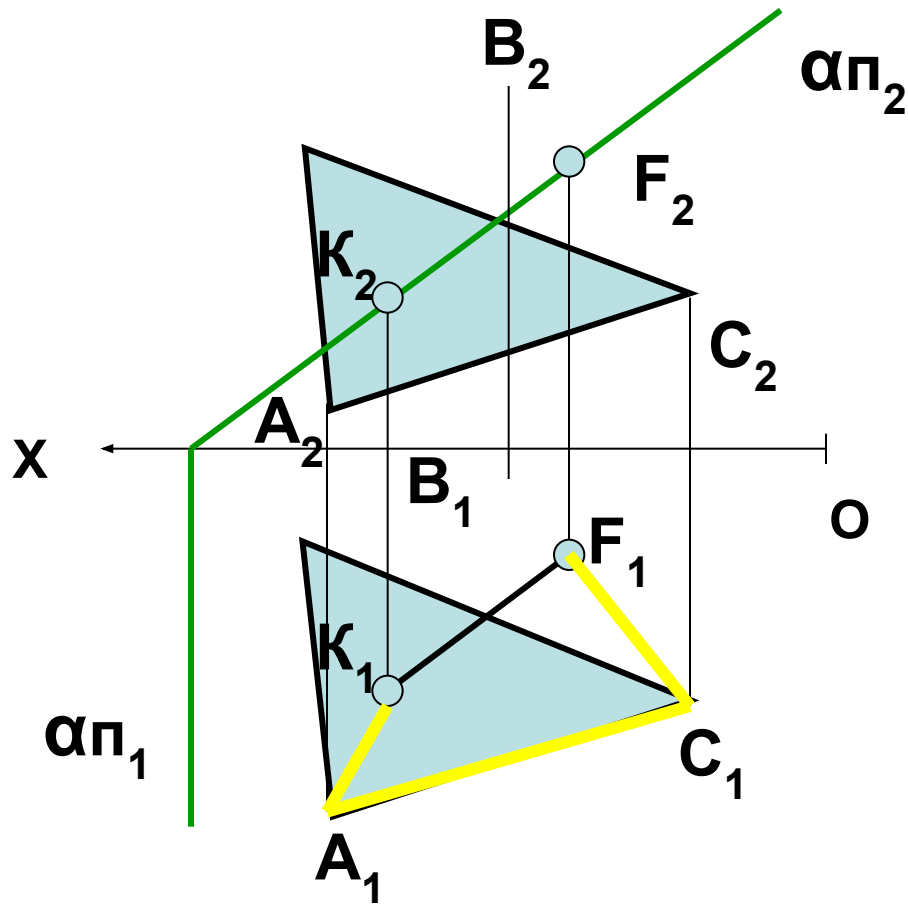


# **ПЕРЕСЕКАЮЩИЕСЯ ПЛОСКОСТИ**

**1. ПЛОСКОСТИ ПЕРЕСЕКАЮТСЯ, ЕСЛИ  
У НИХ ЕСТЬ ДВЕ ОБЩИЕ ТОЧКИ**

**2. ПЛОСКОСТИ ПЕРЕСЕКАЮТСЯ ПО  
ПРЯМОЙ ЛИНИИ, КОТОРАЯ  
ПРОХОДИТ ЧЕРЕЗ ДВЕ ОБЩИЕ  
ТОЧКИ ПЛОСКОСТЕЙ**





- Линия пересечения фронтально-проецирующей плоскости и плоскости общего положения определяется по точкам пересечения сторон треугольника  $\Delta ABC$  и фронтального следа плоскости  $\alpha$

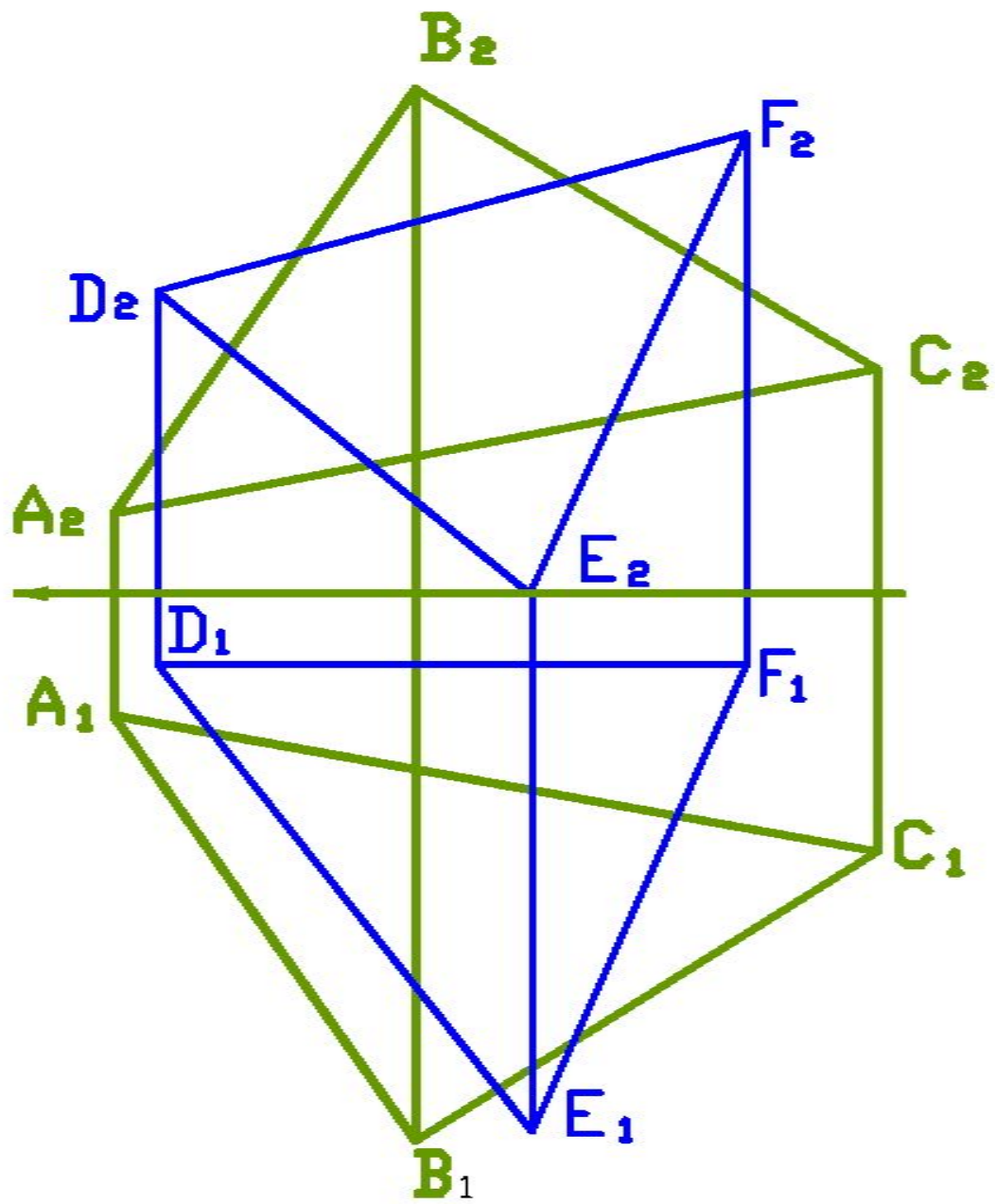
# ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПЛОСКОСТЕЙ ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ

*Для построения линии пересечения  
плоскостей достаточно определить  
две общие точки заданных плоскостей*

# Задача

**Построить линию пересечения  
треугольников  $\triangle ABC$  и  $\triangle DEF$ .**

**$A(100, 20, 20)$ ,  $B(65, 70, 70)$ ,  $C(10, 30, 25)$ ,  
 $D(90, 10, 55)$ ,  $E(45, 70, 0)$ ,  $F(20, 10, 65)$**



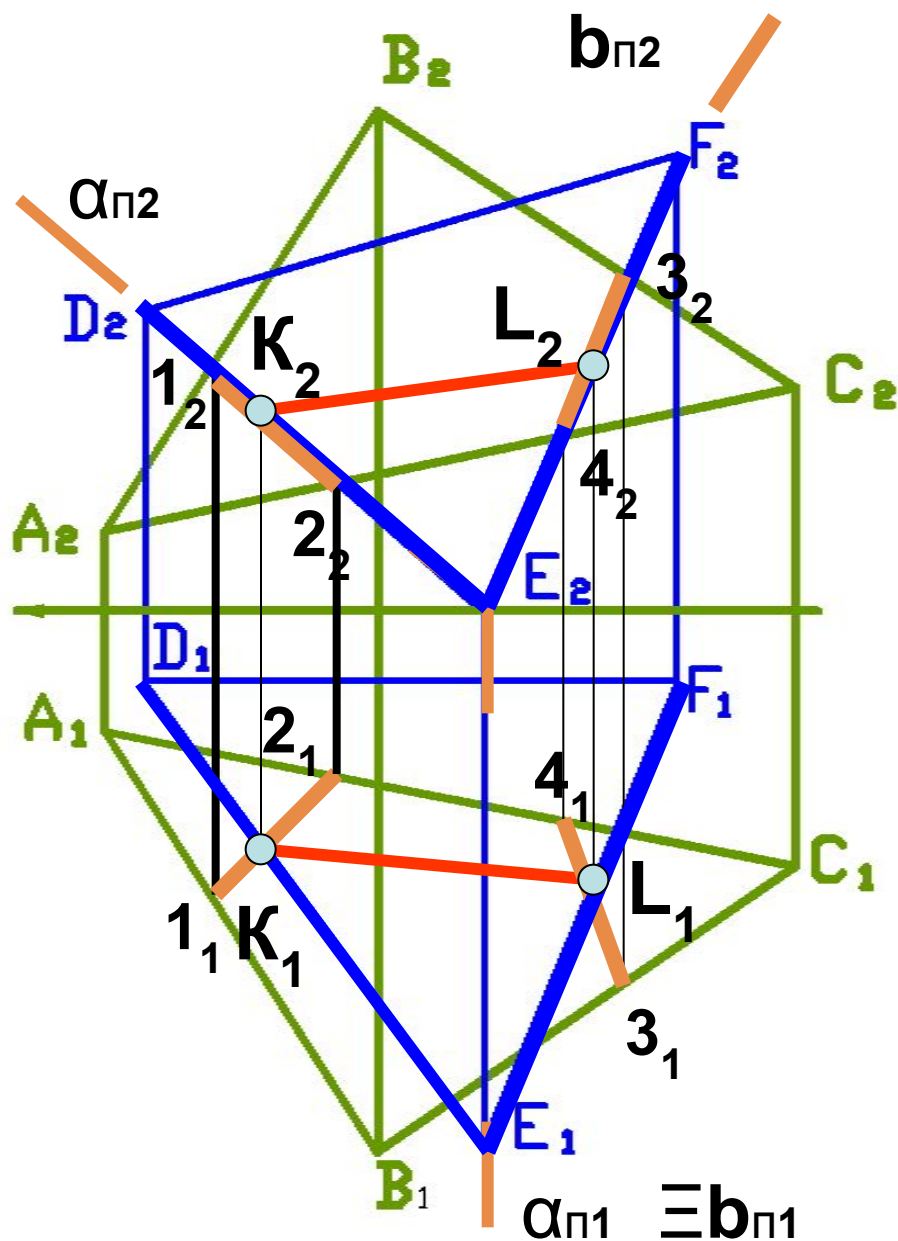
$$1. \quad \square ABC \cap DE = K$$

$$DE \square \square \perp \Pi_2$$

$$2. \quad \square ABC \cap EF = L$$

$$EF \square \square \perp \Pi_2$$

# ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПЛОСКОСТЕЙ ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ

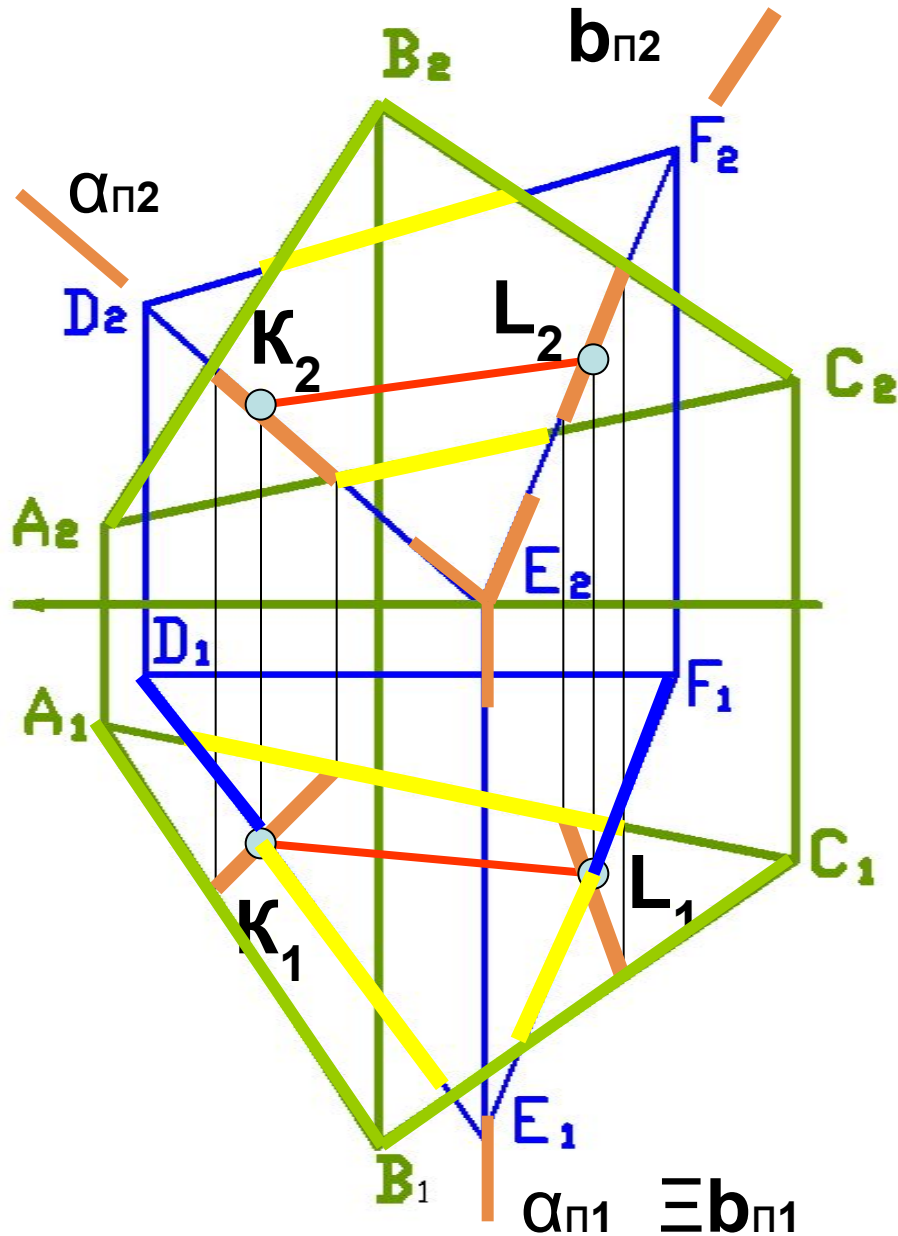


1.  $\square ABC \cap \alpha = 1-2$   
 $1-2 \cap DE = K$

3.  $\square ABC \cap \beta =$   
 $3-4 \cap EF = L$

3. Определим видимость  
треугольников.

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВИДИМОСТИ СТОРОН ТРЕУГОЛЬНИКА



- Видимость определяем по конкурирующим точкам или визуально.
- Вершины треугольников  $V$  и  $F$  имеют большую координату  $Z$  (относит. других вершин).
- $V$  и  $F$  видимы на  $\Pi_1$ .
- Вершины  $V$  и  $E$  имеют большую координату  $Y$  (относит. других вершин).
- $V$  и  $E$  видимы на  $\Pi_2$ .

