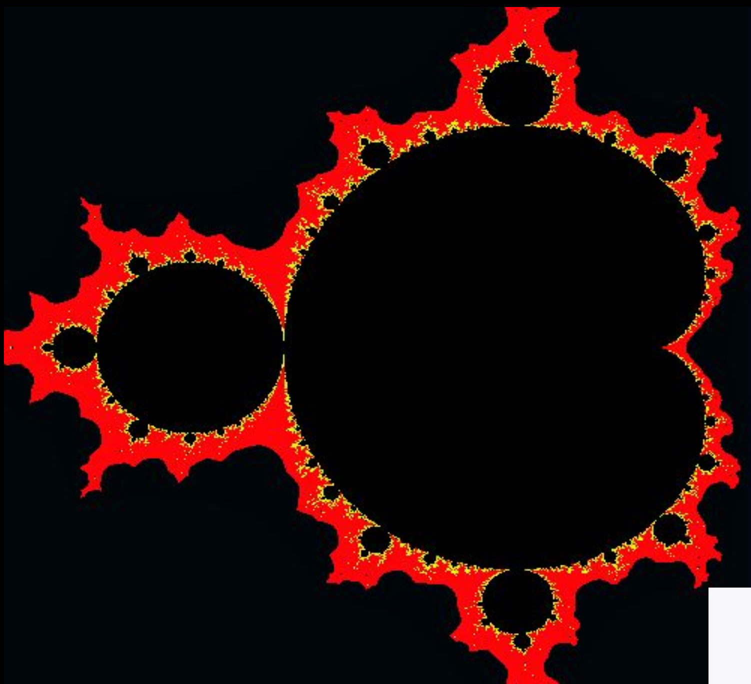
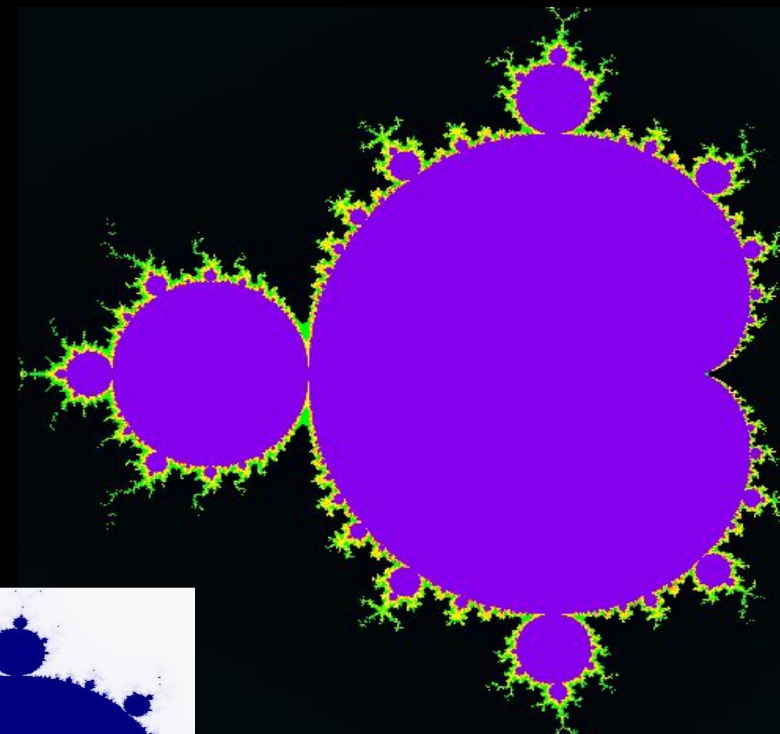
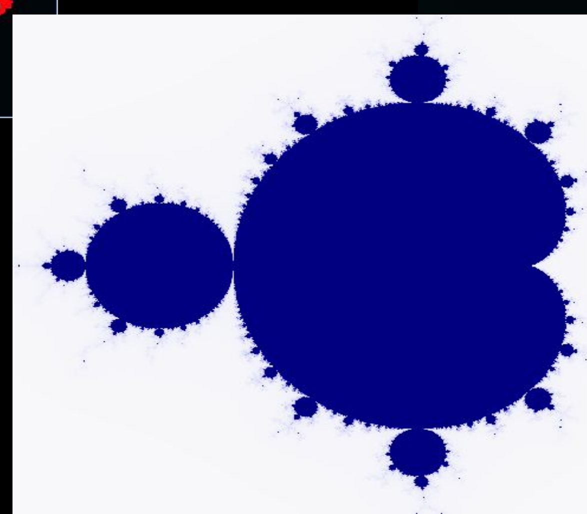
Фрактальное множество Мандельброта

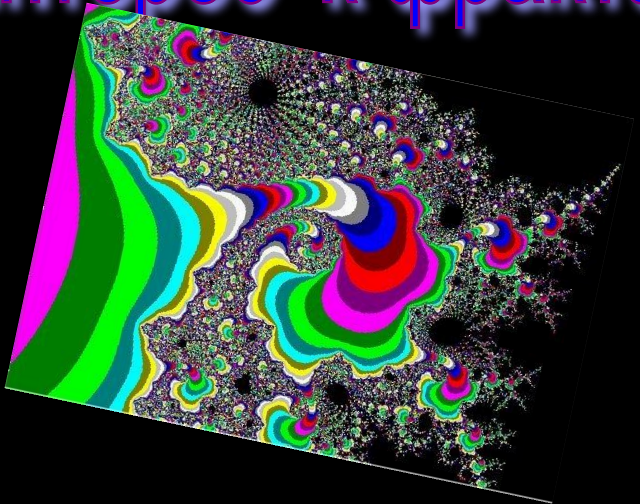






Цель моей работы:

1. Рассказать о фрактальных множествах
2. Рассмотреть применение фракталов
3. Познакомить с многообразием форм фракталов
4. Привить интерес к фрактальной графике

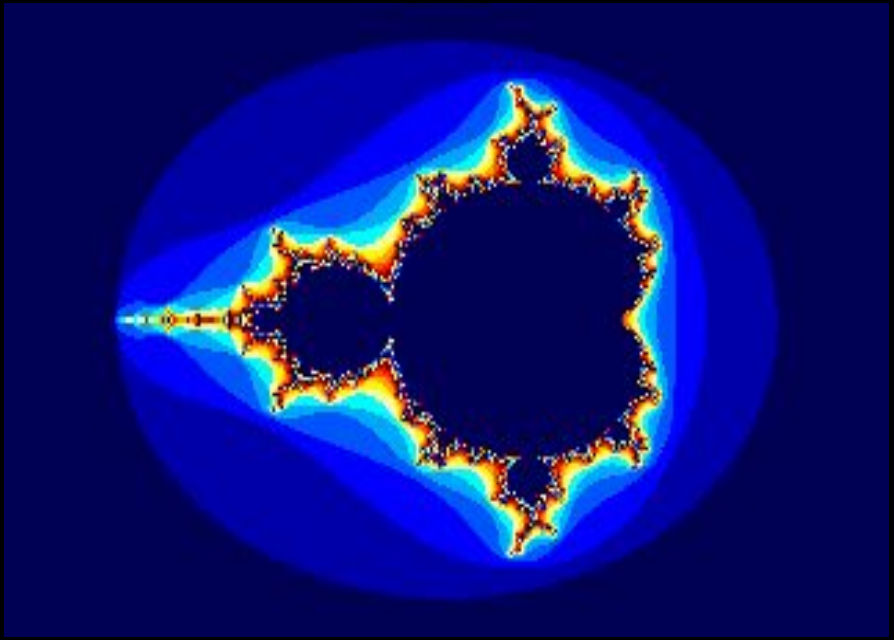


Бенуа Мандельброт.

Бенуа Мандельброт родился в Варшаве в 1924 году. Окончил Парижский университет Сорбонну. Работает в области экономики, географии, физики, математики. Открытие множества самоподобных фракталов стало его своеобразным «автографом». Сегодня Бенуа Мандельброт – профессор Йельского университета, академик, лауреат многих престижных премий.

Множество Мандельброта

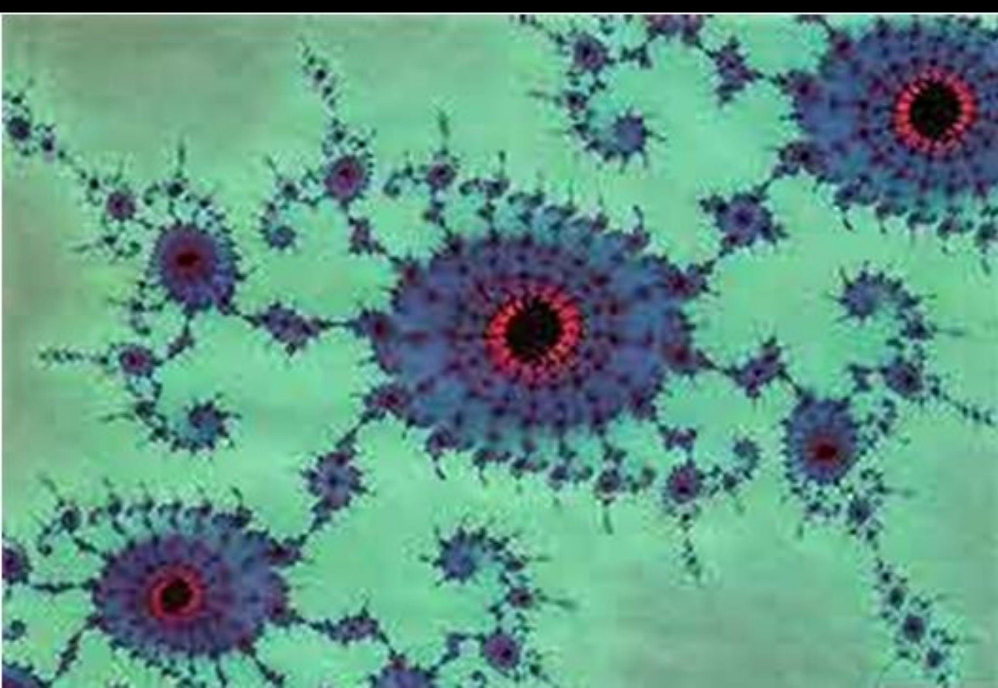
Основную часть множества ограничивает кривая кардиоида. Слева к ней примыкает деформированный круг, между ними – главная впадина. Форма множества повторяется во всё меньших масштабах: в наростах, заливах и мысах.

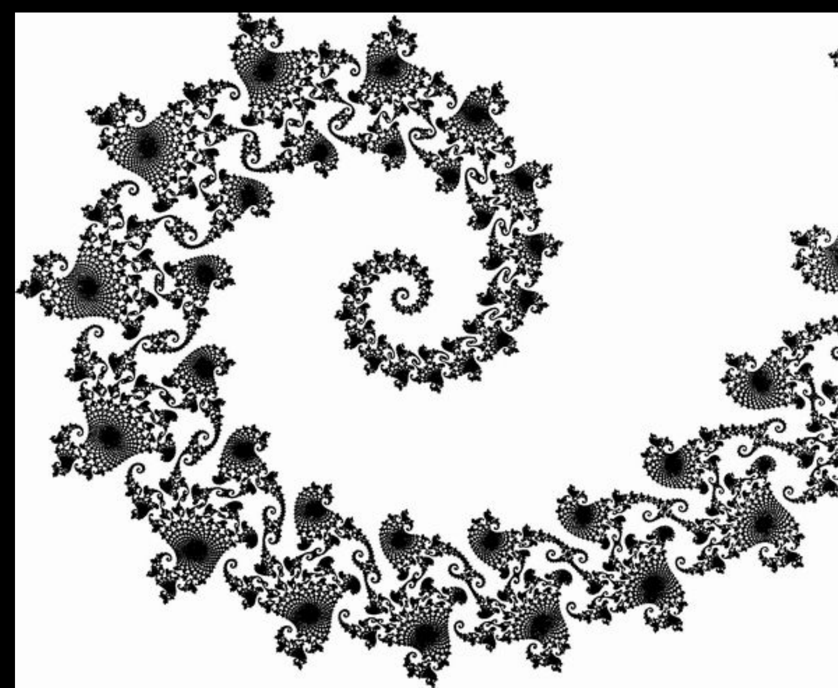


Немного о фракталах.

Понятия фрактал и фрактальная геометрия, появившиеся в конце 70-х, с середины 80-х прочно вошли в обиход математиков и программистов. Слово фрактал образовано от латинского fractus и в переводе означает *состоящий из фрагментов*. Оно было предложено Бенуа Мандельбротом в 1975 году для обозначения нерегулярных, но самоподобных структур, которыми он занимался.

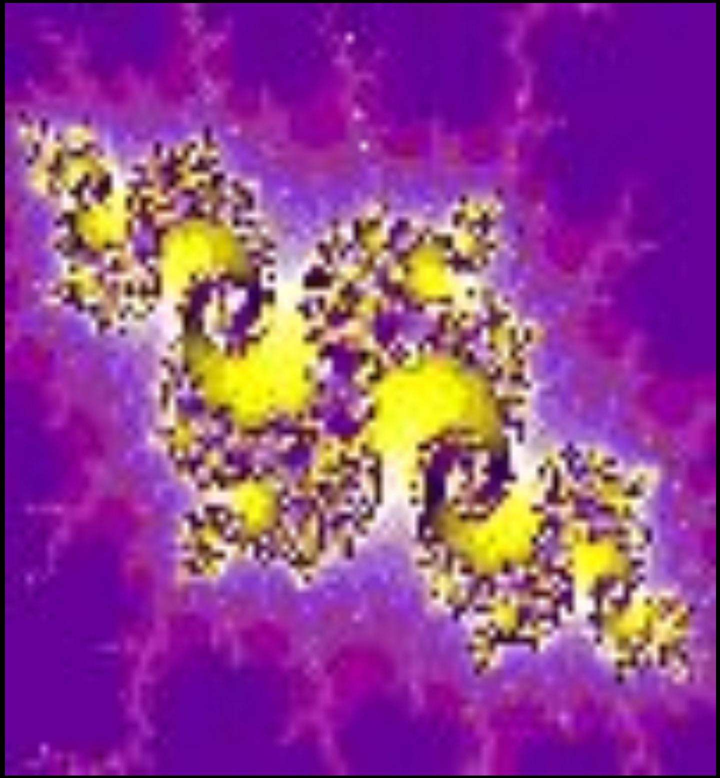
Определение фрактала, данное Мандельбротом, звучит так: *"Фракталом называется структура, состоящая из частей, которые в каком-то смысле подобны целому"*





Характерным свойством множества Мандельброта является самоподобие их отдельных деталей на разных масштабных уровнях рассмотрения. Этот принцип иерархической организации широко распространен в природе и особенно ярко проявляется в мире биологических структур. Убедиться в этом можно, если внимательно рассмотреть лист любого растения или проанализировать форму строения многих живых организмов.

Мы привыкли изображать объекты окружающего нас мира как сплошные тела с четко обозначенными границами. Но далеко не все формы в природе действительно таковы. Достаточно вспомнить облака или морозные узоры на стеклах. Структуры подобного рода принято называть фрактальными. Множество Мандельброта тоже представляют собой фрактальные объекты. Оно не имеет ясно очерченных контуров. Вернее, эти контуры настолько сложны, что мельчайшие их детали теряются в бесконечности. Последовательно увеличивая фрагменты множества Мандельброта , мы будем обнаруживать все новые и новые разнообразные "пейзажи"



ПРИМЕНЕНИЕ ФРАКТАЛОВ

Прежде всего, фракталы - область удивительного математического искусства, когда с помощью простейших формул и алгоритмов получаются картины необычайной красоты и сложности! В контурах построенных изображений нередко угадываются листья, деревья и цветы.

Одни из наиболее мощных приложений фракталов лежат в компьютерной графике. Во-первых, это фрактальное сжатие изображений, и во-вторых построение ландшафтов, деревьев, растений и генерирование фрактальных текстур. Современная физика и механика только-только начинают изучать поведение фрактальных объектов. И, конечно же, фракталы применяются непосредственно в самой математике.

Достоинства алгоритмов фрактального сжатия изображений - очень маленький размер упакованного файла и малое время восстановления картинки. Фрактально упакованные картинки можно масштабировать без появления пикселизации. Но процесс сжатия занимает продолжительное время и иногда длится часами. Алгоритм фрактальной упаковки с потерей качества позволяет задать степень сжатия, аналогично формату jpeg. В основе алгоритма лежит поиск больших кусков изображения подобных некоторым маленьким кусочкам. И в выходной файл записывается только какой кусочек какому подобен. При сжатии обычно используют квадратную сетку (кусочки - квадраты), что приводит к небольшой угловатости при восстановлении картинки, шестиугольная сетка лишена такого недостатка.

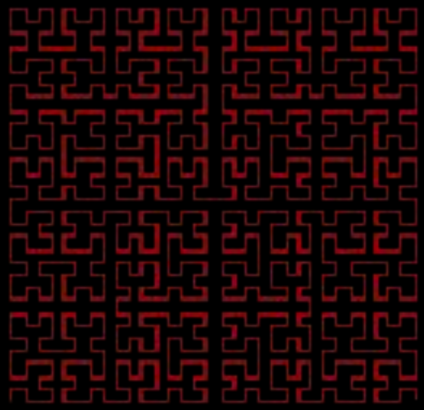
Поиск красивых изображений множества Мандельброта — интересное хобби для многих людей. Они собирают коллекции таких изображений, причём каждое из них может быть описано небольшим количеством параметров, например, просто координатами центра.

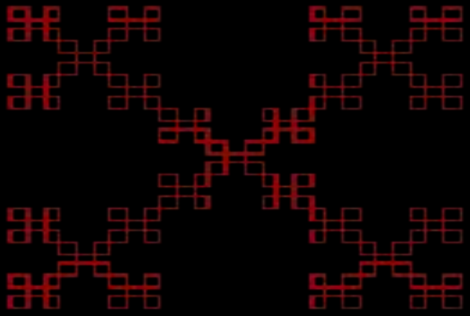
Фрактальная наука еще очень молода, и ей предстоит большое будущее. Красота фракталов далеко не исчерпана и еще подарит нам немало шедевров - тех, которые услаждают глаз, и тех, которые доставляют истинное наслаждение разуму.

Классификация фракталов

1. Геометрические фракталы.

Фракталы этого класса самые наглядные. В двухмерном случае их получают с помощью ломаной (или поверхности в трехмерном случае), называемой генератором. За один шаг алгоритма каждый из отрезков, составляющих ломаную, заменяется на ломаную-генератор в соответствующем масштабе. В результате бесконечного повторения этой процедуры получается геометрический фрактал.



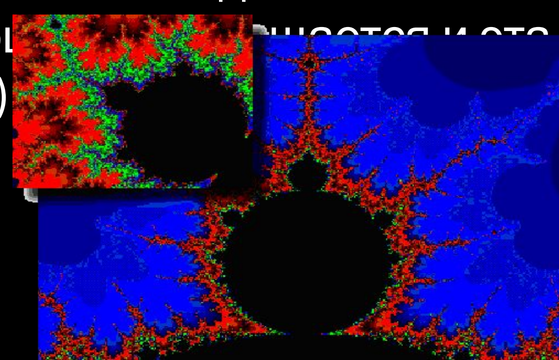


Классификация фракталов

2.Алгебраические фракталы

Множество Мандельброта.

В качестве примера рассмотрим множество Мандельброта. Алгоритм его построения достаточно прост и основан на простом итеративном выражении: **Z[i+1] = Z[i] * Z[i] + C**, где **Zi** и **C** - комплексные переменные. Итерации выполняются для каждой стартовой точки с прямоугольной или квадратной области - подмножестве комплексной плоскости. Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока **Z[i]** не выйдет за пределы окружности радиуса 2, центр которой лежит в точке (0,0), (это означает, что аттрактор динамической системы находится в бесконечности), или после достаточно большого числа итераций (например 200-500) **Z[i]** сойдется к какой-нибудь точке окружности. В зависимости от количества итераций, в течении которых **Z[i]** оставалась внутри окружности, можно установить цвет точки **C** (если **Z[i]** остается внутри окружности в течение достаточно большого количества итераций, итерационный проц точка растра окрашивается в черный цвет)



Как же строится множество Мандельброта?

1. Множество Мандельброта - самый известный фрактал в мире. Он также является классическим примером фрактала с временным порогом. Точки, составляющие множество Мандельброта, изображаются на комплексной плоскости, которая очень похожа на систему координат Oxy. Но если на обычной координатной плоскости изображаются действительные числа, то комплексная плоскость содержит комплексные числа - числа, с действительной и мнимой частью. Это полностью 'переворачивает' обычные правила математики и приводит к очень необычным результатам.
2. Для каждой точки на экране компьютер проводит серию вычислений, используя соответствующую точку на комплексной плоскости. Координаты точки входят в простое уравнение, по которому определяется новая пара координат. Эти координаты подставляются опять в то же уравнение и получается еще одна пара координат. Многократно повторяя этот процесс - обычно несколько сотен раз - получаем набор координат, определяющий мнимый путь, называемый орбитой. Хотя эта орбита полностью лежит в комплексной плоскости (она имеет 2 измерения, а не три), она нарисована здесь возвышающейся над плоскостью для лучшего зрительного восприятия.
3. Если орбита точки никогда не 'убегает' из цилиндра определенного диаметра расположенного в начале координат комплексной плоскости, то говорится, что эта точка - элемент множества Мандельброта. Точки, удовлетворяющие этому критерию, обычно закрашиваются черным цветом.
4. Если орбита точки 'убегает' из цилиндра, то соответствующему пикселю приписывается цвет, который отображает число точек орбиты, посчитанных прежде, чем эта точка выйдет из цилиндра. Этот промежуток времени, необходимый для выхода орбитальных точек из цилиндра называется временем убегания (escape-time).
5. Когда эта процедура будет применена к каждому пикселю на экране, будет сгенерировано разноцветное изображение множества Мандельброта. Меняя уравнения для расчета орбит, но оставив тот же общий метод, получим другие сложные, детализированные фракталы с временным порогом.

Классификация фракталов

3.Стохастические фракталы

Еще одним известным классом фракталов являются стохастические фракталы, которые получаются в том случае, если в итерационном процессе хаотически менять какие-либо его параметры. При этом получаются объекты очень похожие на природные - несимметричные деревья, изрезанные береговые линии и т.д. Двумерные стохастические фракталы используются при моделировании рельефа местности и поверхности моря .

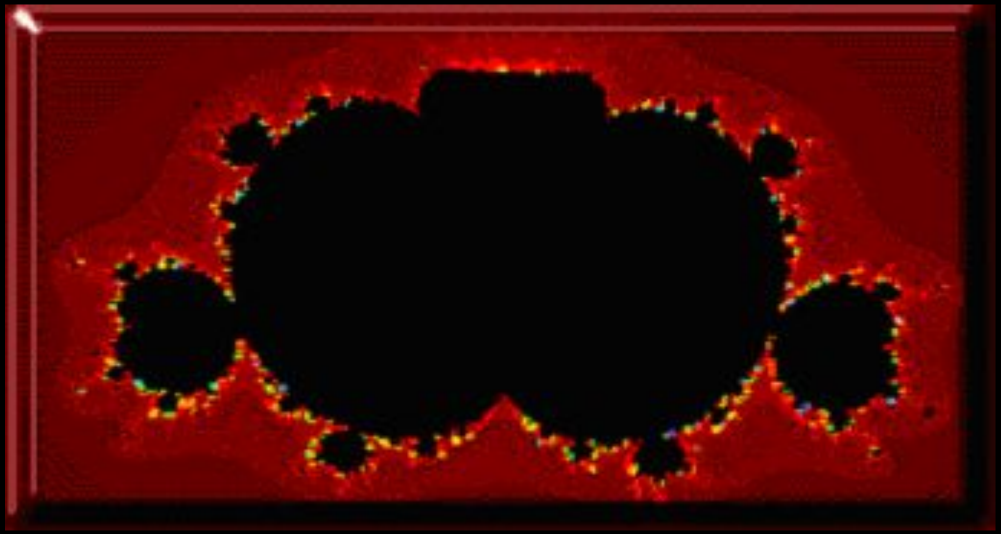
Фрактальные деревья



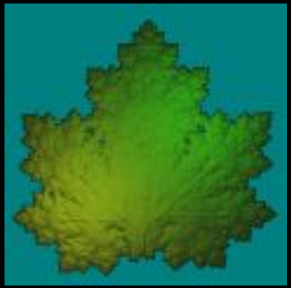


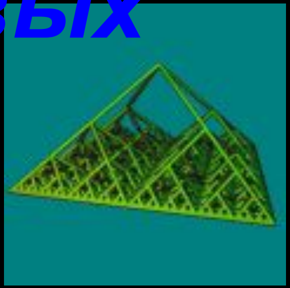
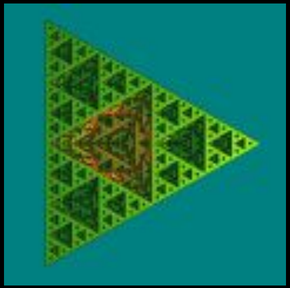
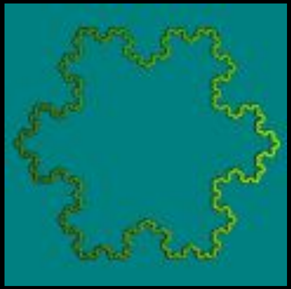
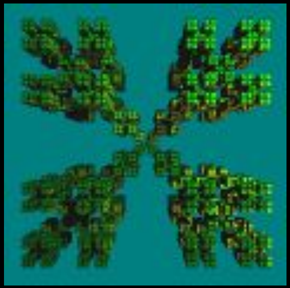
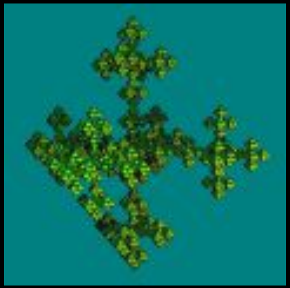
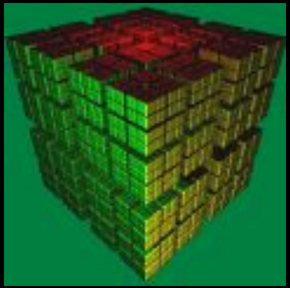
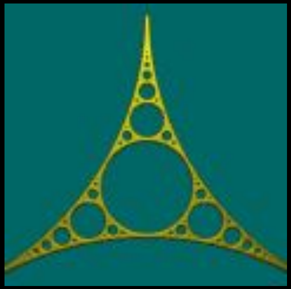
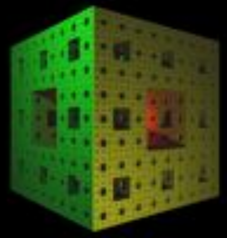

Фрактальное множество Мандельброта относится к ряду сложных фракталов

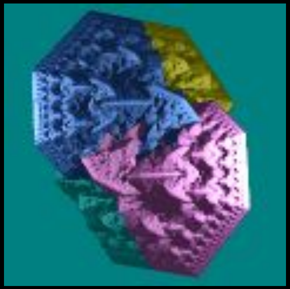
Популярен процесс Z=Z*tg(Z+C). Благодаря включению функции тангенса, получается множество Мандельброта, окруженное областью, напоминающей яблоко. При использовании функции косинуса, получаются эффекты воздушных пузырьков. Короче говоря, существует бесконечное количество способов настройки множества Мандельброта для получения различных красивых картинок.



Сказочный мир фрактальных кривых

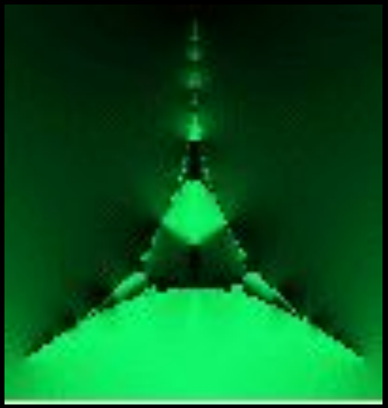
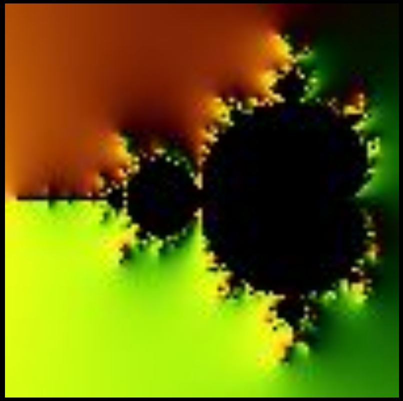
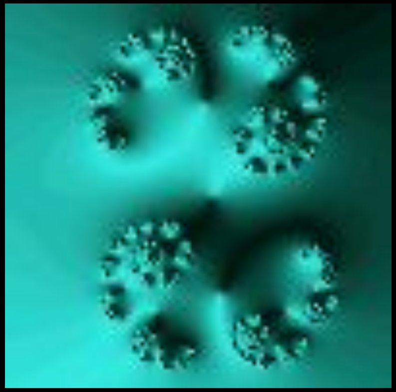
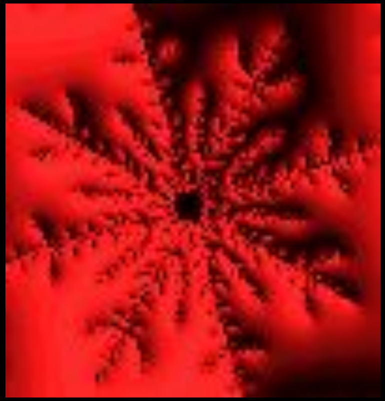
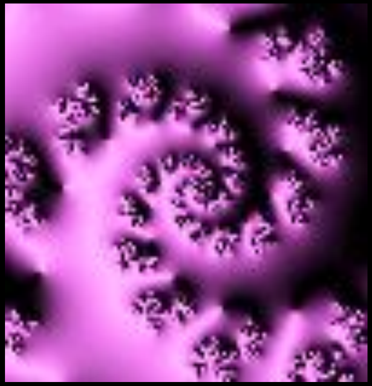




Сказочный мир фрактальных кривых



Сказочный мир фрактальных кривых