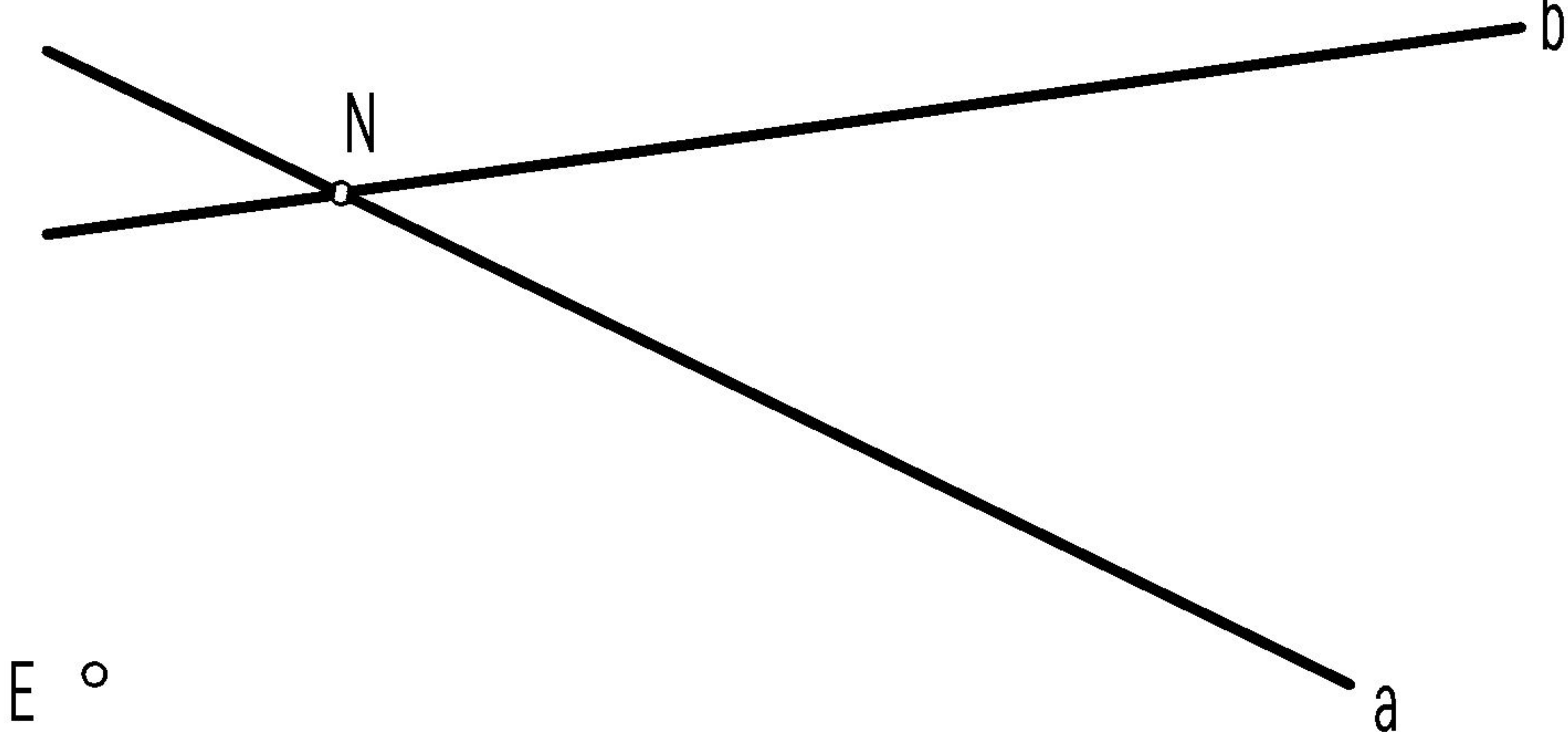
РАЗДЕЛ НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

- Чертеж – международный язык общения техников.
- Начертательная геометрия – грамматика этого языка (чертежа).
- Начертательная геометрия изучает методы построения изображений пространственных объектов на плоскости, а также способы преобразования полученных изображений для упрощения решения различных инженерных задач.

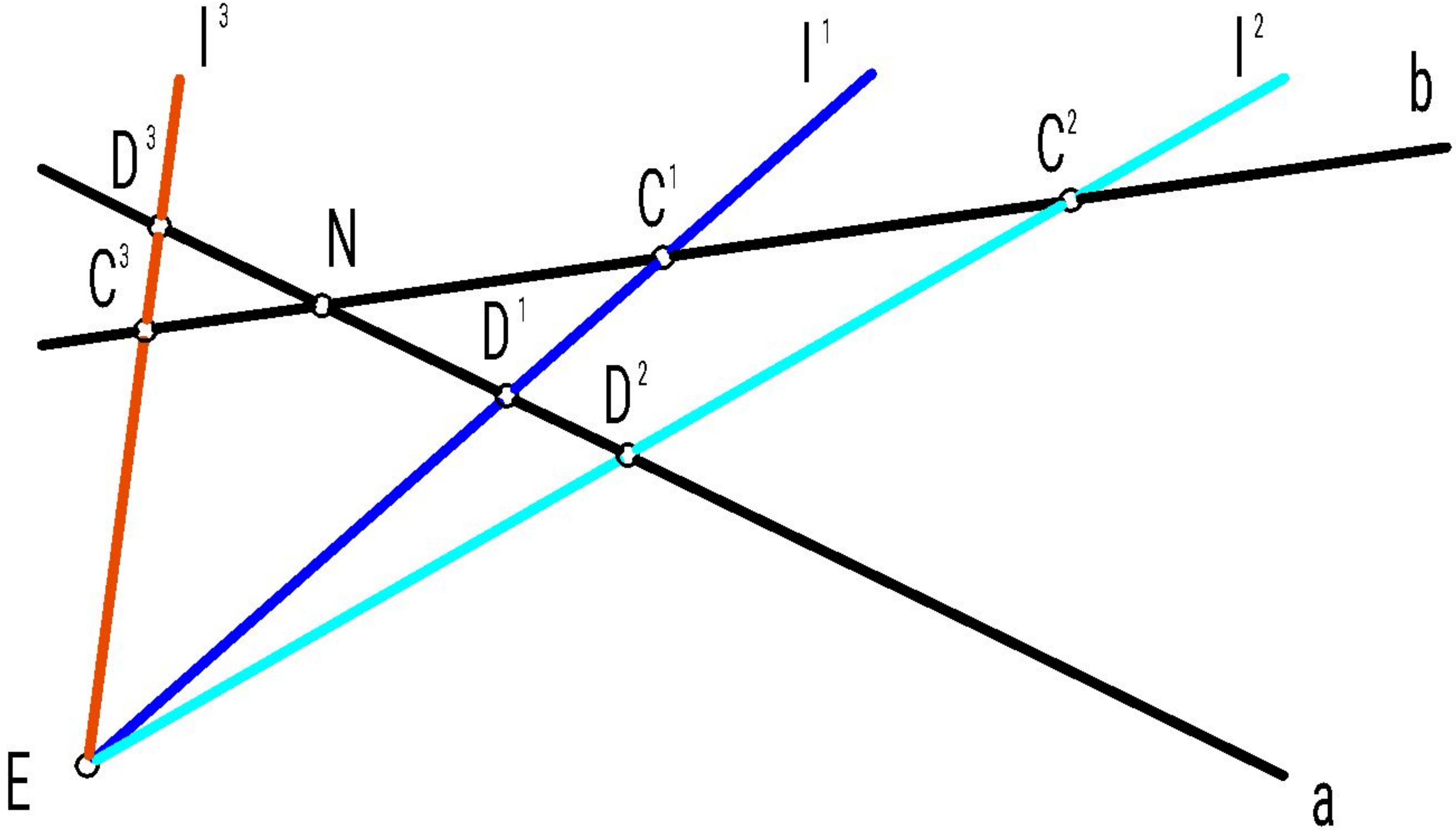
Базовые геометрические элементы начертательной геометрии

- **Точка** – абстрактное математическое понятие. Нульмерный объект (не имеет измерений).
- **Линия** – непрерывное одномерное множество точек (цепочка точек). Измерение : только длина. Толщины нет.
- **Поверхность** – непрерывное двумерное множество точек. Измерения : длина, ширина, площадь. Толщины и объема нет.

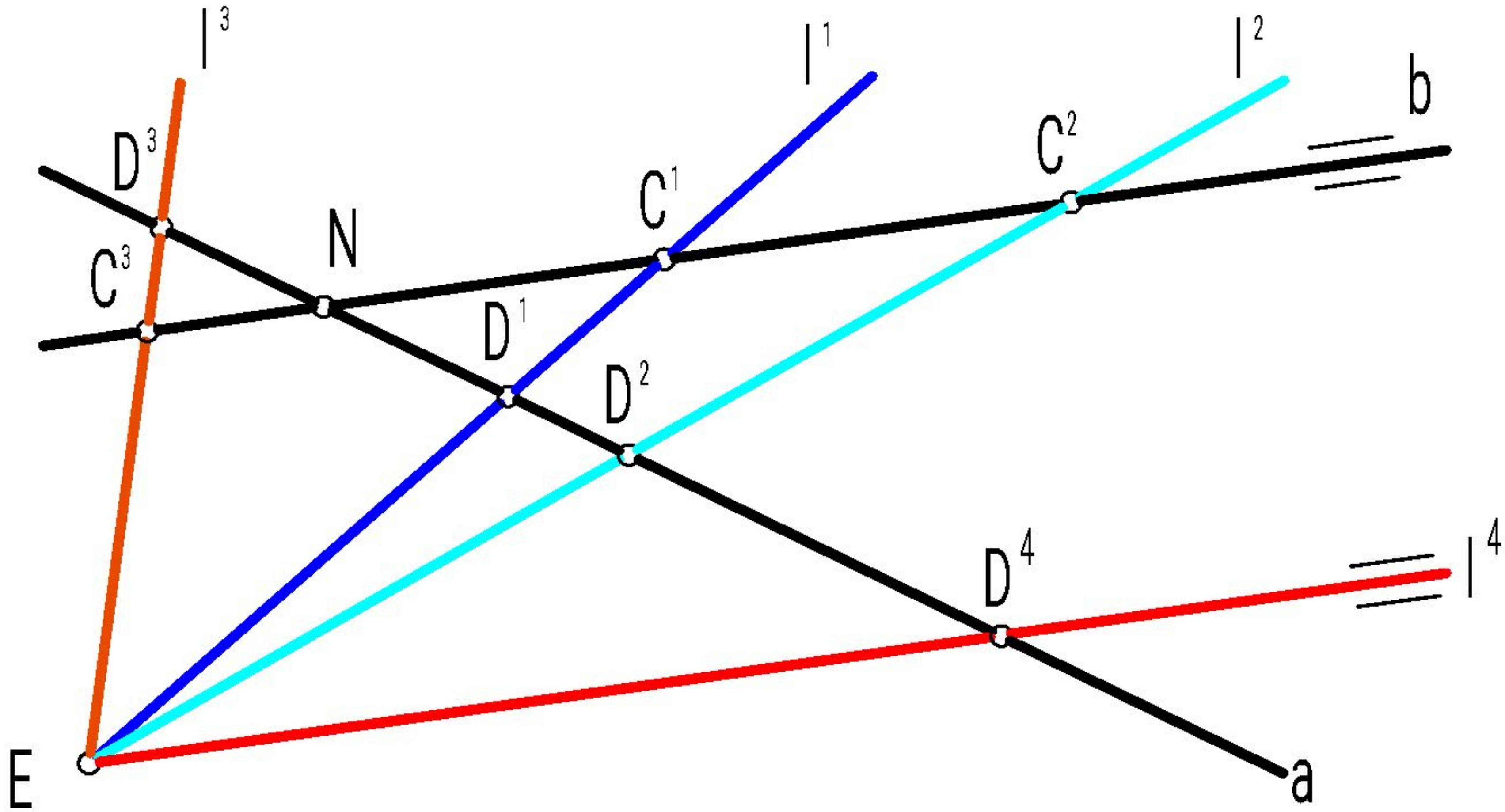
Проективное пространство



В плоскости заданы две пересекающиеся прямые $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ и точка $\boldsymbol{E}$.



В этой же плоскости через точку $\boldsymbol{E}$ проведем прямые l^1,l^2, l^3 пересекающие прямые $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.
в точках D^1, D^2, D^3 и C^1, C^2, C^3 соответственно.
В результате получаем однозначное соответствие
точек D^1, D^2, D^3 прямой $\boldsymbol{a}$ точкам C^1, C^2, C^3 прямой $\boldsymbol{b}$.



Через точку E проведем прямую l^4 параллельно прямой b.

$l^4 \cap a = D^4$; $l^4 \parallel b \Rightarrow l^4 \not\cap b$

Точке D^4 прямой a нет соответствующей точки C^4 прямой b.

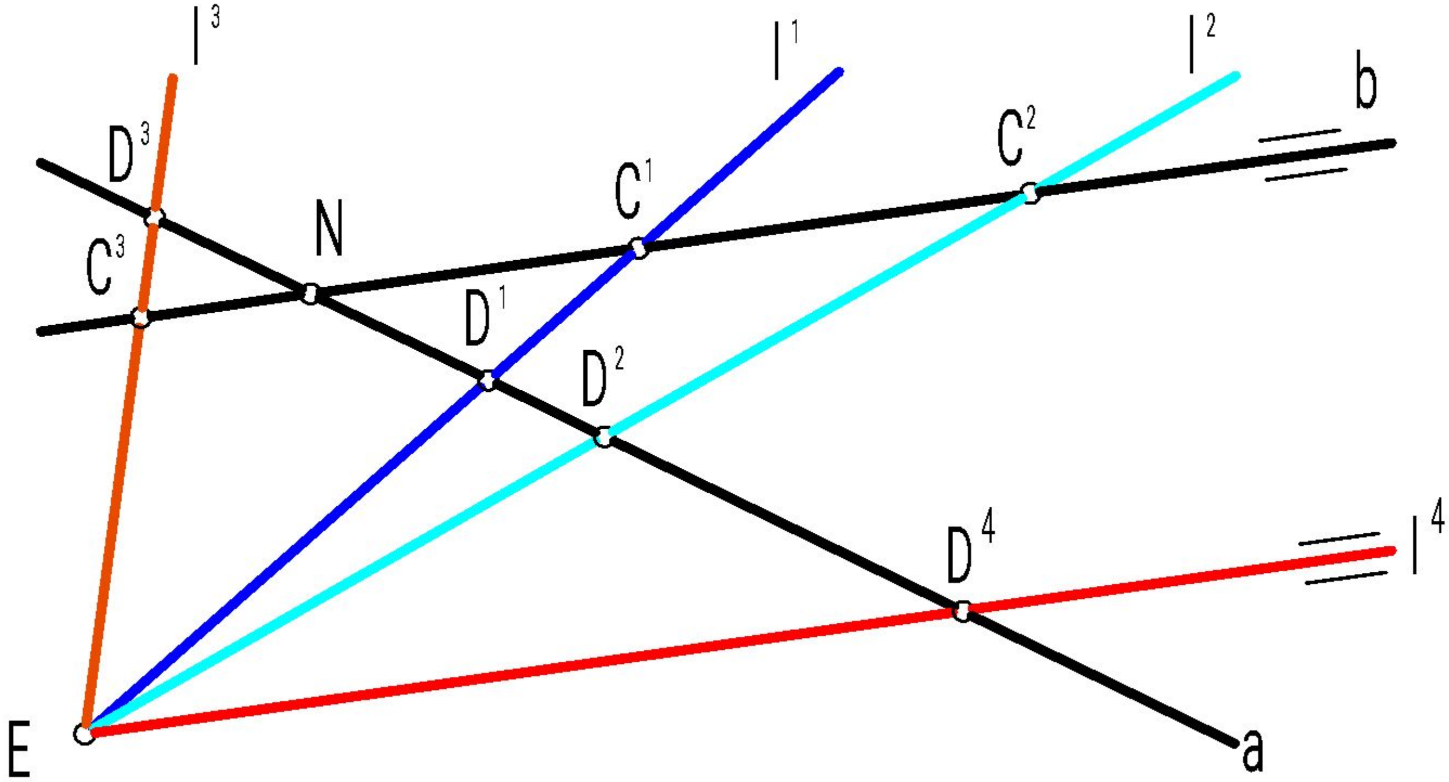
Евклидово пространство неоднородно

Для устранения неоднородности Евклидова пространства

условно принято,

что параллельные между собой прямые **пересекаются** *в бесконечно удаленной точке F^∞ - несобственной точке пространства.*

$$(m \parallel n) \Rightarrow (m \cap n = F^\infty)$$



Тогда, если $l^4 \parallel b$, то $l^4 \cap b = C^{\infty}$.

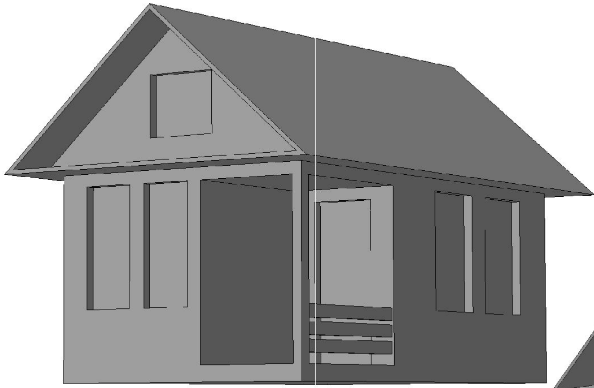
Следовательно, точке D^4 прямой a однозначно соответствует несобственная точка C^{∞} прямой b.

Евклидово пространство становится однородным.

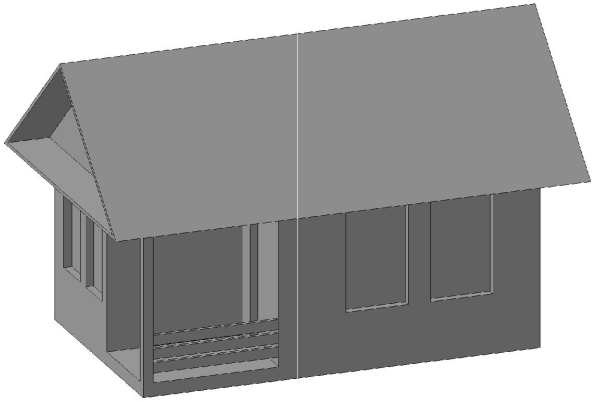
Евклидово пространство, дополненное несобственными элементами,

называют <u>проективным</u>.

Метод проецирования



Перспективная проекция

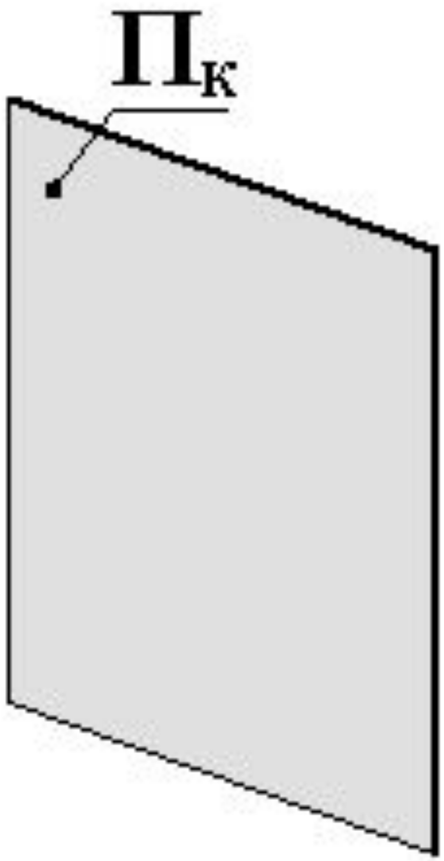


Аксонометрическая проекция

Ортогональные проекции

Все изображения разные, но их объединяет то, что в основе их построения лежит один и тот же метод – **метод проецирования.**

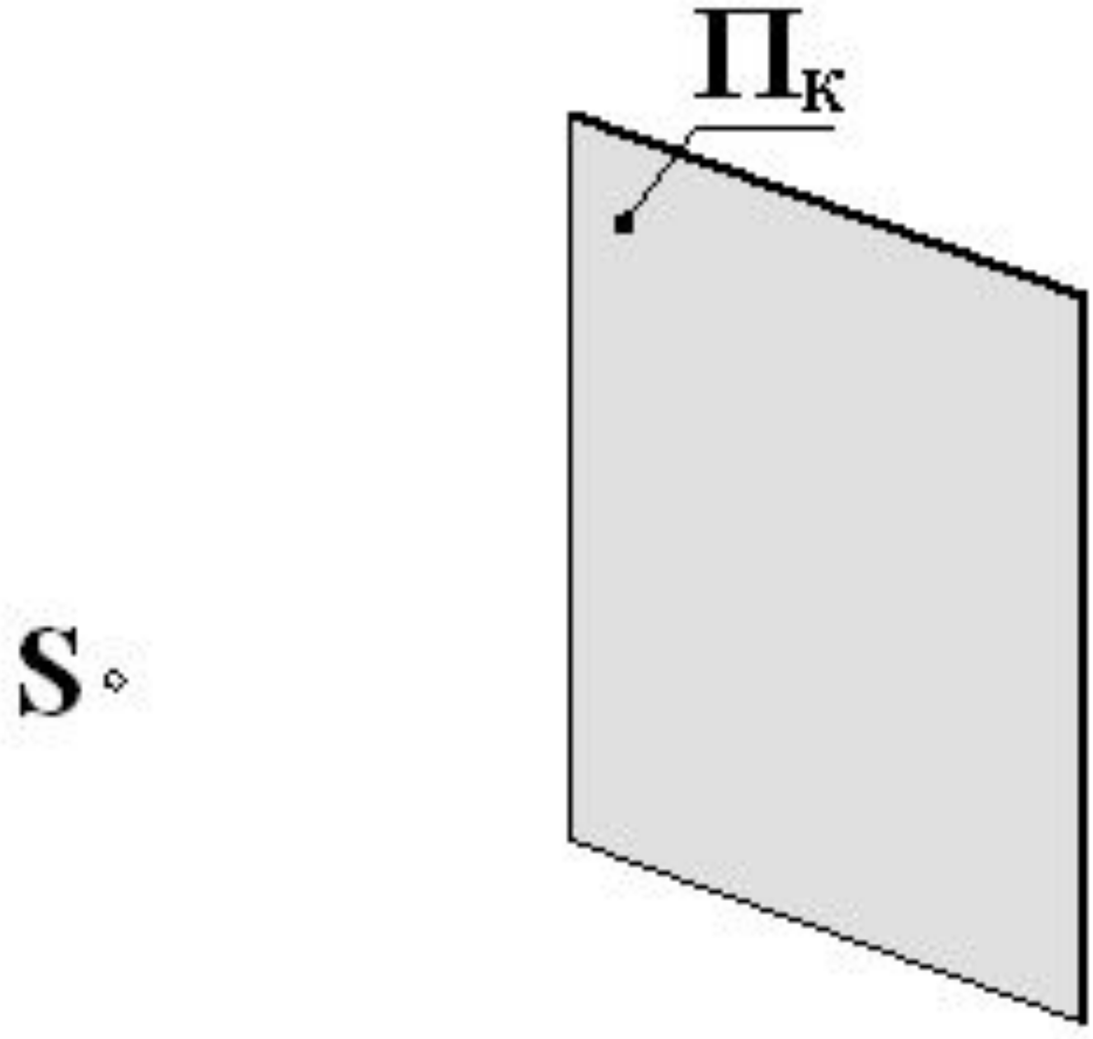
Все изображения, построенные на основе метода проецирования, называются проекционными



Задаем произвольную плоскость $П_к$

$П_к$ – плоскость проекций

k – порядковый номер плоскости, k =1, 2, 3, …, n



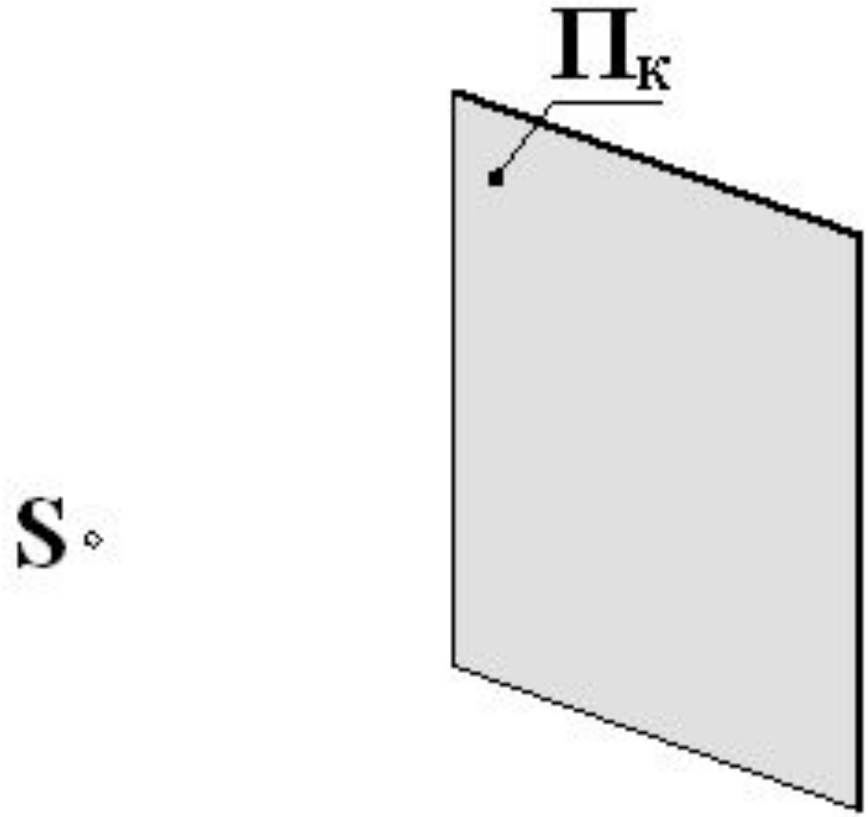
Задаем произвольную точку S

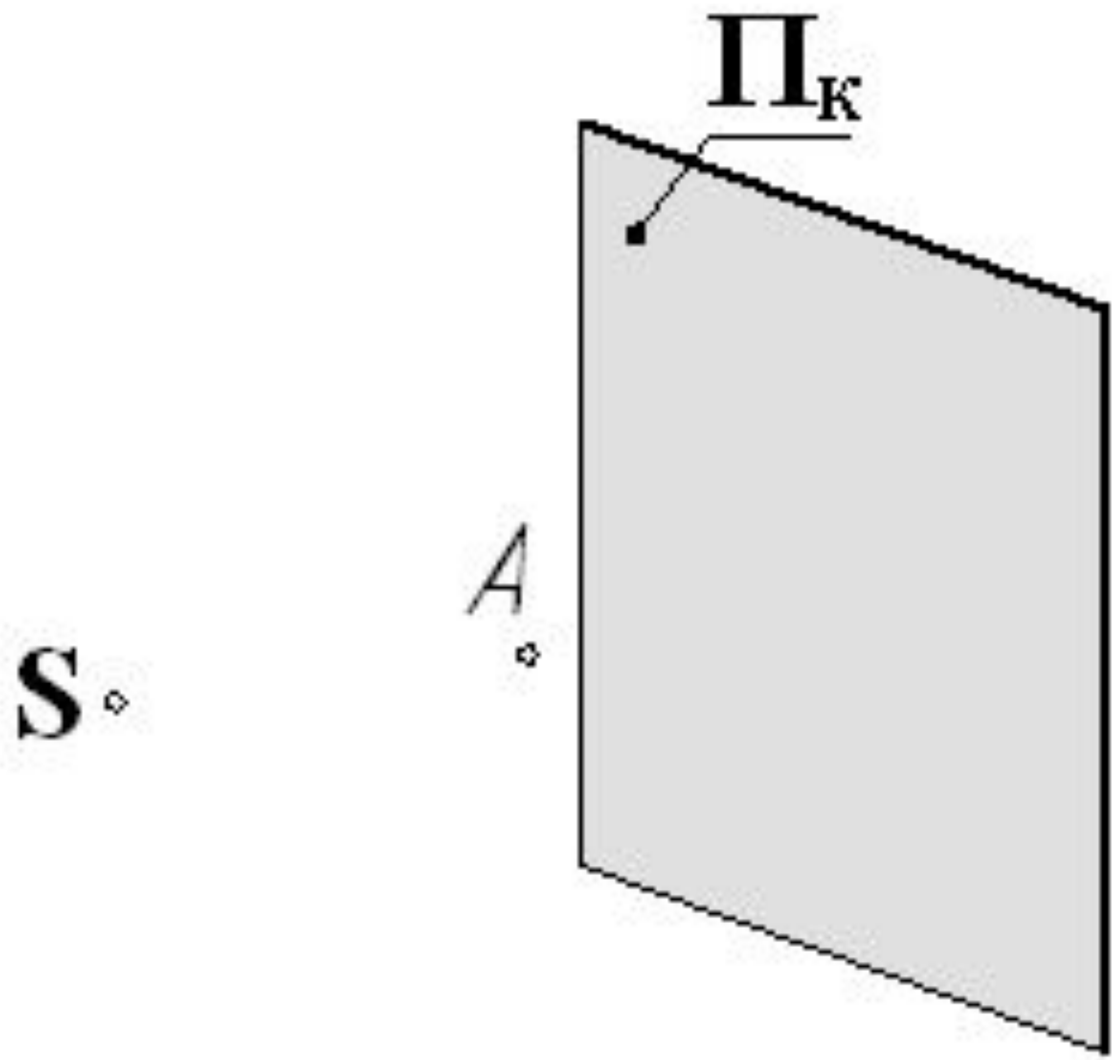
S – центр проецирования

Аппарат проецирования

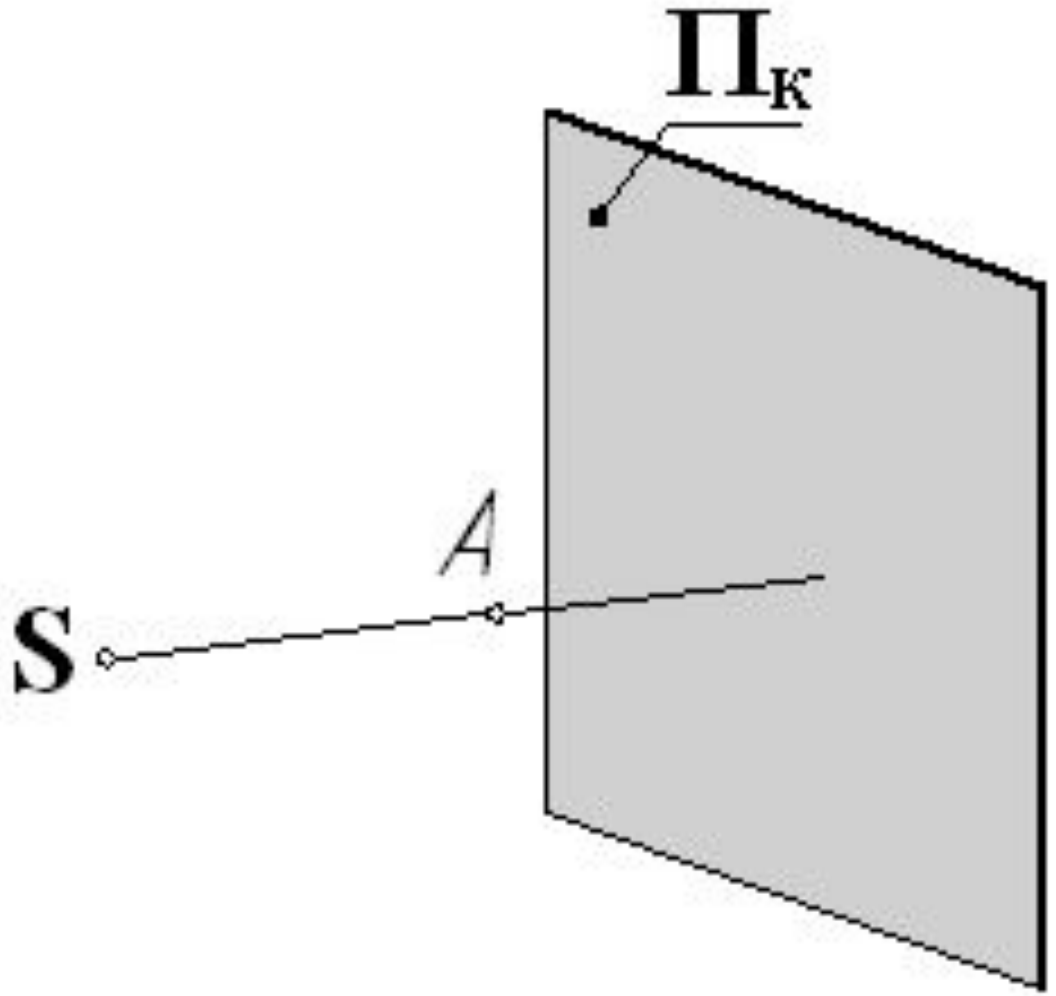
$П_к$ – плоскость проекций

S – центр проецирования



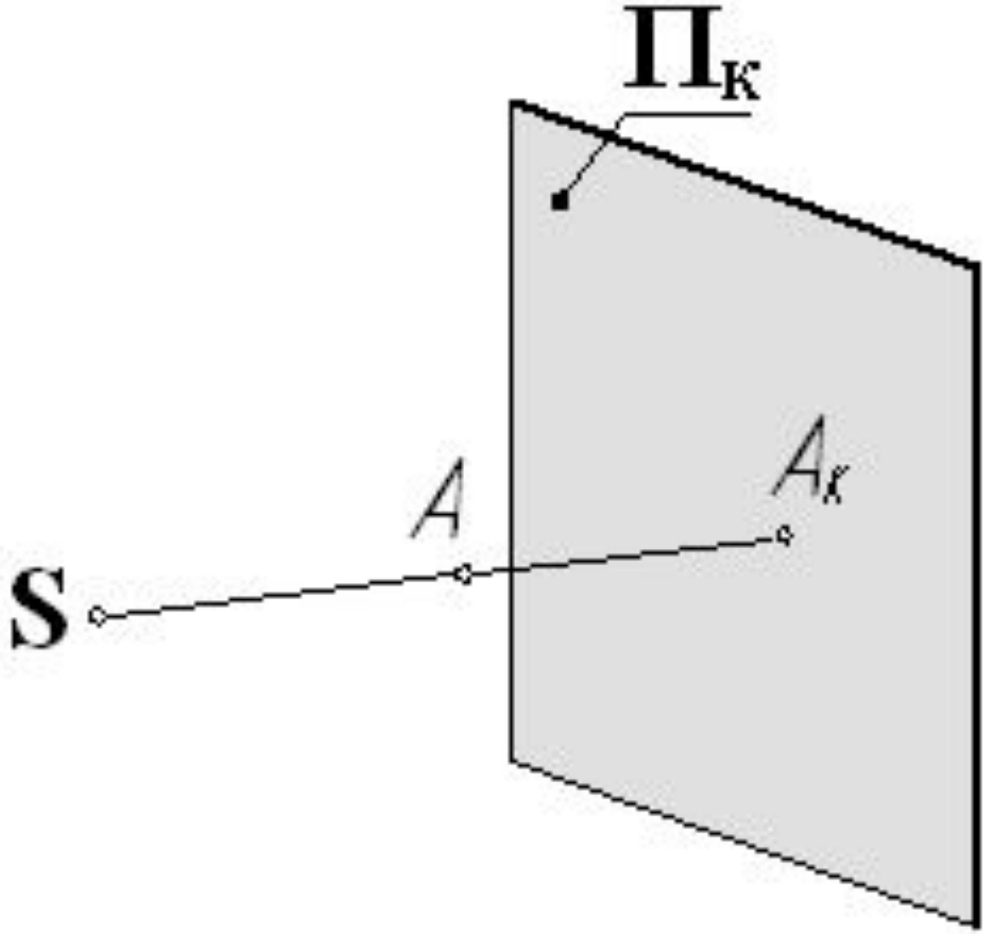


В качестве объекта взята произвольная точка **A**



Для получения изображения точки *A* на плоскости проекций $\mathbf{П_к}$ проведем из центра проецирования **S** прямую ***SA*.**

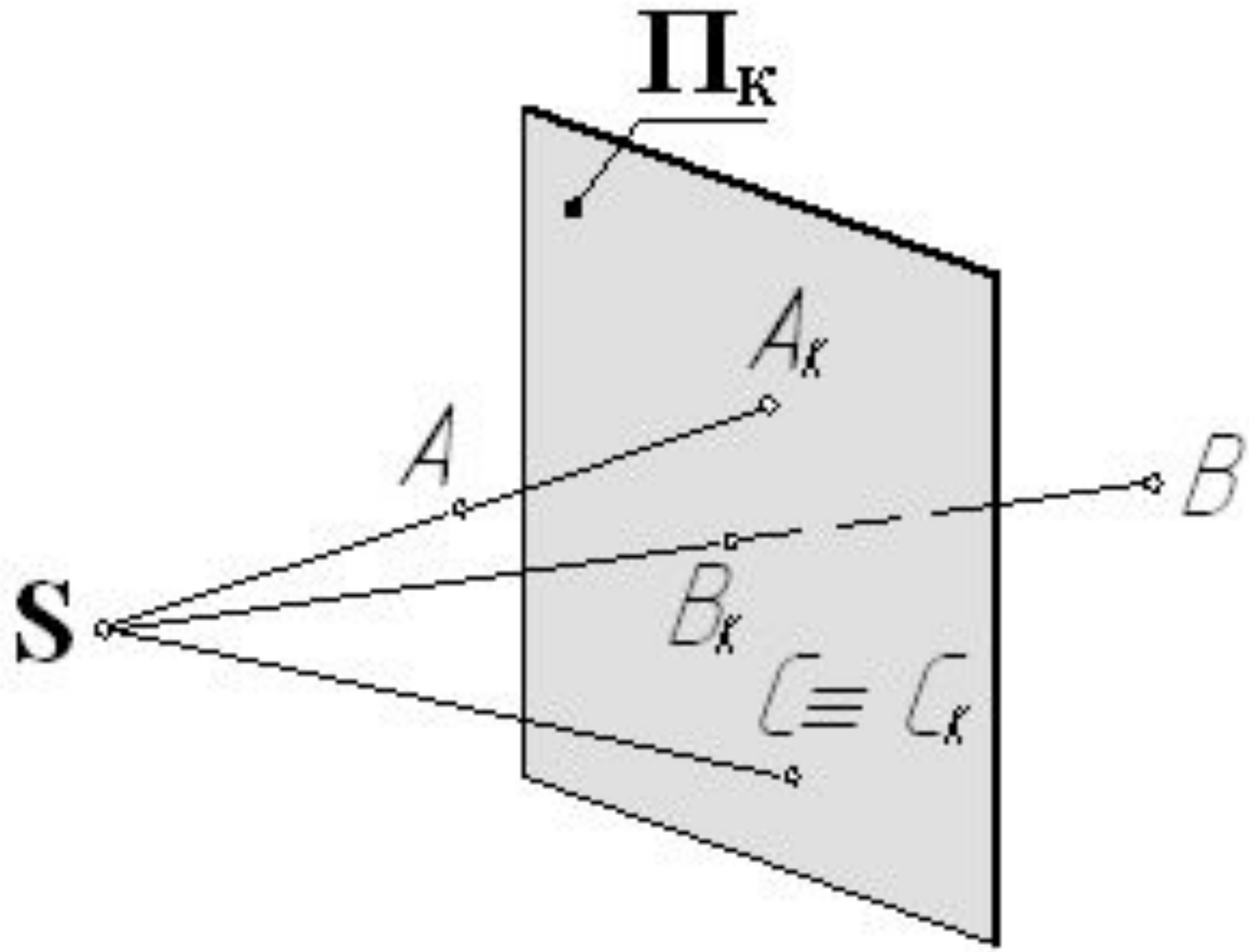
S*A* – проецирующая прямая (луч)



Определим точку пересечения проецирующей прямой **SA** с выбранной плоскостью проекций $\mathbf{П_к}$.

$$\mathbf{S}A \cap \mathbf{П_к} = A_к$$

$A_к$ – проекция точки A на плоскости проекций $\mathbf{П_к}$



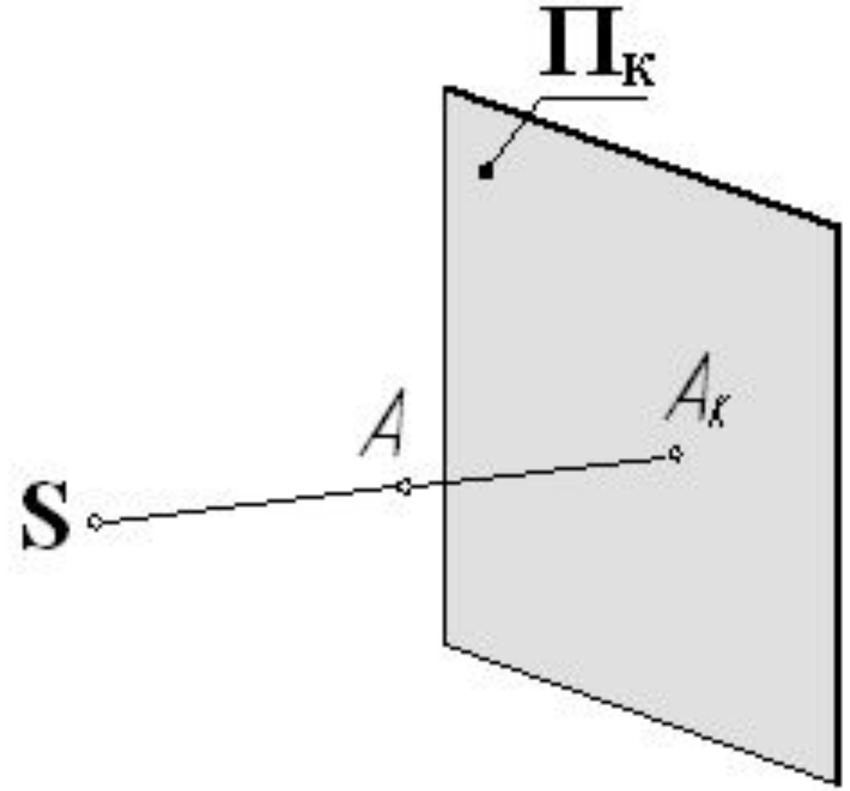
Для любой точки пространства

$SA \cap П_к = A_к$ $SB \cap П_к = B_к$ $SC \cap П_к = C_к$

$SA \cap SB \cap SC \cap \ldots = S$

Метод проецирования

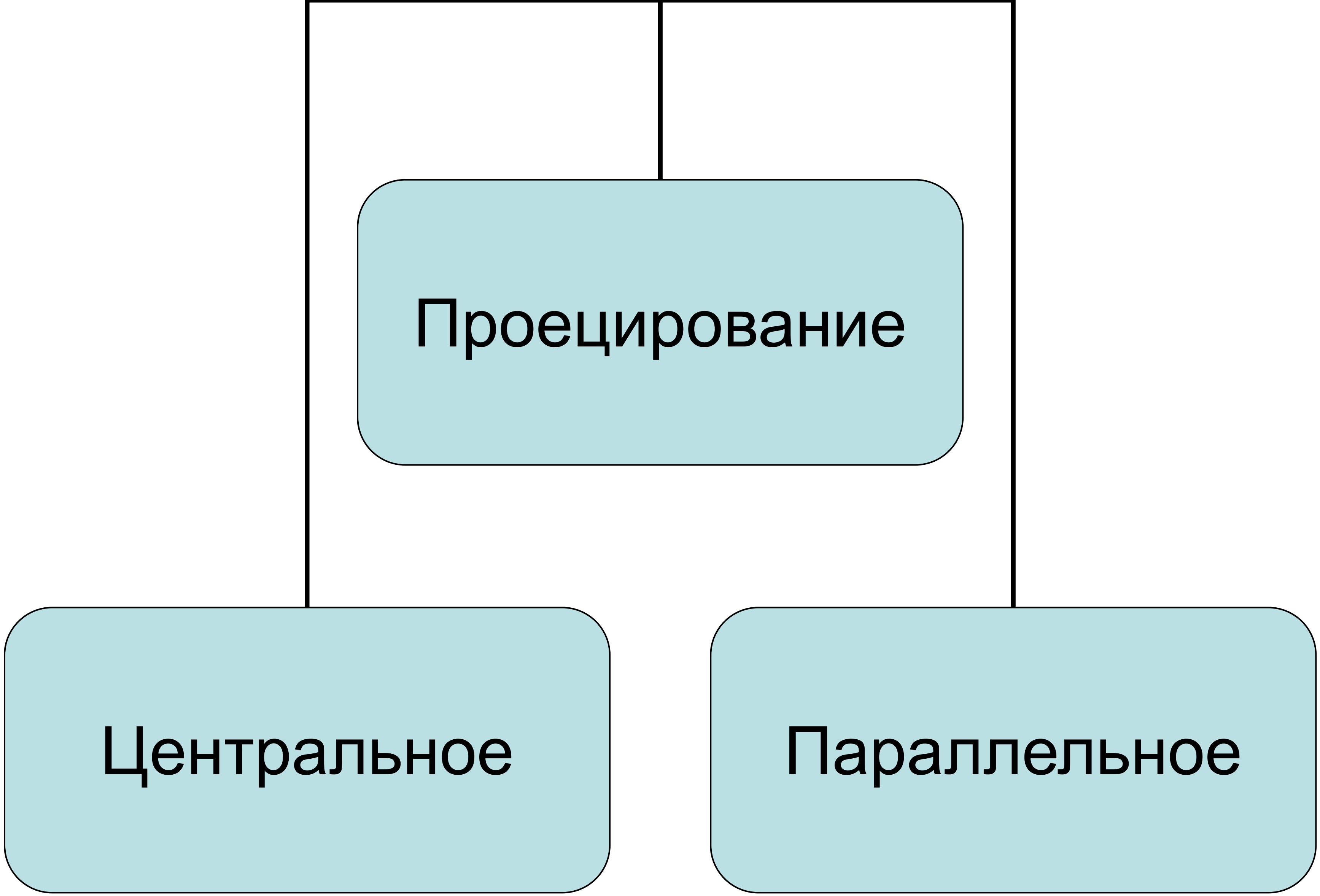
$\Pi_к$ – плоскость проекций
S – центр проецирования
SA – проецирующая прямая
A – объект (точка)



$$SA \cap \Pi_к = A_к$$

$A_к$ – проекция объекта (точки) *A* на плоскости проекций $\Pi_к$

Варианты метода проецирования

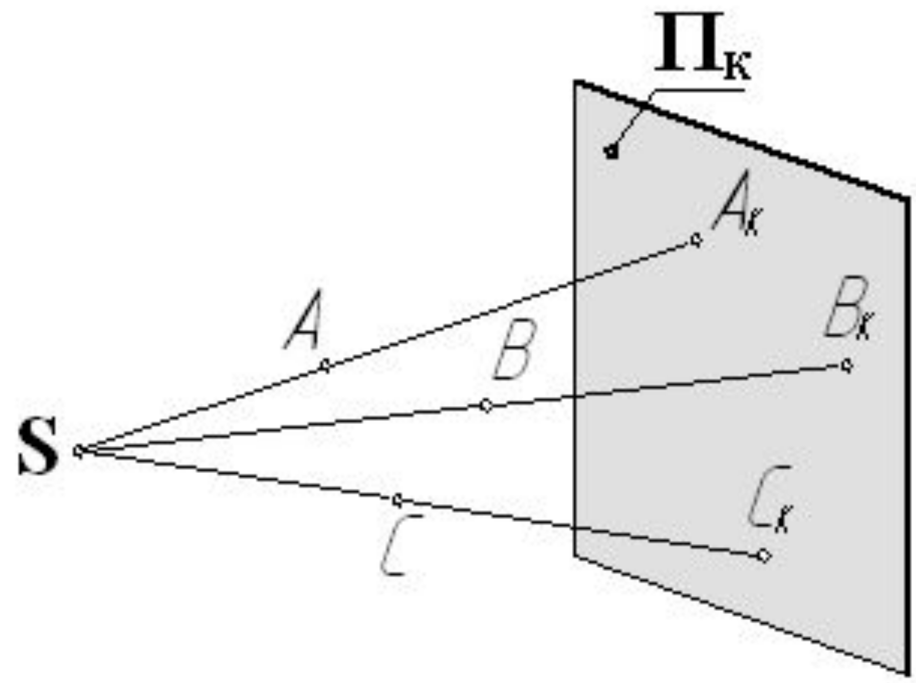

Проецирование
Центральное
Параллельное

Центральное проецирование
(коническое)

S (центр проецирования)– реальная точка.

Расстояние от **S** до плоскости проекций $\mathbf{П_к}$ измеримая величина.

$$SA \cap SB \cap SC \ldots = S$$

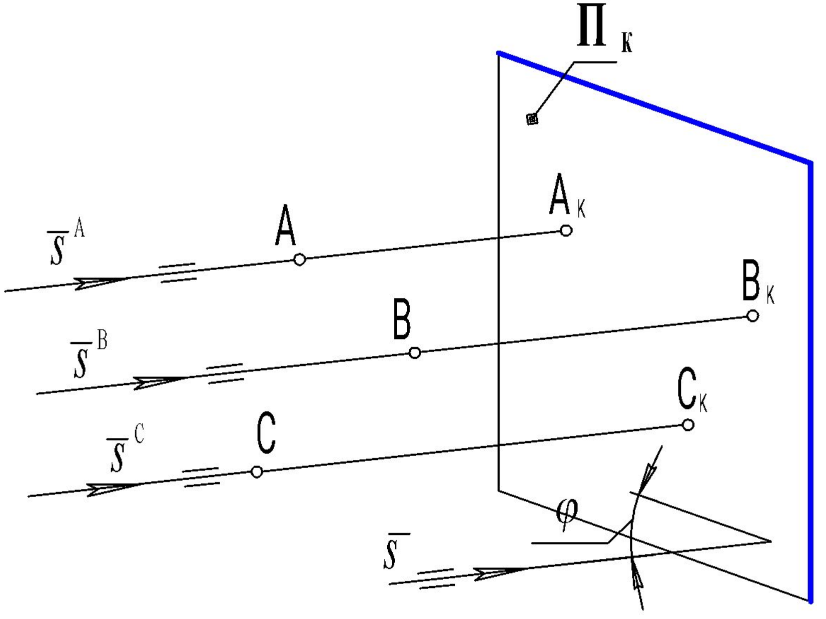


Параллельное проецирование (цилиндрическое)

S (центр проецирования) – несобственная точка.

$$S \equiv S^{\infty}$$

$$SA \cap SB \cap SC \ldots = S^{\infty}$$



следовательно

$$S^{\infty}A \parallel S^{\infty}B \parallel S^{\infty}C \parallel \ldots \parallel s$$

s – направление проецирования; $S^{\infty} \in s$

Параллельное проецирование

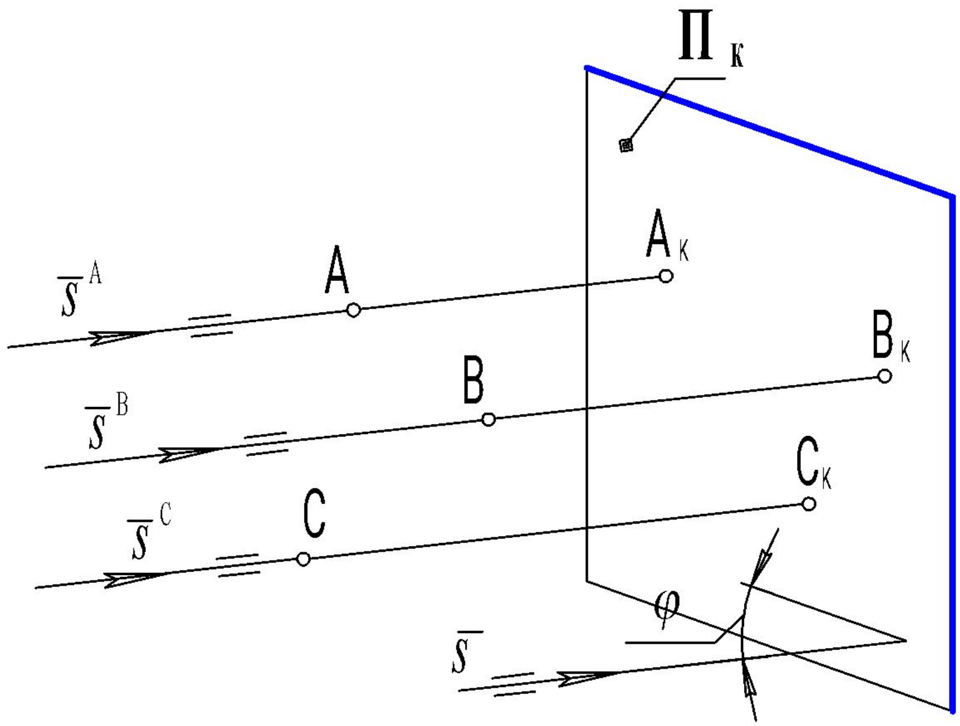
Косоугольное

Направление проецирования не перпендикулярно плоскости проекций

Прямоугольное

Направление проецирования перпендикулярно плоскости проекций

Параллельное проецирование

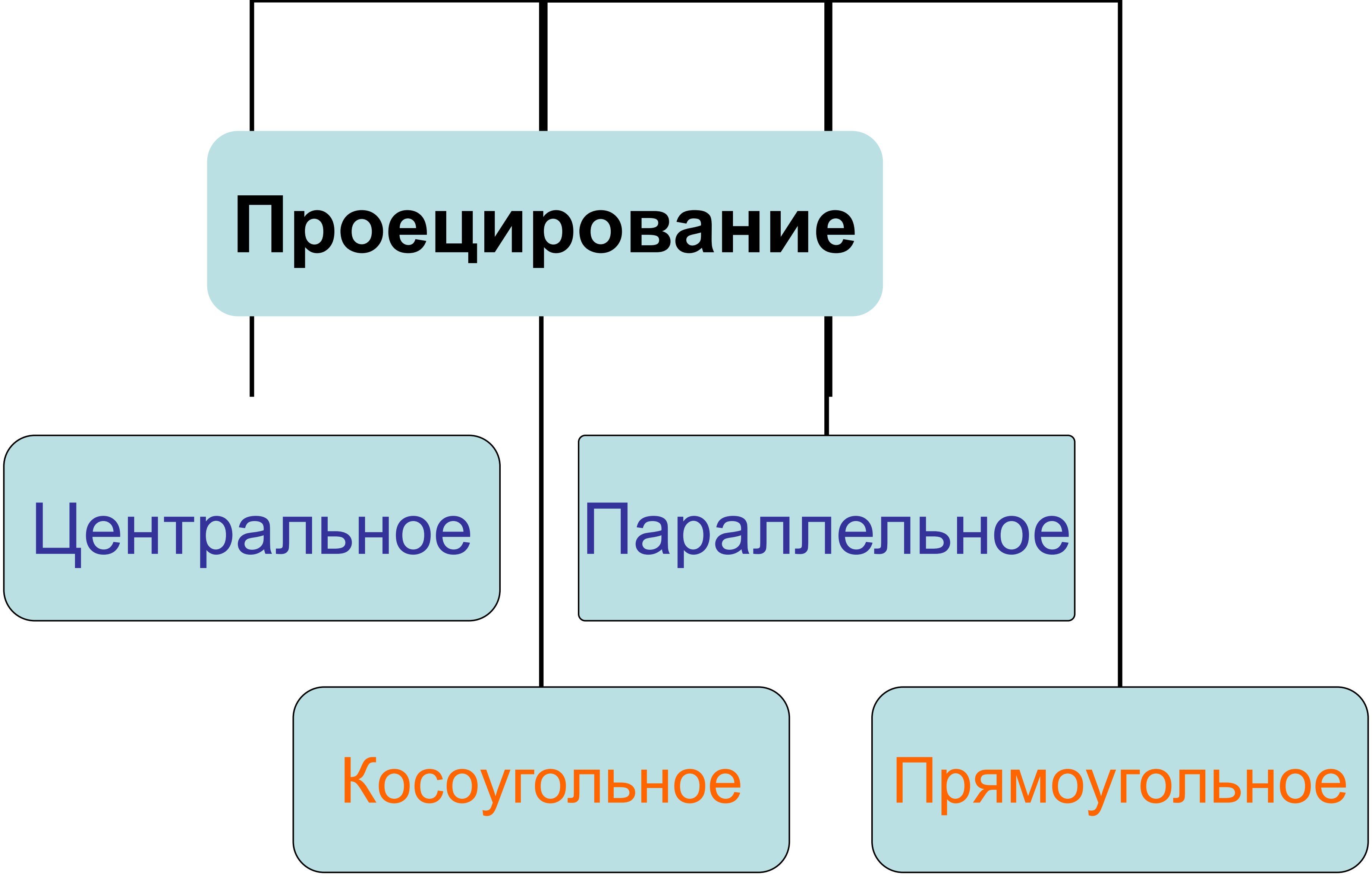


$(s$^$\Pi_к) = \angle\ \varphi$

$\angle\varphi = 90^о \lor (s \perp \Pi_к) \Rightarrow$ проецирование прямоугольное

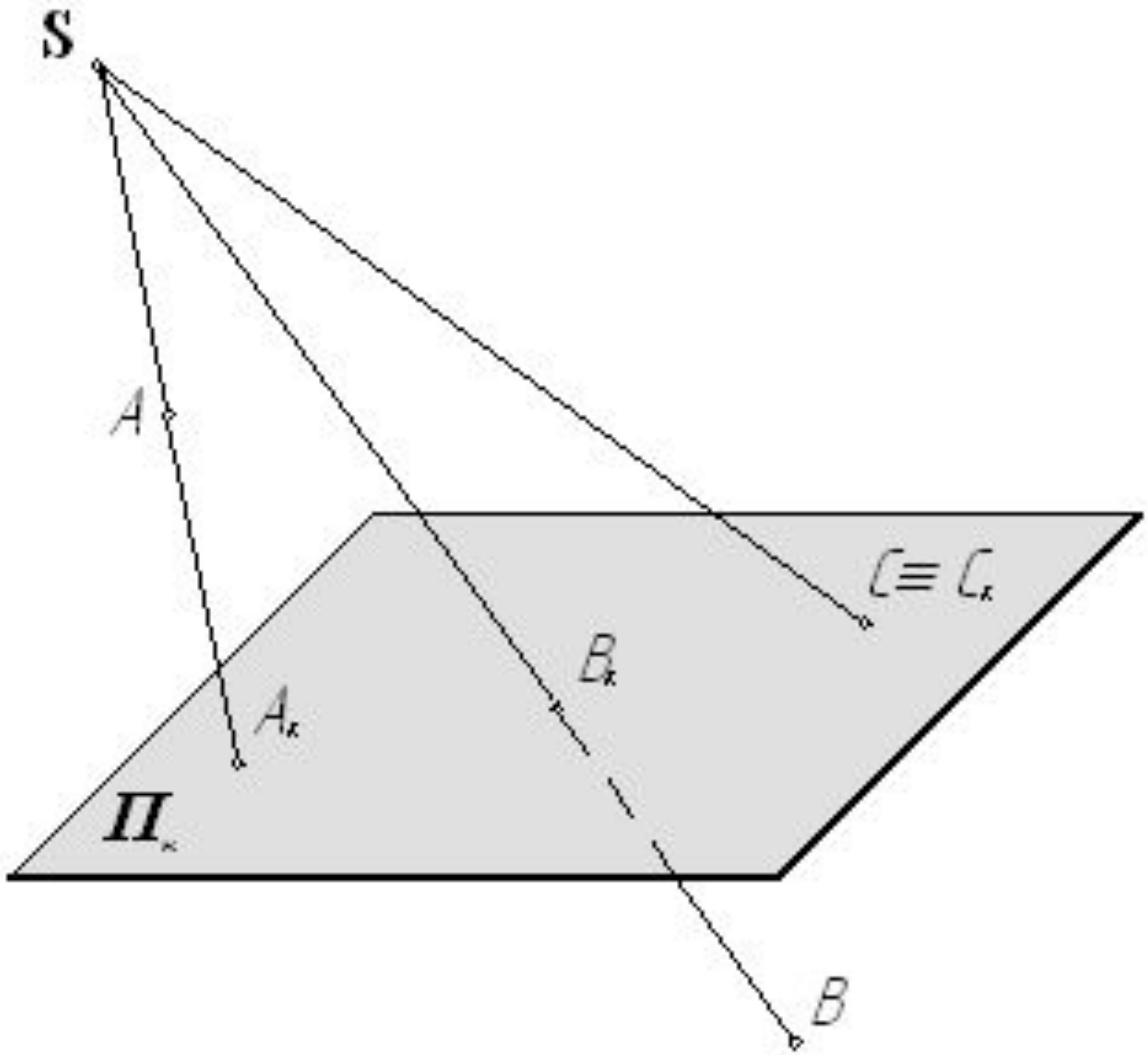
(ортогональное)

$\angle\varphi \neq 90^о \lor (s \not\perp \Pi_к) \Rightarrow$ проецирование косоугольное

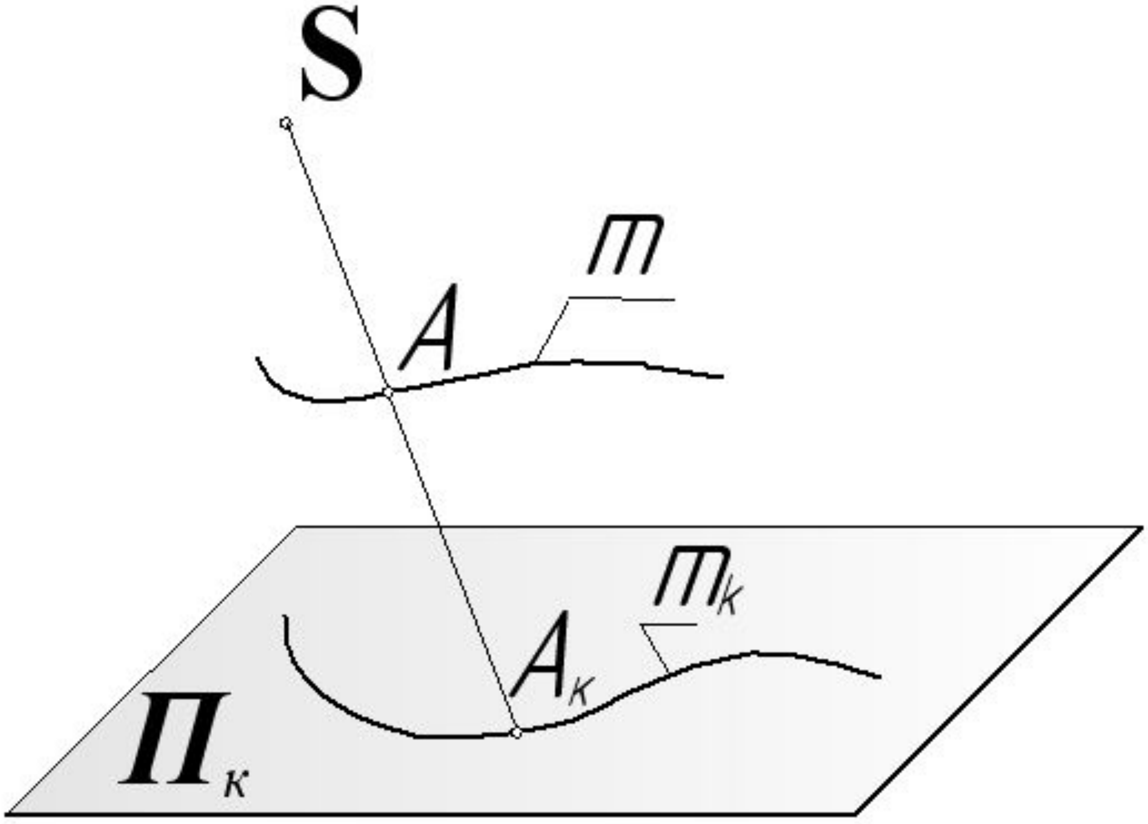

Проецирование
Центральное
Параллельное
Косоугольное
Прямоугольное

Свойства проецирования

Общие свойства проецирования

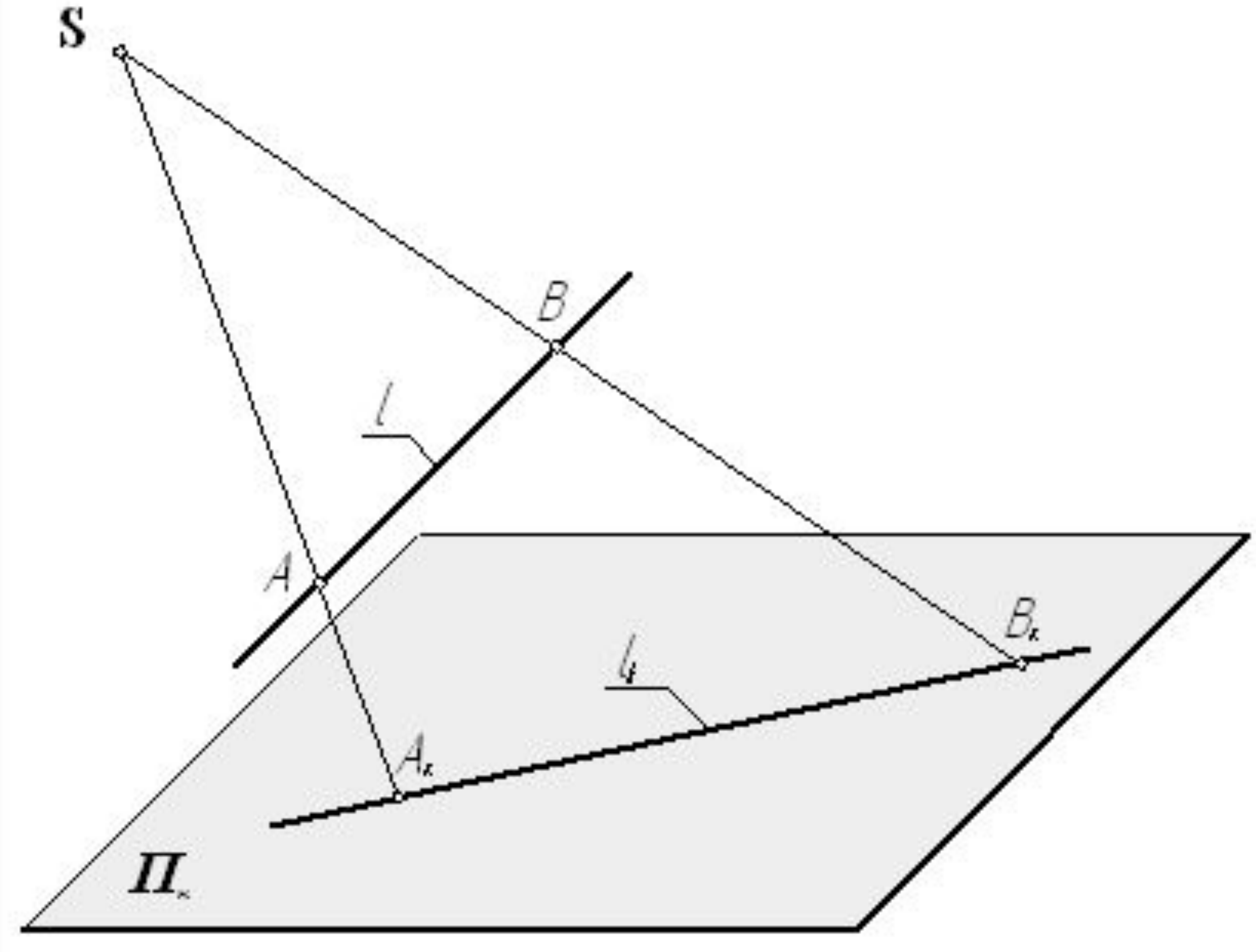


Проекция точки - точка

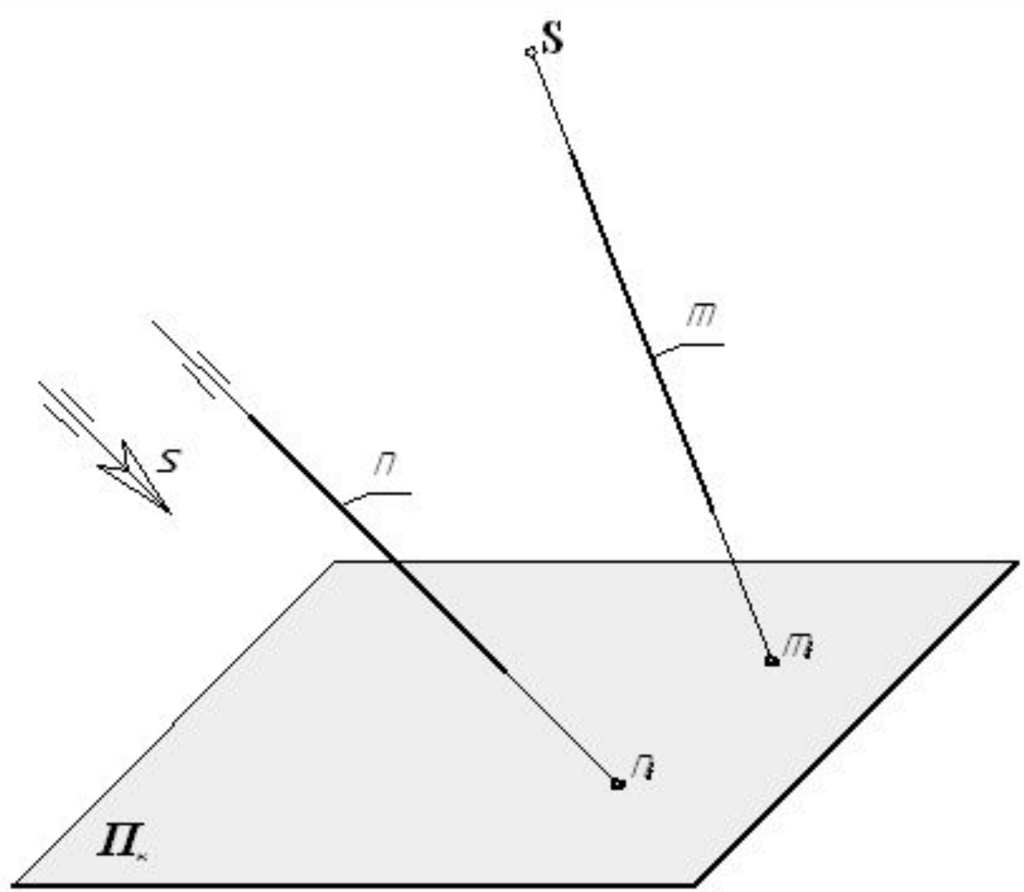


Если точка принадлежит линии, то проекции точки принадлежат одноименным проекциям этой линии.

$$A \in m \Rightarrow A_k \in m_k$$



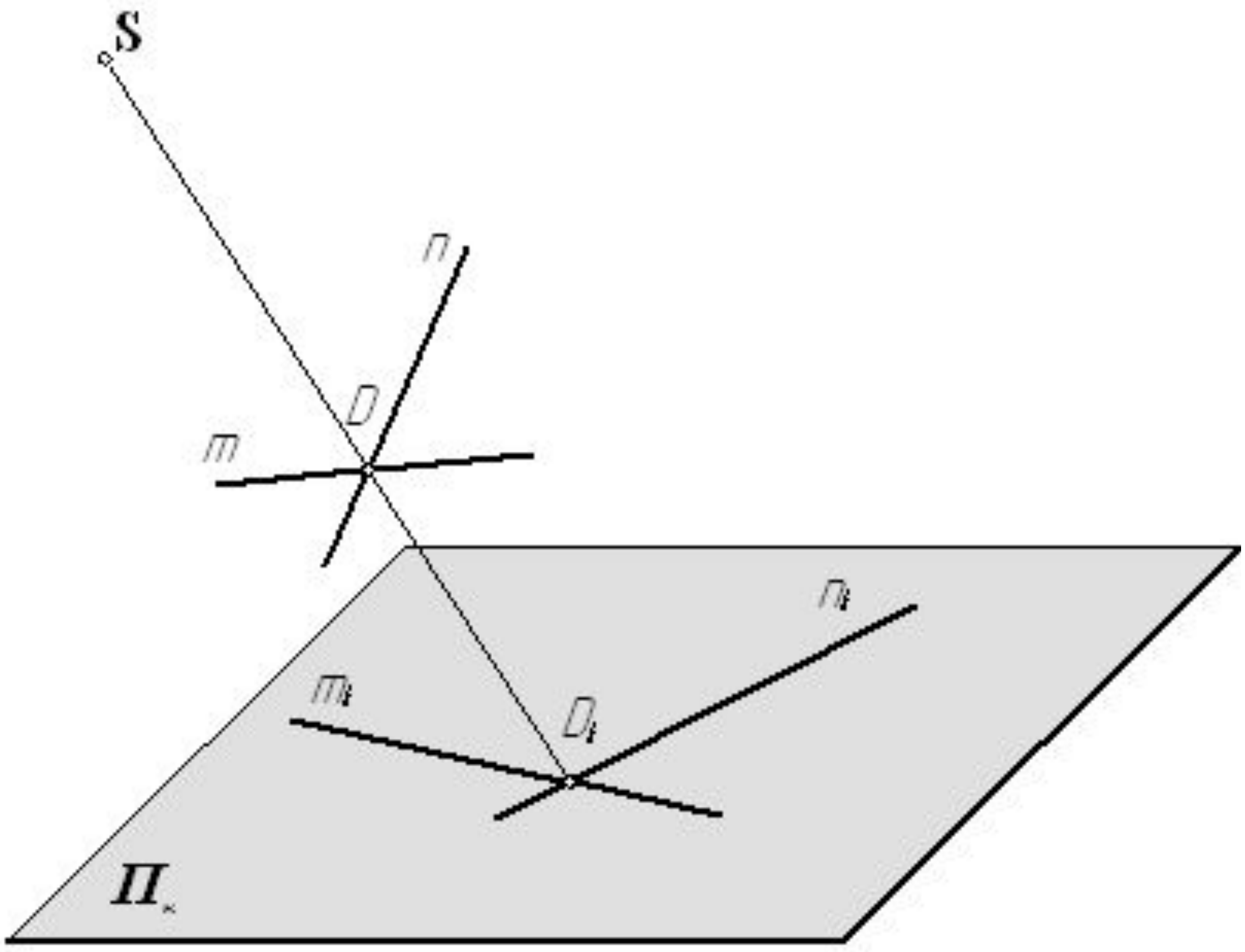
Проекция прямой, в общем случае, - прямая.



Если прямая проходит через центр проецирования **S** (или параллельна направлению проецирования *s*), то ее проекция вырождается в точку.

$$(\mathbf{S} \in \boldsymbol{m}) \vee (\boldsymbol{n} \parallel \hat{\boldsymbol{s}}) \Rightarrow (\boldsymbol{m}_k \text{ и } \boldsymbol{n}_k \text{ - точка})$$

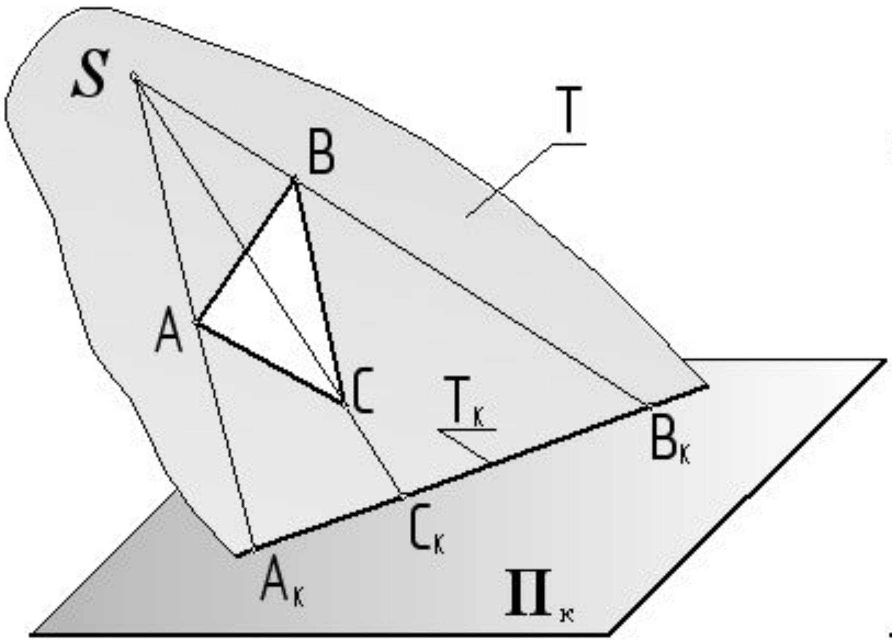
***Такая прямая называется проецирующей*.**

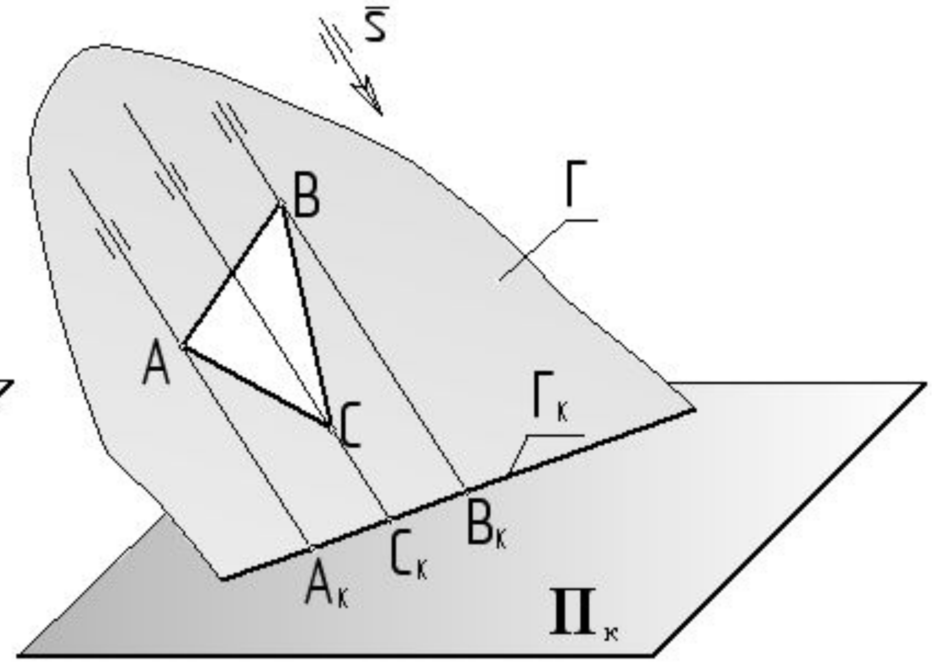


Если прямые пересекаются, то пересекаются и их проекции.

Точки пересечения прямых и их проекций лежат на одной проецирующей прямой.

$$(m \cap n = D) \Rightarrow (m_k \cap n_k = D_k \wedge S \in DD_k)$$

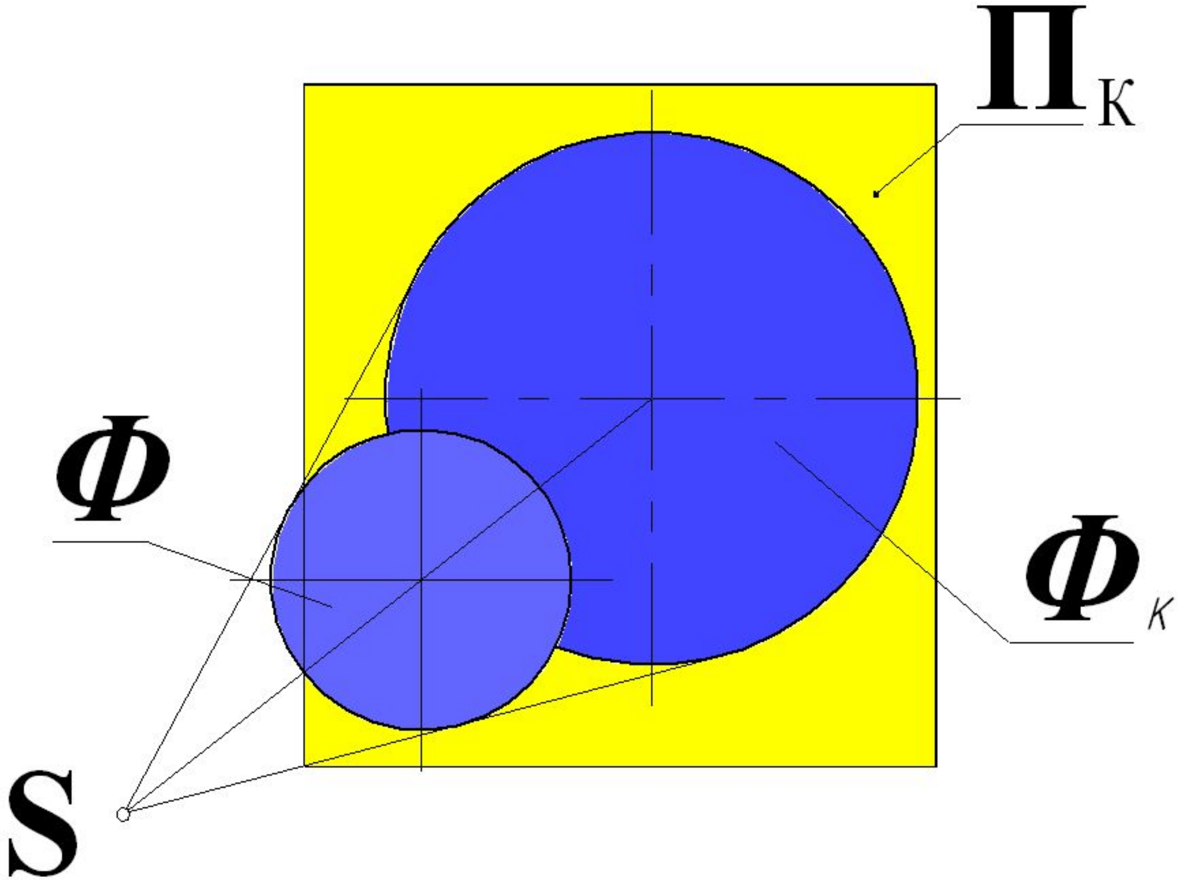




Если плоскость проходит через центр проецирования (включает в себя) ($S \in T$), то проекция плоскости вырождается в прямую линию (T_k – прямая).

$$S \in T \Rightarrow T_k \text{ – прямая}$$

Такая плоскость называется проецирующей



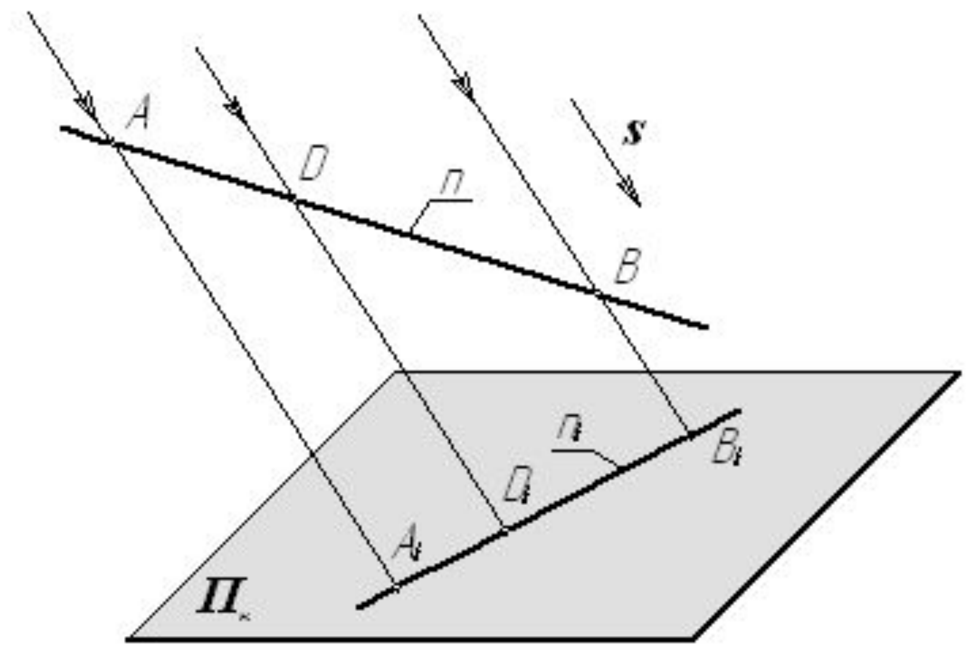
Если плоская фигура $\boldsymbol{\Phi}$ параллельна плоскости проекций $\boldsymbol{\Pi}_к$, то ее проекция $\boldsymbol{\Phi}_к$ на эту плоскость подобна самой фигуре $\boldsymbol{\Phi}$.

$$\Phi \parallel \Pi_к \Rightarrow \Phi_к \sim \Phi$$

Инвариантные свойства параллельного проецирования

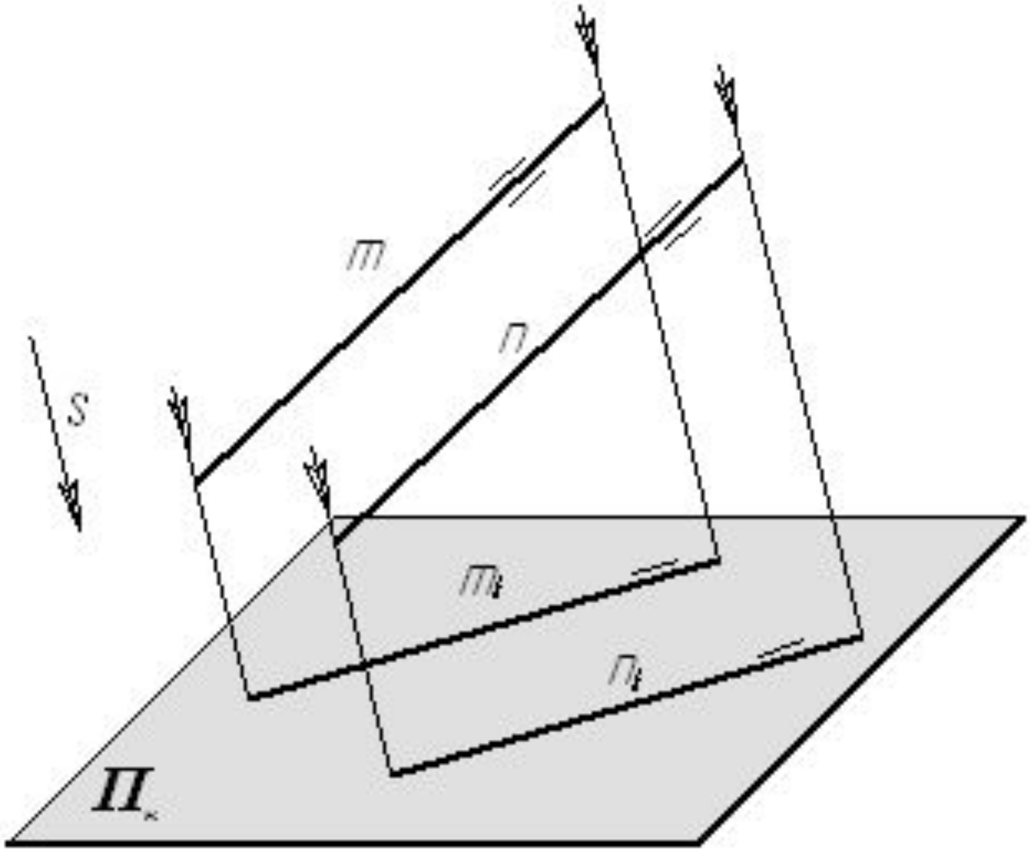
Если отрезок прямой разделен в заданном отношении, то в таком же отношении будет разделена и проекция этого отрезка.

$AD : DB = A_K D_K : D_K B_K$



Если прямые параллельны, то их одноименные проекции также параллельны.

$(m \parallel n) \Rightarrow (m_k \parallel n_k)$



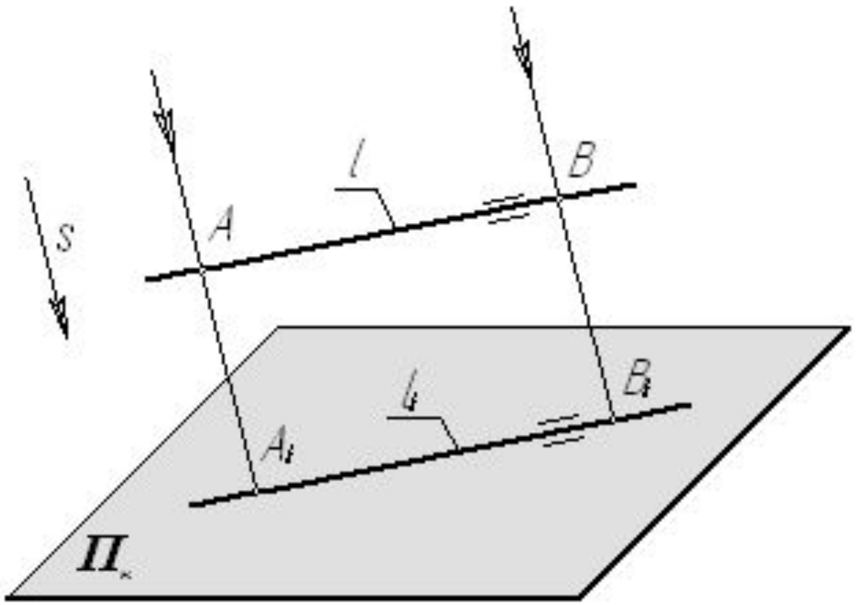
Если прямая параллельна плоскости проекций, то ее проекция на этой плоскости параллельна прямой, а отрезок, ей принадлежащий, отображается в истинную величину.

$$(l \parallel \Pi_k) \Rightarrow (l \parallel l_k)$$

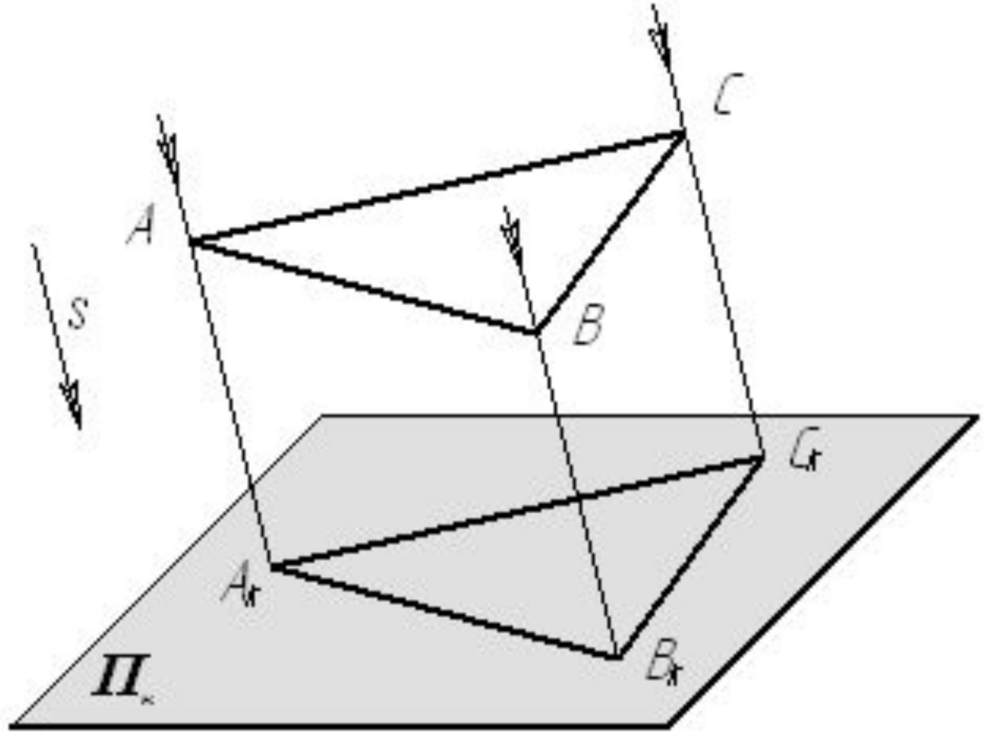
$$(AB \subset l\,) \Rightarrow (|\,AB\,| = |A_k\,B_k|$$

Т.е. проекция отрезка конгруэнтна самому отрезку

$$A_k\,B_k \cong AB$$



Если плоская фигура параллельна плоскости проекций, то ее проекция на этой плоскости конгруэнтна самой фигуре.

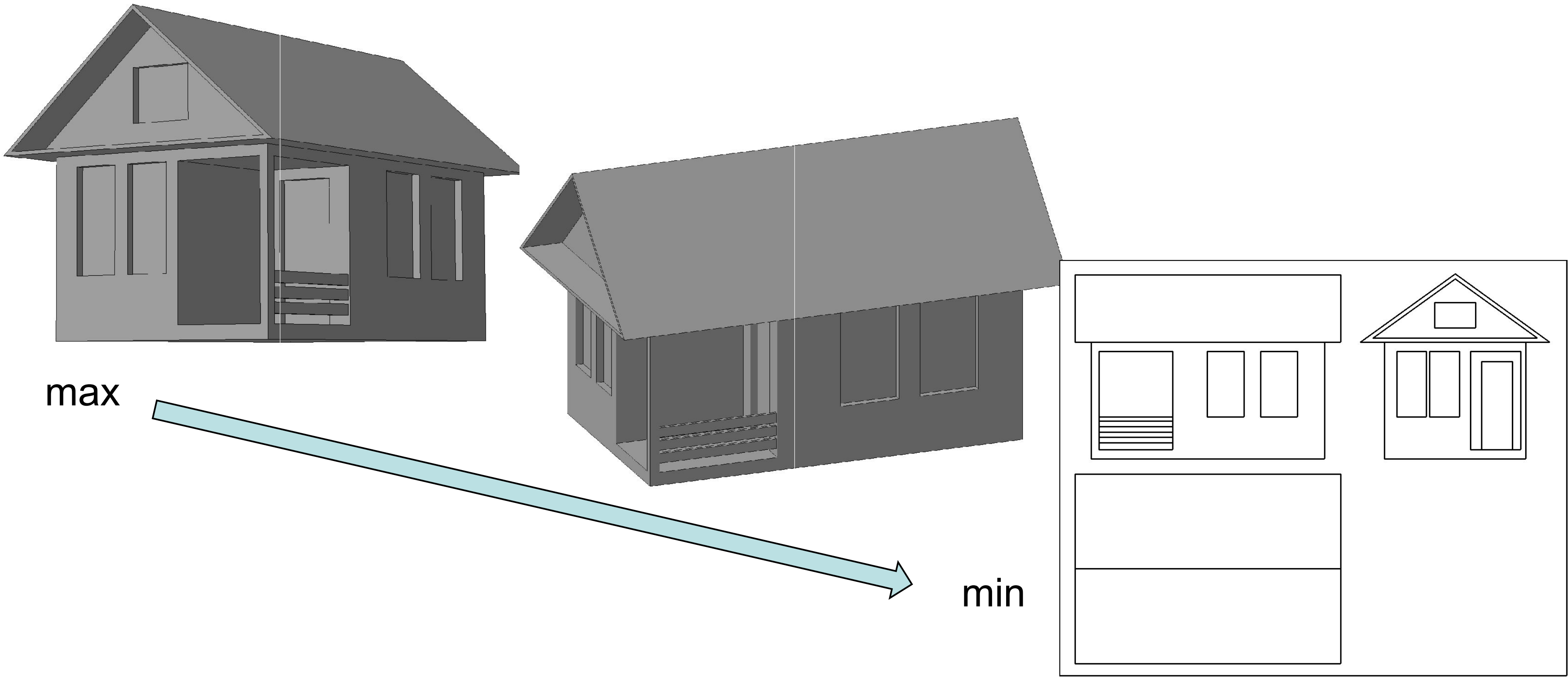


$$(\Phi(ABC) \parallel \Pi_k) \Rightarrow (\Phi_к(A_к B_к C_к) \cong \Phi(ABC))$$

Требования, предъявляемые к проекционному изображению

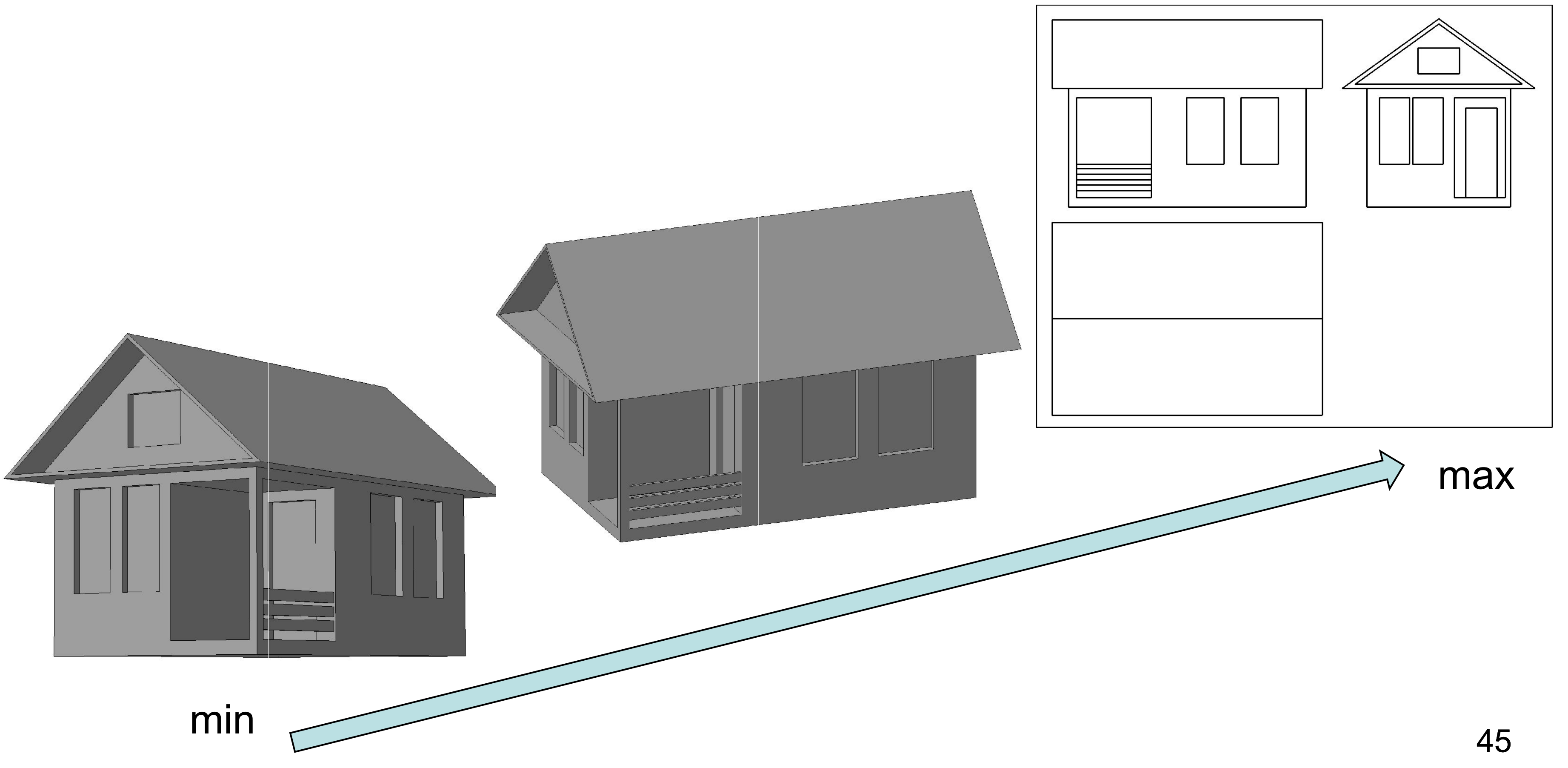
1. Наглядность

- Свойство, которое дает возможность по изображению представить внешнюю форму заданного объекта



2. Обратимость

- Свойство, на основе которого по изображению можно восстановить реальную форму объекта, его размеры и, если необходимо, положение заданного объекта в пространстве



3. Единство правил построения изображения и правил его графического оформления

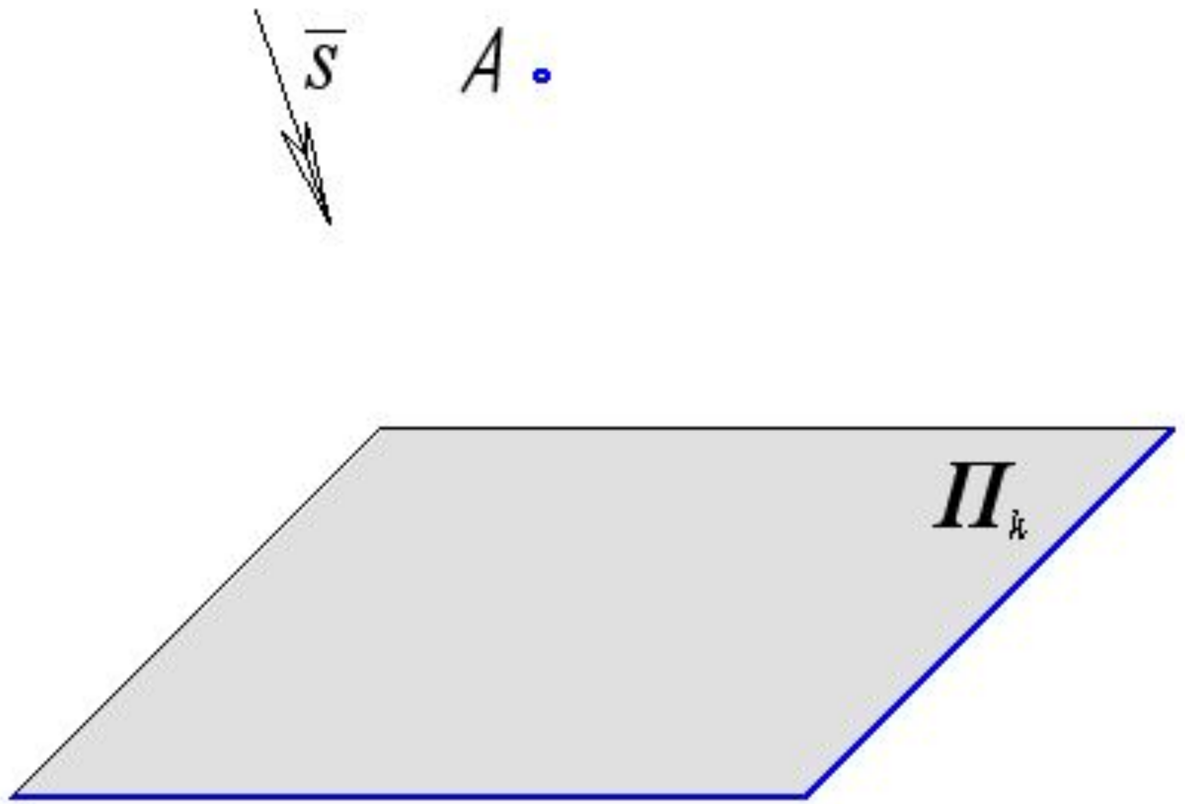
Выводы

- Выбор того или иного вида проекции определяется функциональным назначением получаемого изображения.
- Для презентаций определяющим свойством является наглядность изображения (перспективная или аксонометрическая проекция).
- Для разработки технологического процесса изготовления (строительства) объекта определяющим является обратимость изображения (ортогональные проекции).

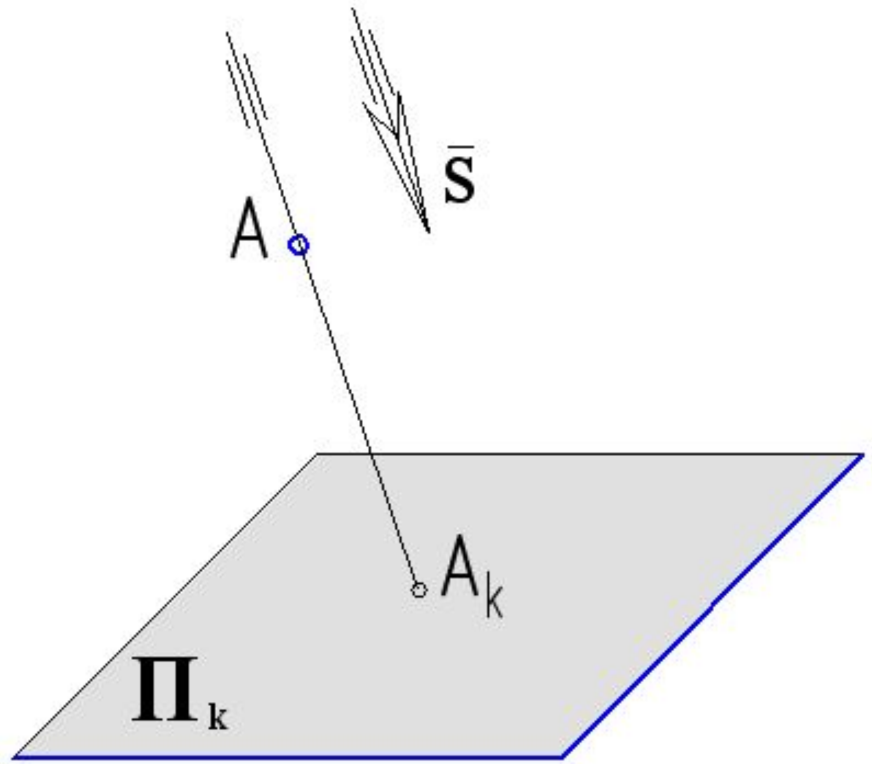
Ортогональные проекции

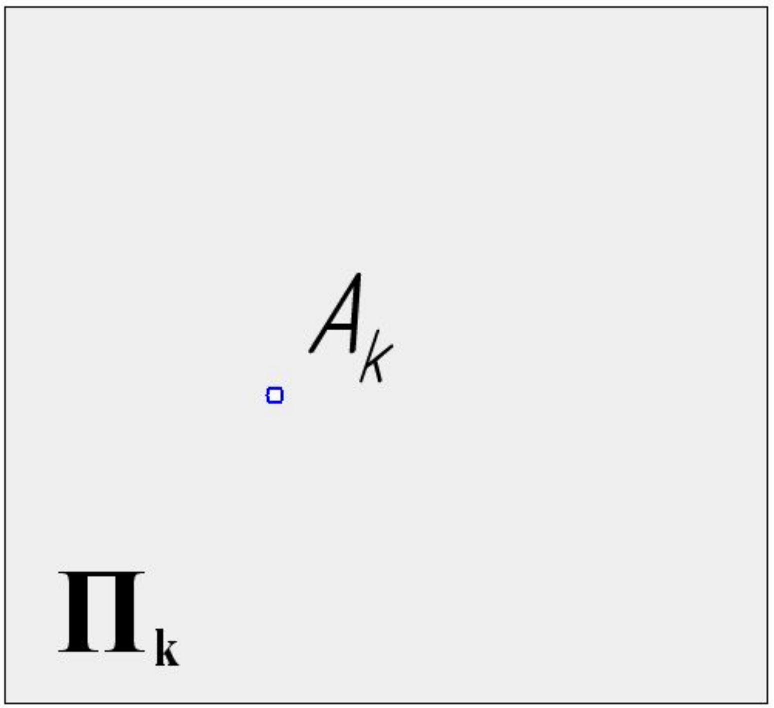
48

Возьмем произвольную точку A и плоскость проекций $\Pi_к$.



49





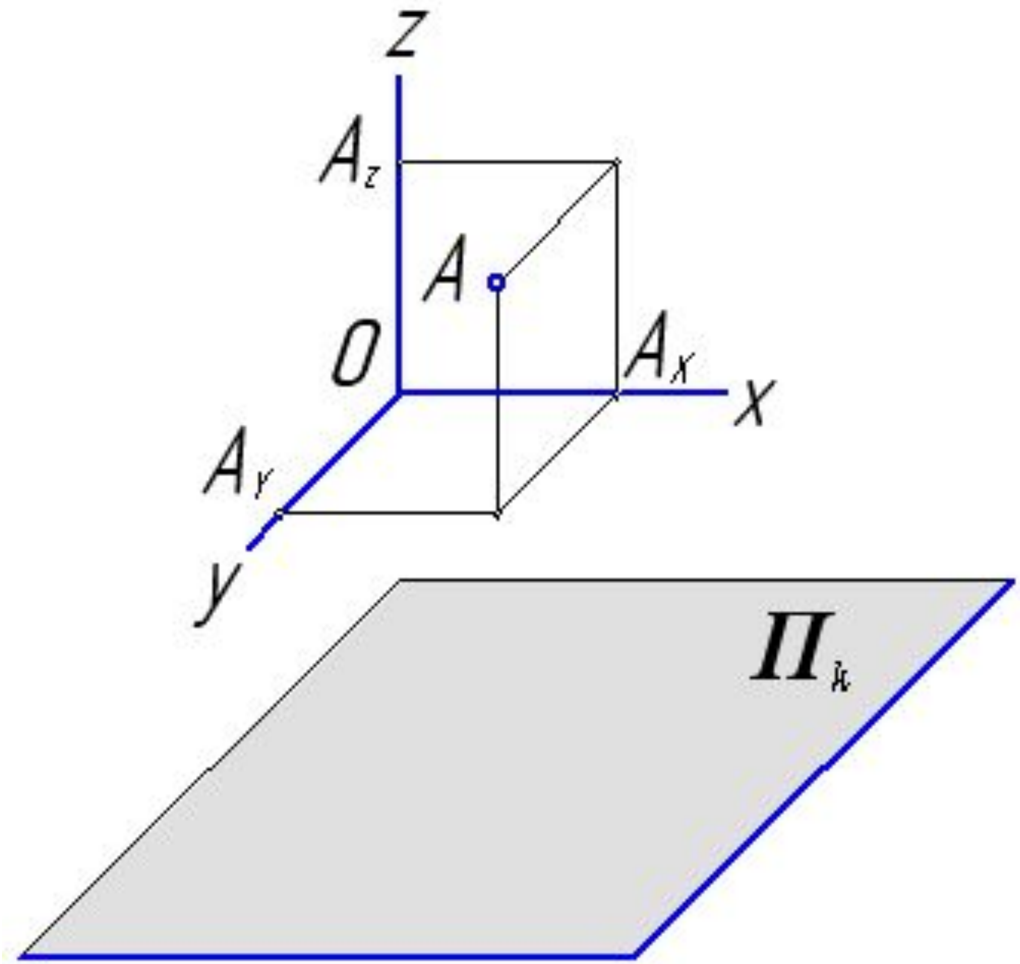
Спроецируем точку A на плоскость проекций $\Pi_к$ по направлению ***s***.

Полученная проекция $A_к$ точки A не дает возможности точно определить положение самой точки A в пространстве, так как проекции $A_к$ соответствует все множество точек, принадлежащих проецирующей прямой, проходящей через точку A

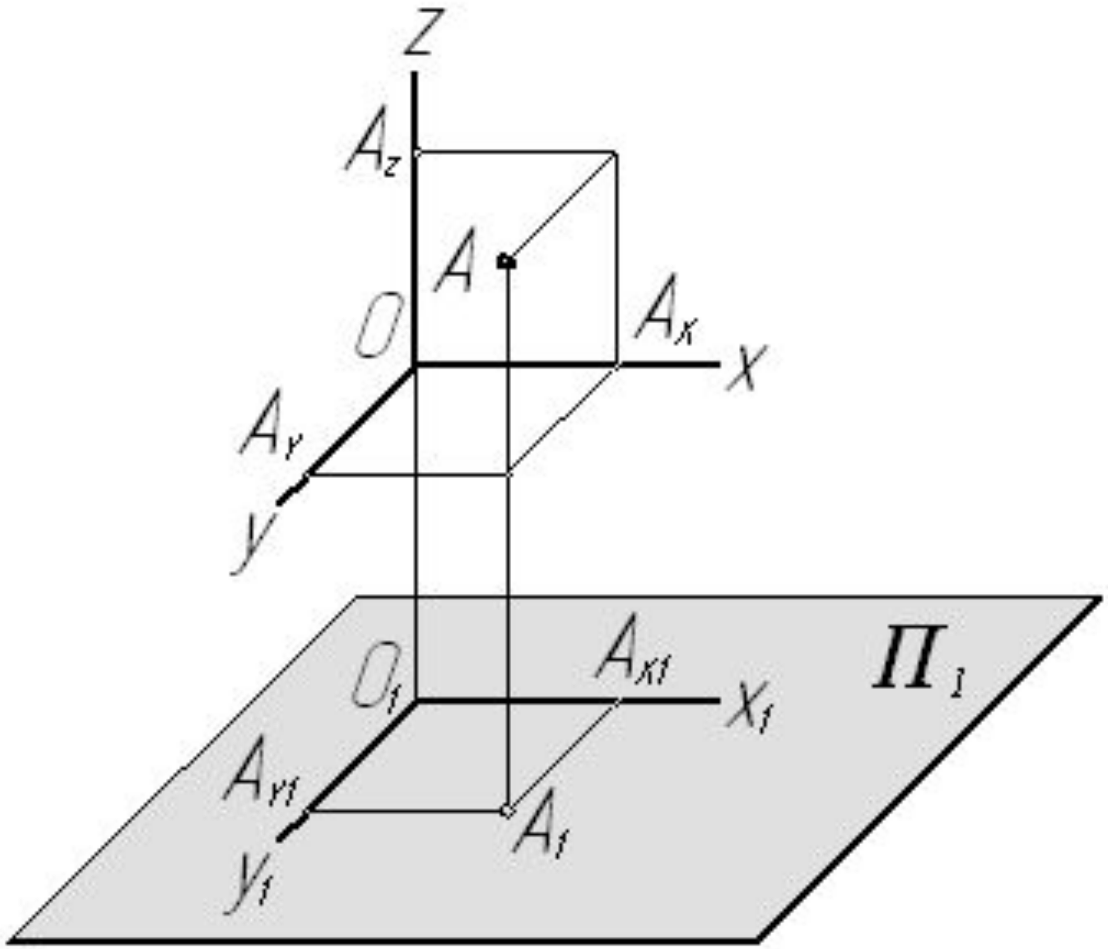
Одна проекция точки без дополнительных условий однозначно не определяет ее положение в пространстве

50

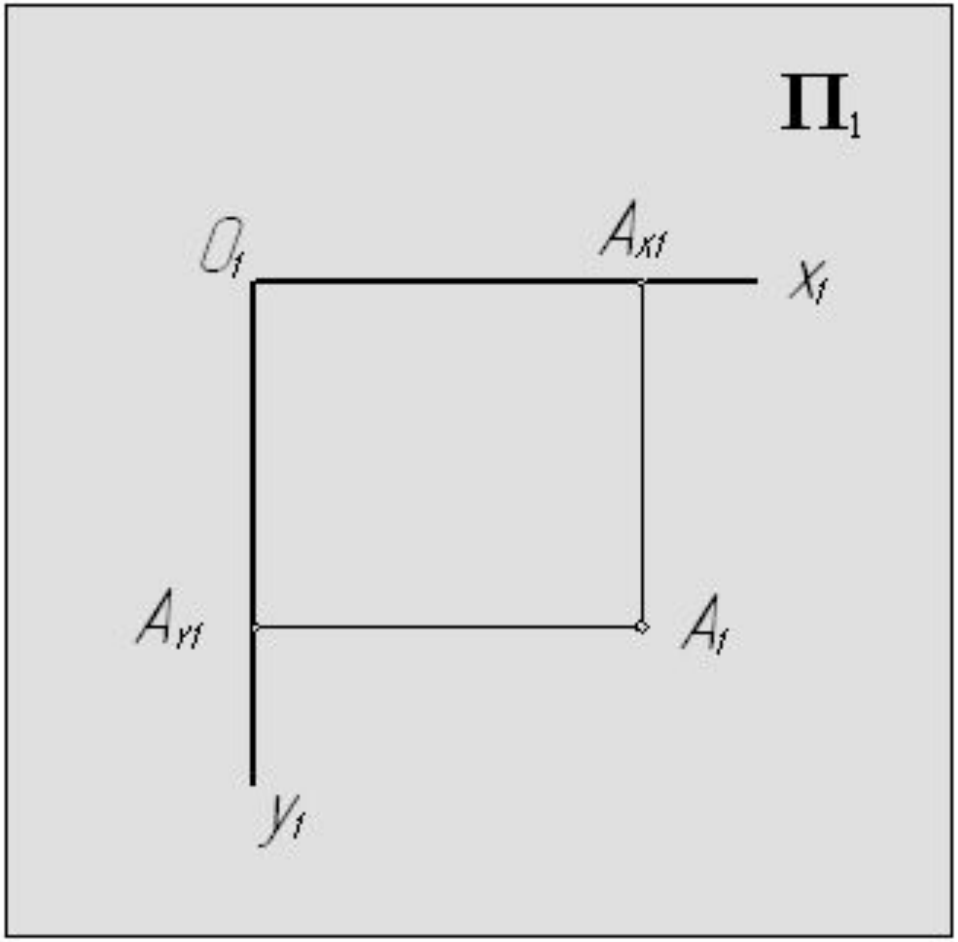
Введем пространственную ортогональную систему координат $Oxyz$ с условием, что координатная плоскость xOy будет параллельна плоскости проекций Π_1. “Привяжем” точку A к выбранной системе координат.



Ортогонально спроецируем систему координат $\boldsymbol{Oxyz}$ и связанную с ней точку $\boldsymbol{A}$ на плоскость проекций $\mathbf{П_1}$.



В этом случае на проекции мы имеем только две координаты точки A – x_A и y_A, но отображаемые в истинную величину. Координата z_A, определяющая высоту точки A, отсутствует.

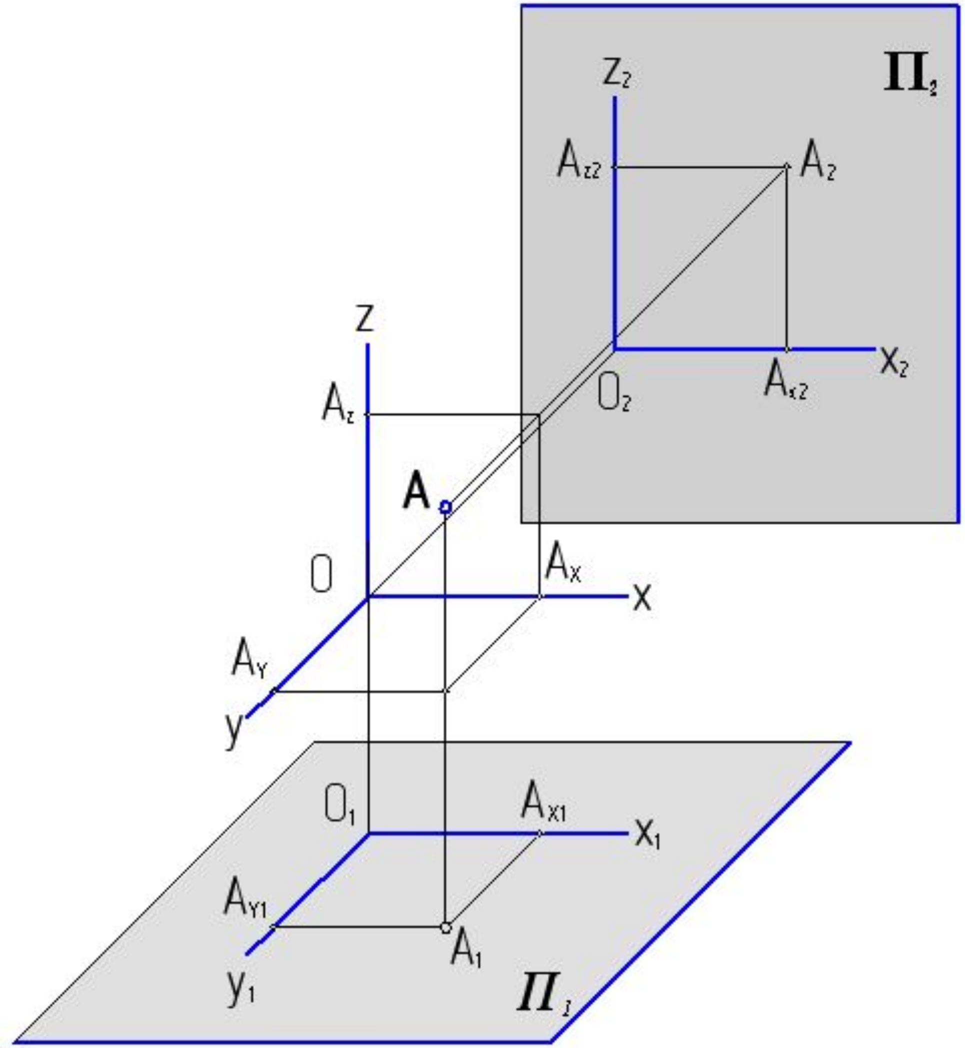


Как было определено ранее, без дополнительных условий изображение необратимо

Введем вторую плоскость проекций Π_2, параллельную координатной плоскости xOz Ортогонально спроецируем точку A совместно с системой координат $Oxyz$ на плоскость проекций Π_2.

Как и предыдущем случае получаем две координаты x_A и z_A в истинную величину.

Т.е. мы получили все три координаты точки A в истинную величину.



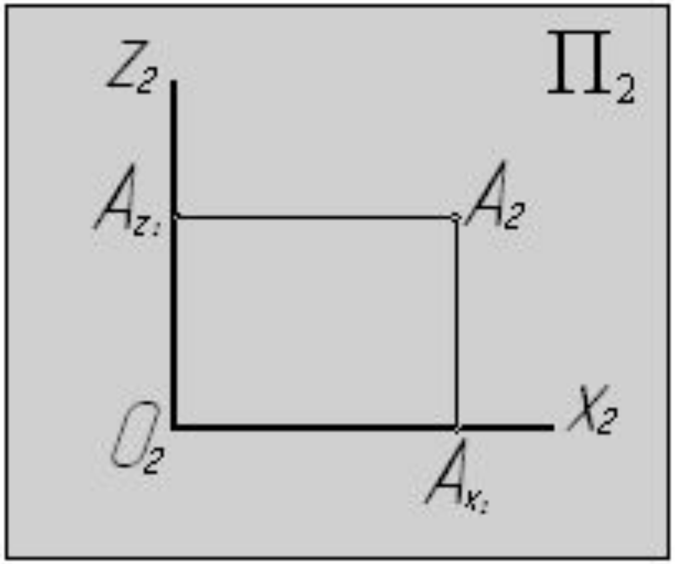
54

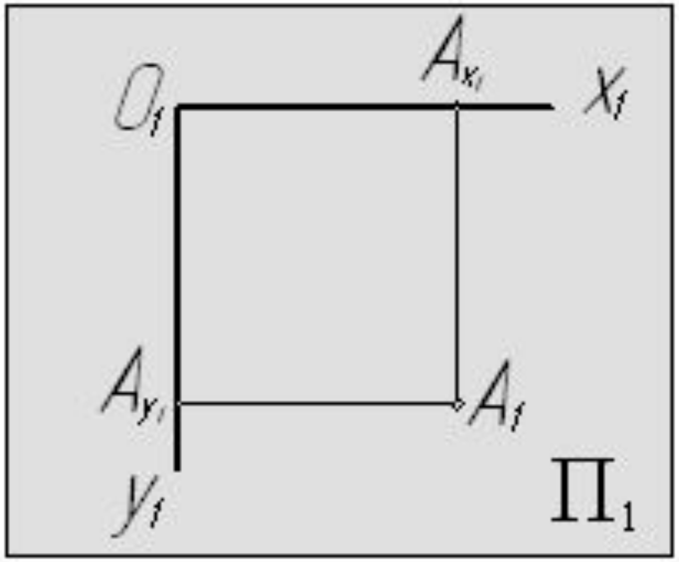
Но координатные плоскости xOz и xOy взаимно перпендикулярны.

$$xOz \perp xOy$$

Следовательно, плоскости проекций Π_1 и Π_2 также взаимно перпендикулярны

$$\Pi_1 \perp \Pi_2$$





Следовательно:

55

Ортогональные проекции точки на две взаимно перпендикулярные плоскости проекций однозначно определяют положение точки в пространстве и делают изображения обратимыми.

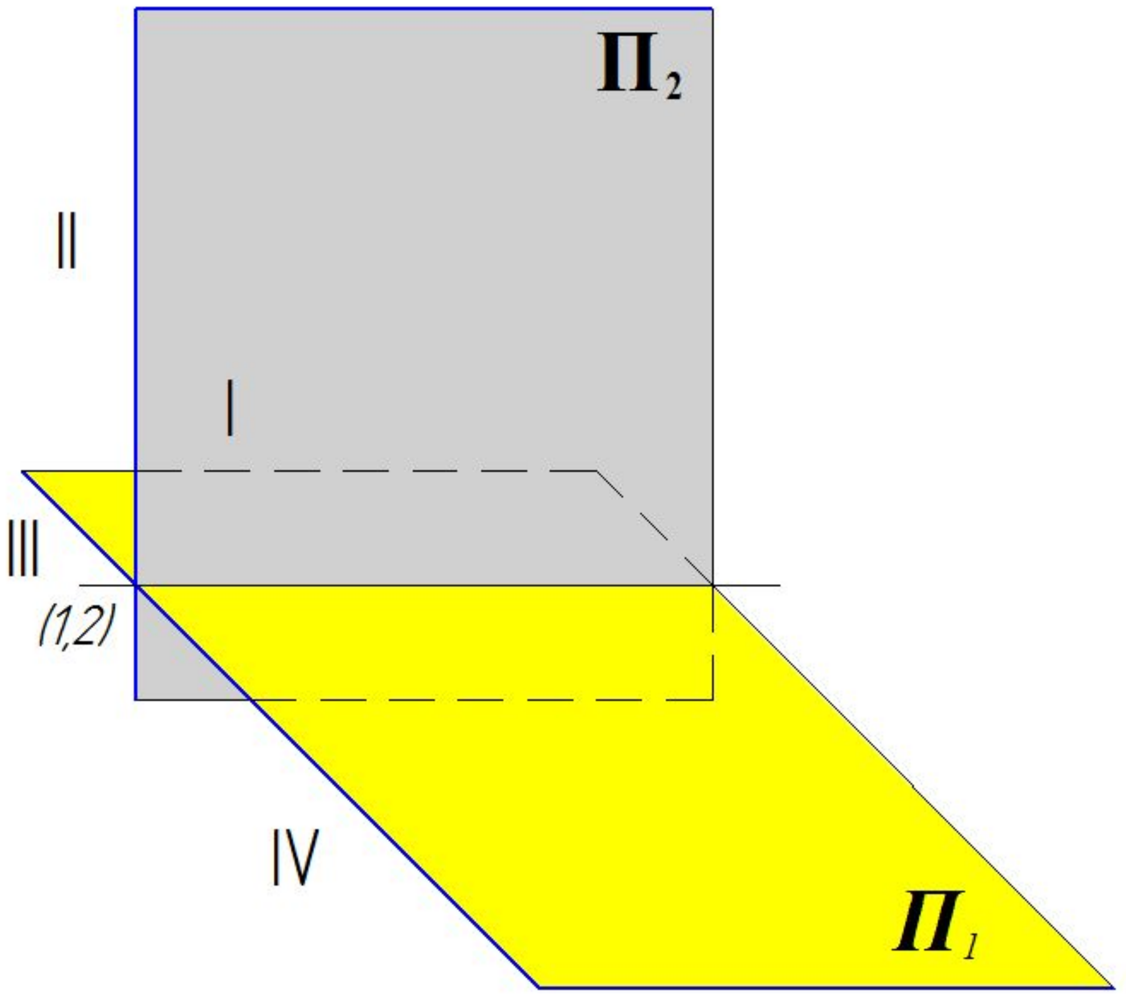
56

Метод Монжа

Ортогональная система двух плоскостей проекций

$\Pi_1 \perp \Pi_2$

$\Pi_1 \cap \Pi_2 = (1,2)$



Π_1 – горизонтальная плоскость проекций

Π_2 – фронтальная плоскость проекций

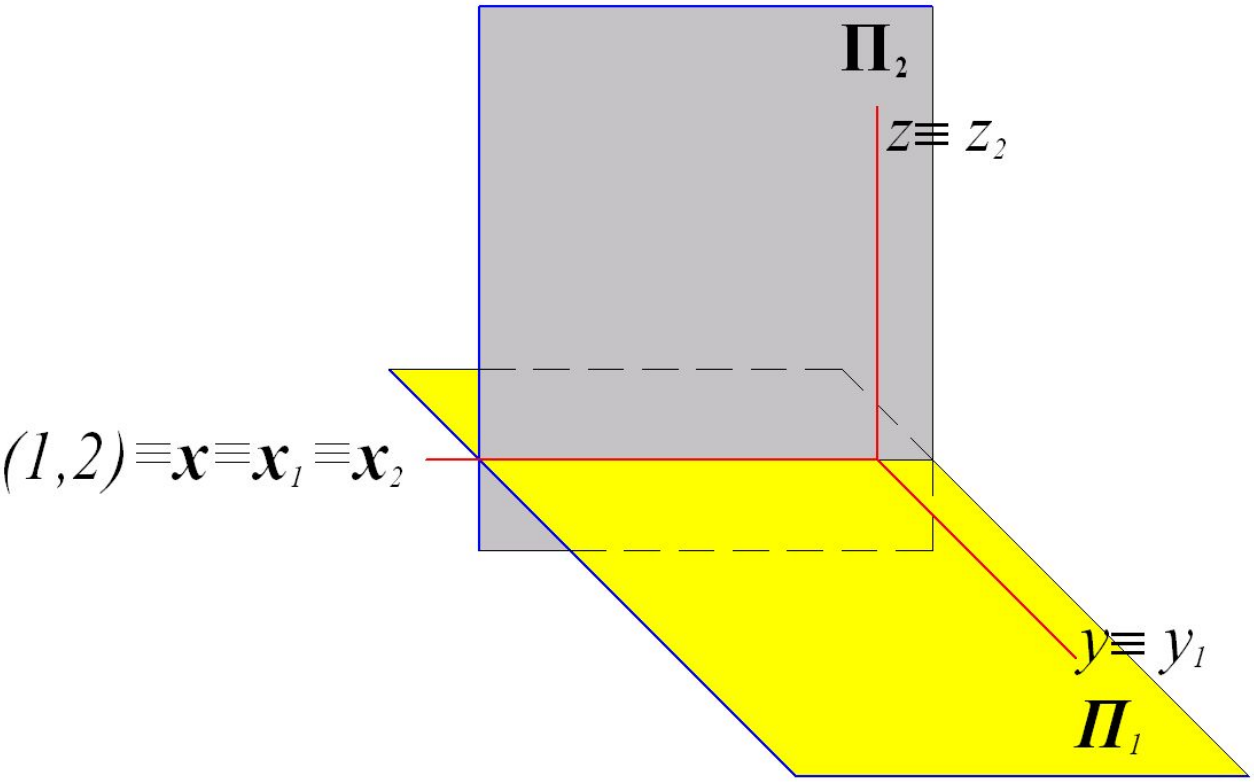
I, II, III, IV – четверти пространства

Пространственная система координат совмещается с плоскостями проекций так, чтобы

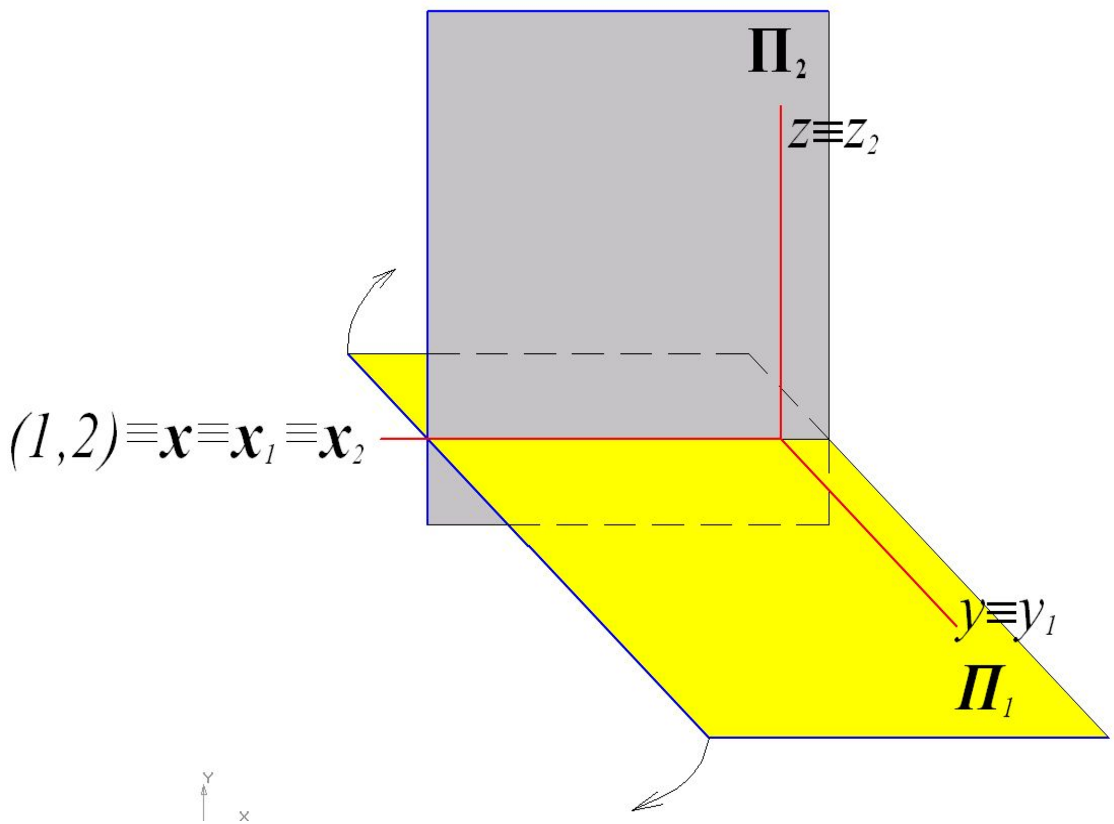
$$xOz \equiv \Pi_2 \,,$$

$$xOy \equiv \Pi_1 \,,$$

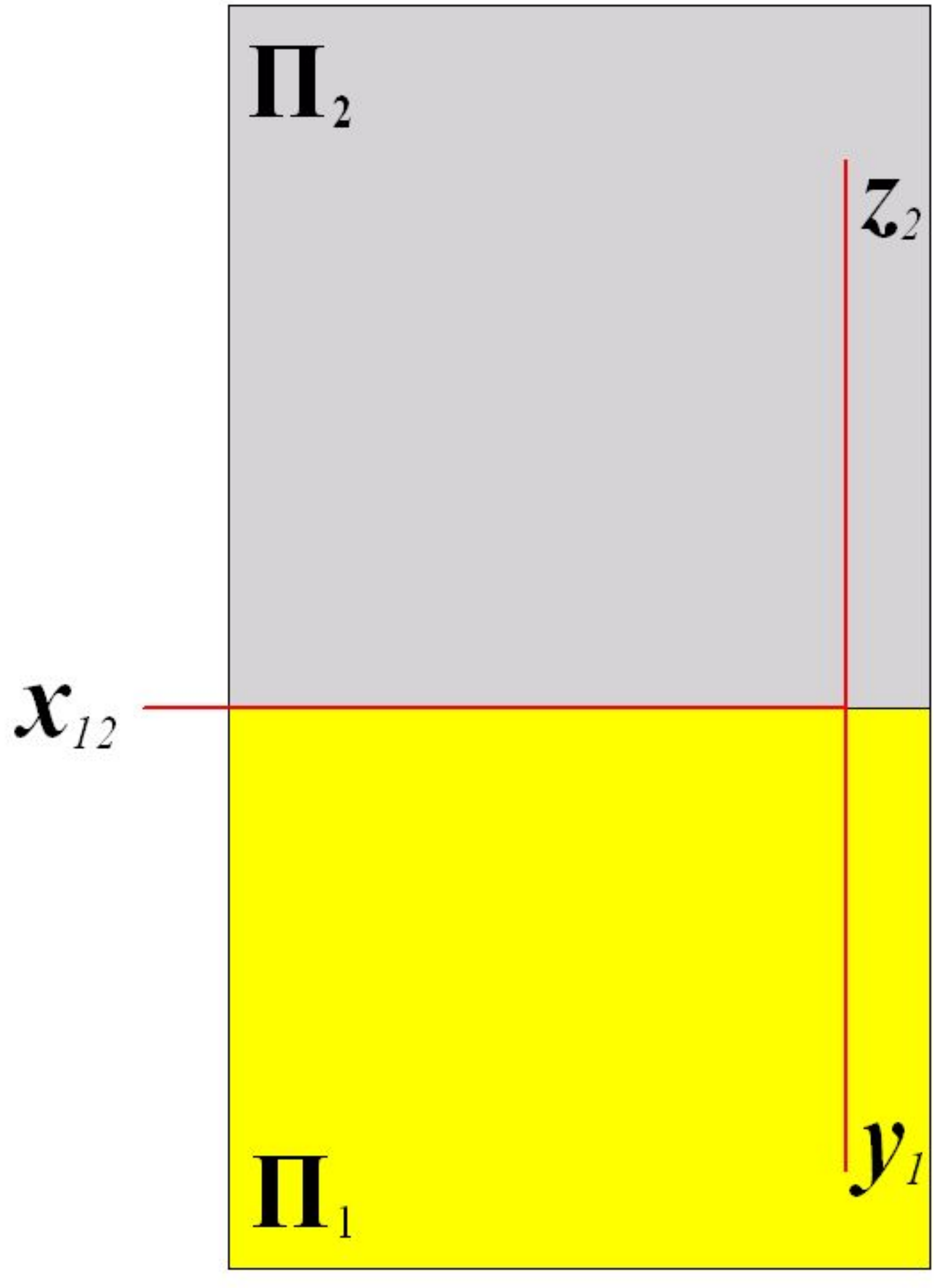
$$x \equiv (1,2)$$



Для получения плоскостного чертежа горизонтальную плоскость проекций Π_1 поворачивают вокруг линии пересечения *(1,2)* до совмещения с плоскостью Π_2.



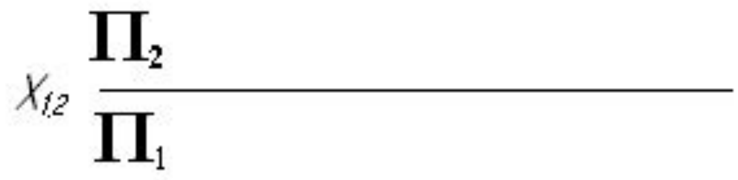
Плоскости проекций Π_1 и Π_2 совмещены в одну общую плоскость.



Так как плоскости проекций бесконечны, то их границы не оказывают.

Координатные оси y и z также не показывают.

В дальнейшем, когда не требуется знать положение объекта в пространстве относительно системы координат $Oxyz$, ось $x_{1,2}$ также может не изображаться. Получаем безосную систему.



Ортогональная система трех плоскостей проекций

Вводится третья плоскость проекций

Π_3 – профильная

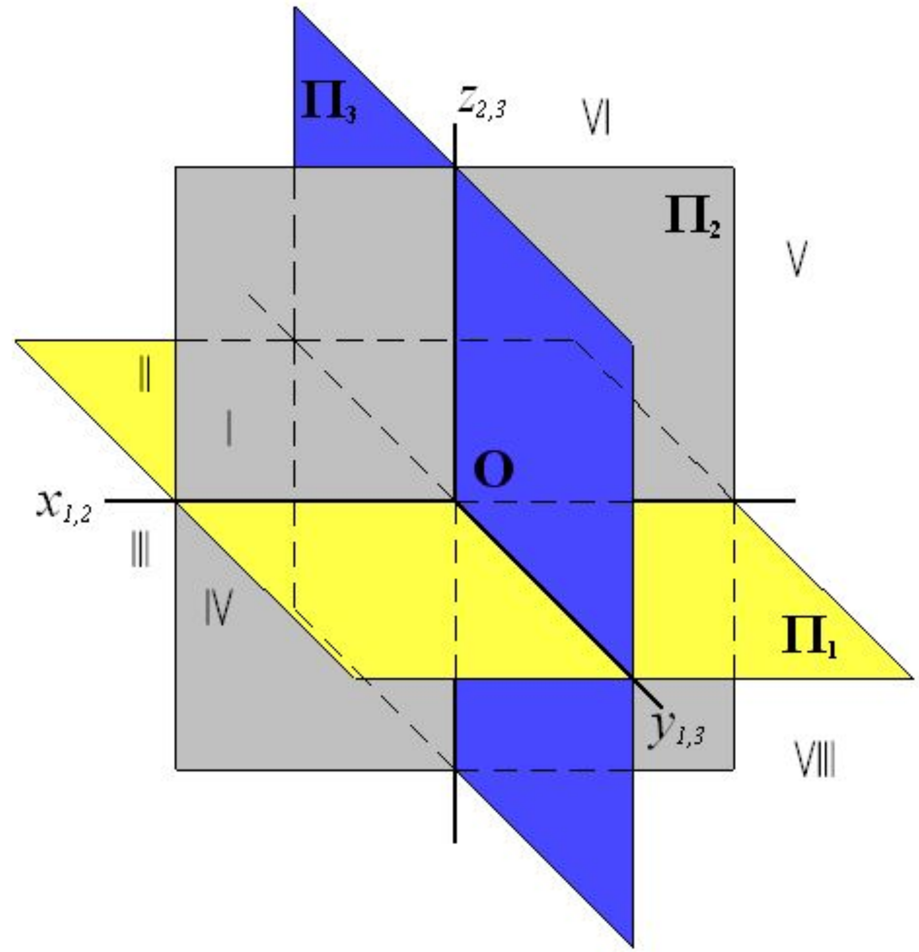
$\Pi_3 \equiv yOz$

$\Pi_3 \perp \Pi_1$ и $\Pi_3 \perp \Pi_2$;

$\Pi_3 \cap \Pi_1 = (1,3),\ (1,3) \equiv y \Rightarrow y_{1,3}$

$\Pi_3 \cap \Pi_2 = (2,3),\ (2,3) \equiv z \Rightarrow z_{2,3}$

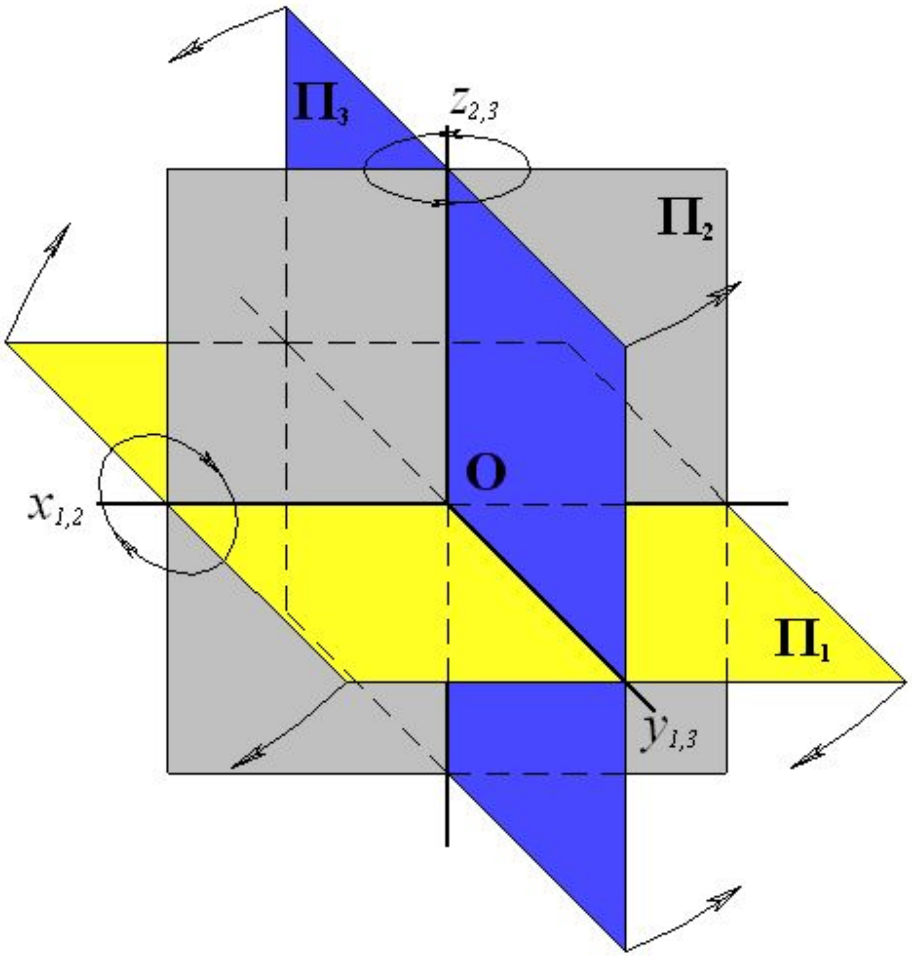
$\Pi_2 \cap \Pi_1 = (1,2),\ (1,2) \equiv x \Rightarrow x_{1,2}$



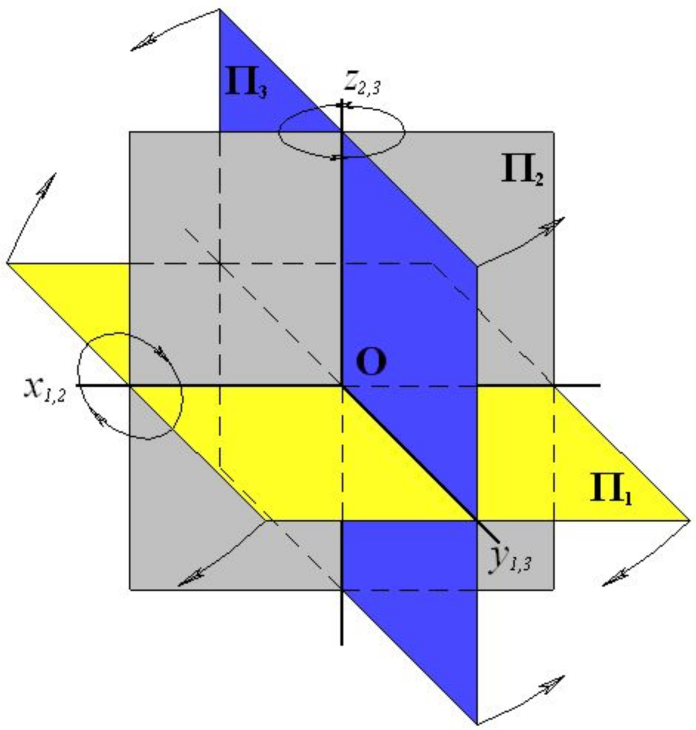
Пространство разделено на 8 частей - октантов

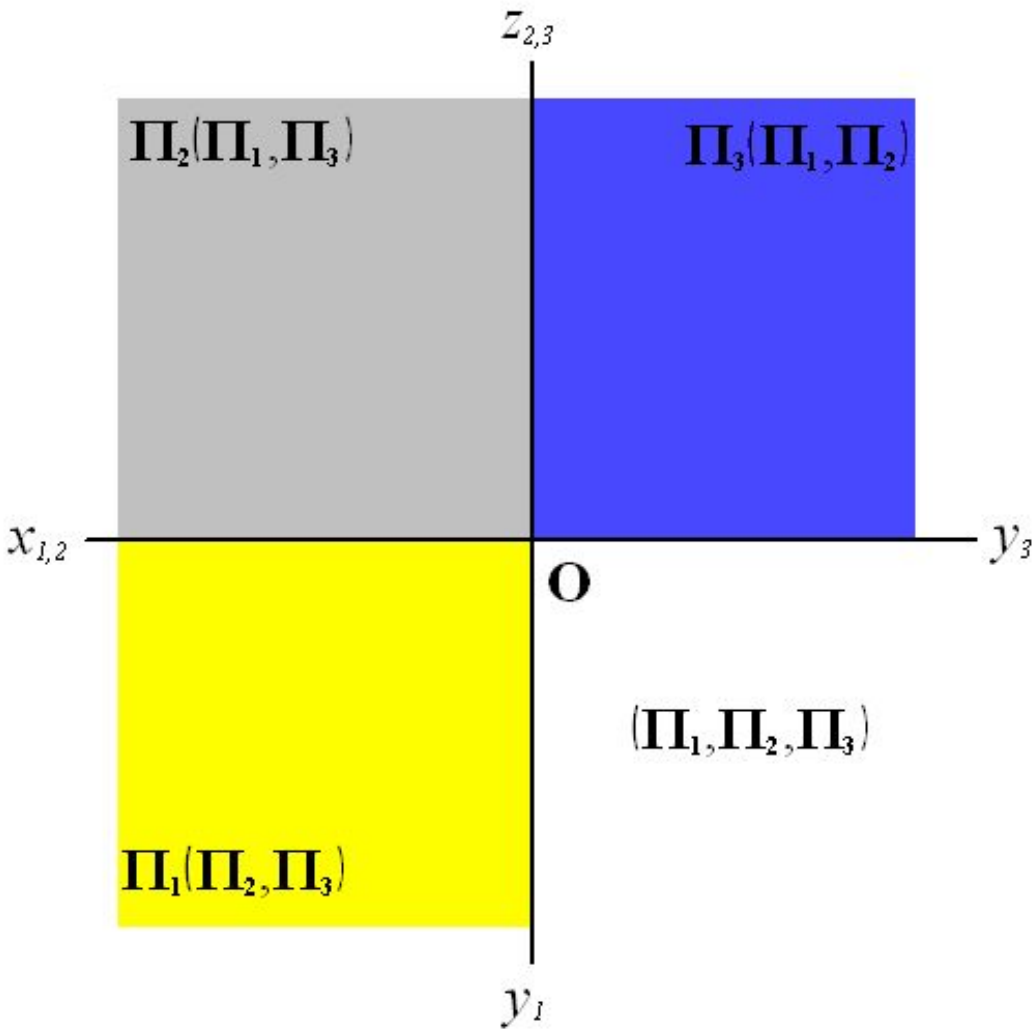
Для перехода от трехмерного изображения к плоскостному- двумерному выполняют следующие действия:

- Положение фронтальной плоскости проекций Π_2 не изменяют;
- горизонтальную плоскость проекций Π_1 поворачивают вокруг оси $x_{1,2}$ до совмещения с фронтальной плоскостью проекций Π_2;
- профильную плоскость проекций Π_3 поворачивают вокруг оси $z_{2,3}$ также до совмещения с фронтальной плоскостью проекций Π_2.



Все три плоскости проекций совмещены в одну общую плоскость

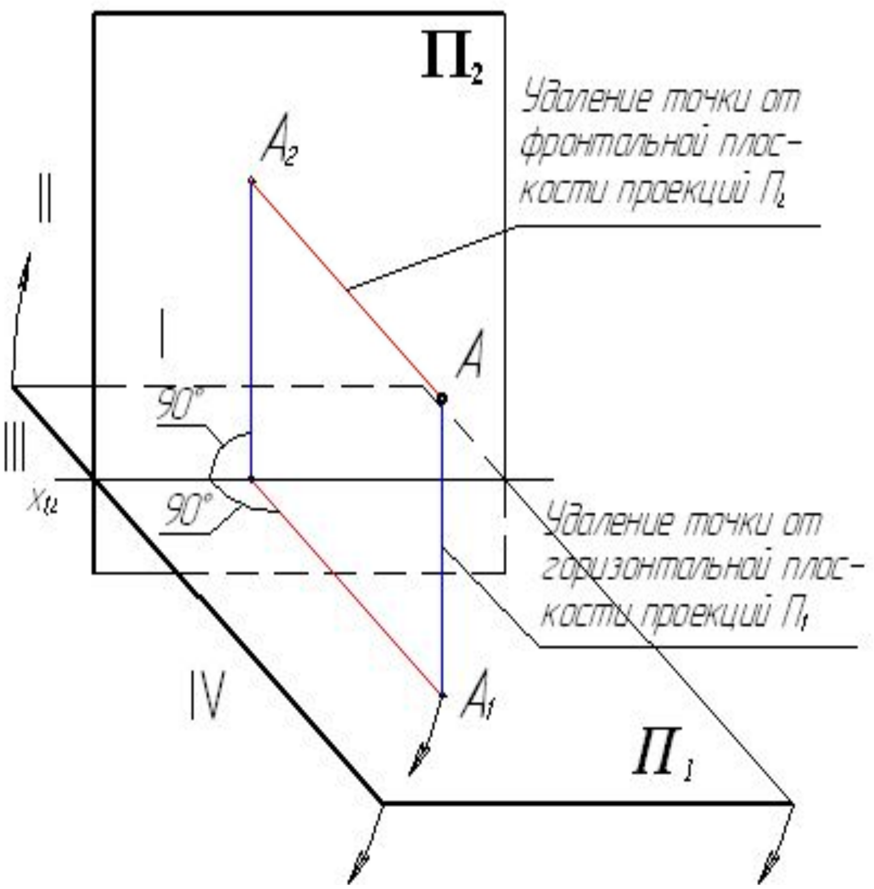




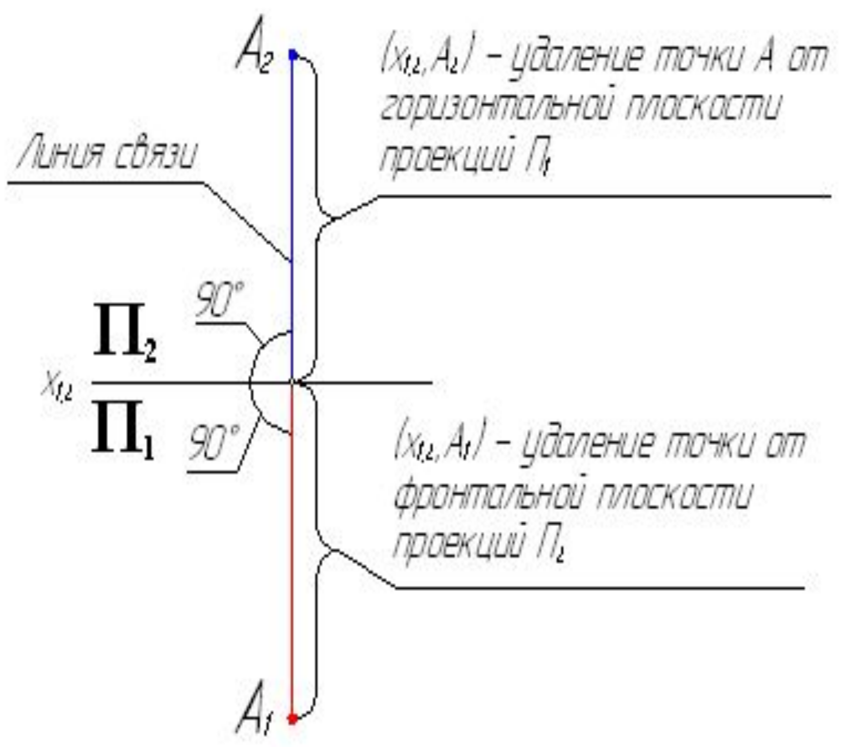
Проецирование точки

Точка в I-ой четверти

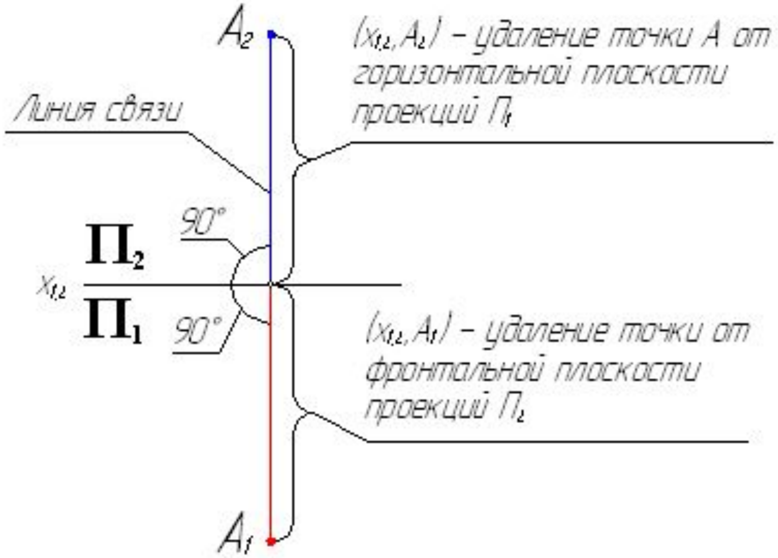
Наглядное изображение



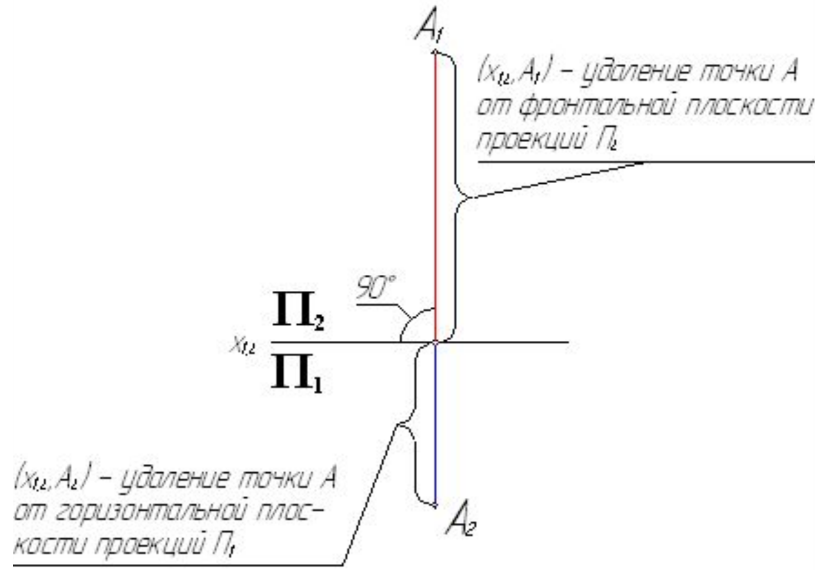
Плоскостное изображение - **Эпюр**



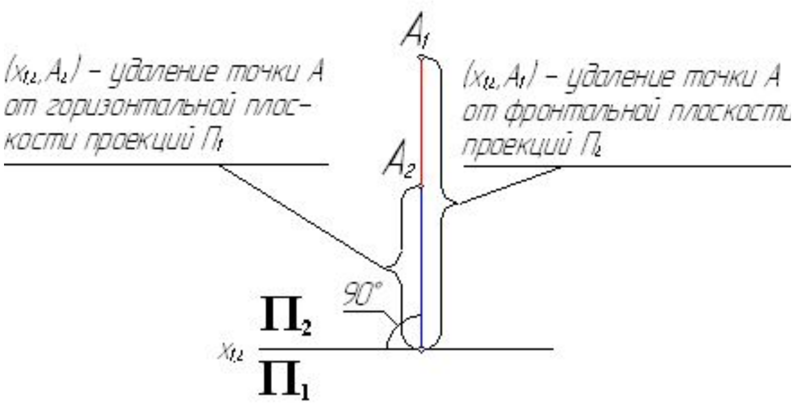
I


A_2
(x_{12}, A_2) – удаление точки A от горизонтальной плоскости проекций $П_1$
Линия связи
90°
$П_2$
x_{12}
$П_1$
90°
(x_{12}, A_1) – удаление точки от фронтальной плоскости проекций $П_2$
A_1

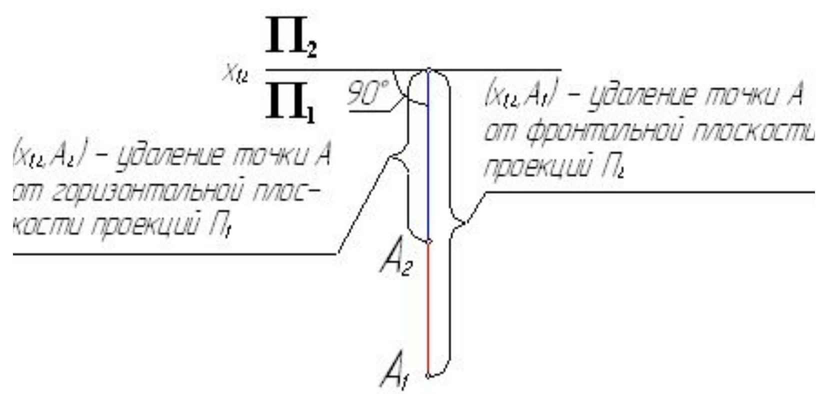
III


A_1
(x_{12}, A_1) – удаление точки A от фронтальной плоскости проекций $П_2$
90°
$П_2$
x_{12}
$П_1$
(x_{12}, A_2) – удаление точки A от горизонтальной плоскости проекций $П_1$
A_2

II


A_1
(x_{12}, A_2) – удаление точки A от горизонтальной плоскости проекций $П_1$
(x_{12}, A_1) – удаление точки A от фронтальной плоскости проекций $П_2$
A_2
90°
$П_2$
x_{12}
$П_1$

IV


$П_2$
x_{12}
$П_1$
90°
(x_{12}, A_1) – удаление точки A от фронтальной плоскости проекций $П_2$
(x_{12}, A_2) – удаление точки A от горизонтальной плоскости проекций $П_1$
A_2
A_1

Горизонтальная и фронтальная проекции точки располагаются на одной прямой, перпендикулярной оси $x_{1,2}$

$$A_1A_2 \perp x_{1,2}$$

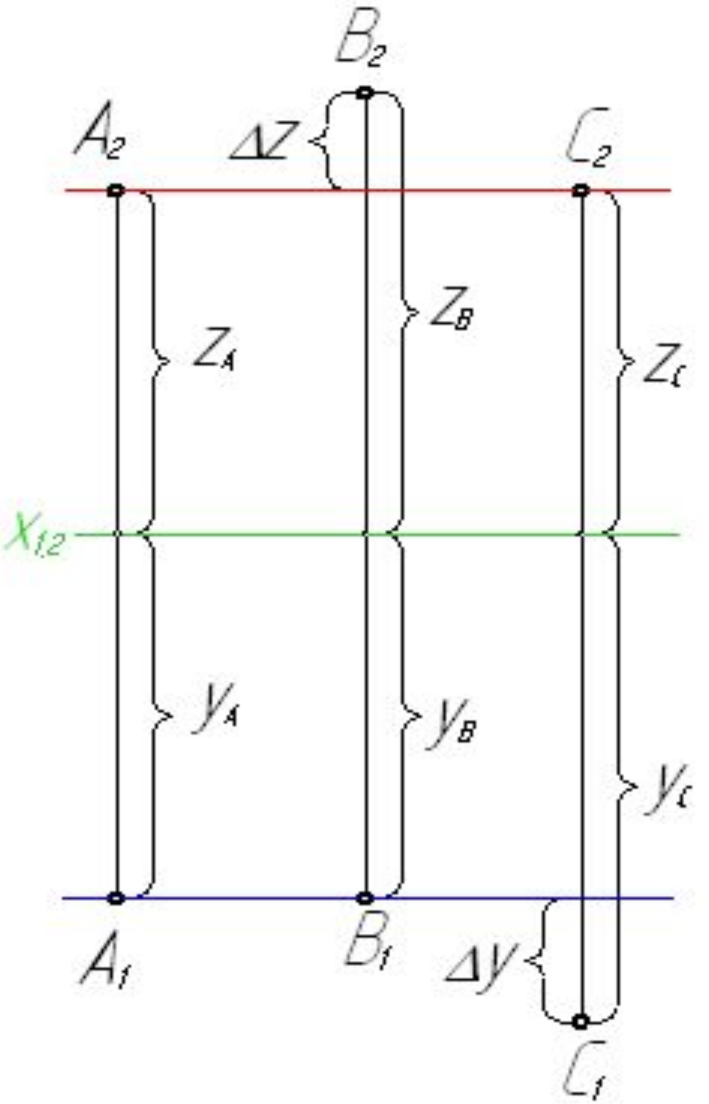
Расстояние от оси $x_{1,2}$ до горизонтальной проекции точки определяет расстояние от самой точки до фронтальной плоскости проекций.

$$(x_{1,2}, A_1) = (A, \Pi_2) \text{ - } \underline{\textit{глубина}}$$

Расстояние от оси $x_{1,2}$ до фронтальной проекции точки определяет расстояние от самой точки до горизонтальной плоскости проекций.

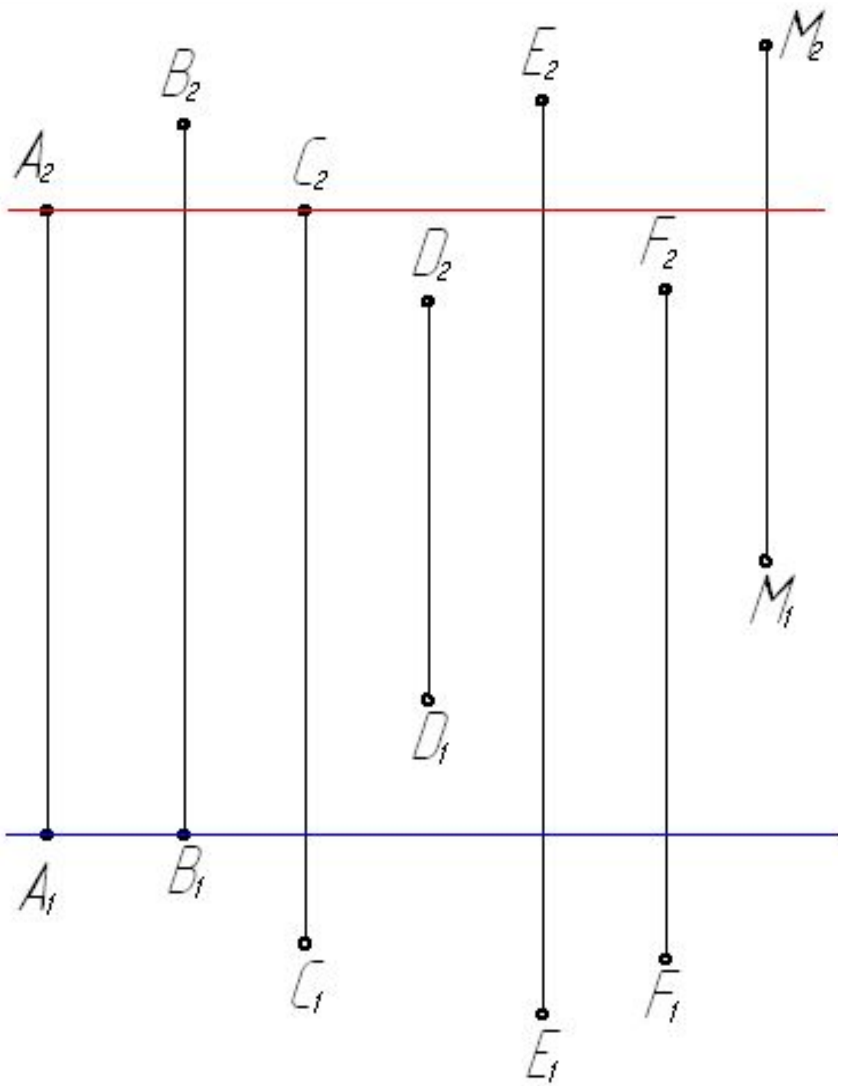
$$(x_{1,2}, A_2) = (A, \Pi_1) \text{ - } \underline{\textit{высота}}$$

Абсолютные и относительные координаты точки



- z_A, z_B, z_C, y_A, y_B, y_C – абсолютные координаты;
- Δz, Δy – относительные координаты (приращения).

Безосный эпюр

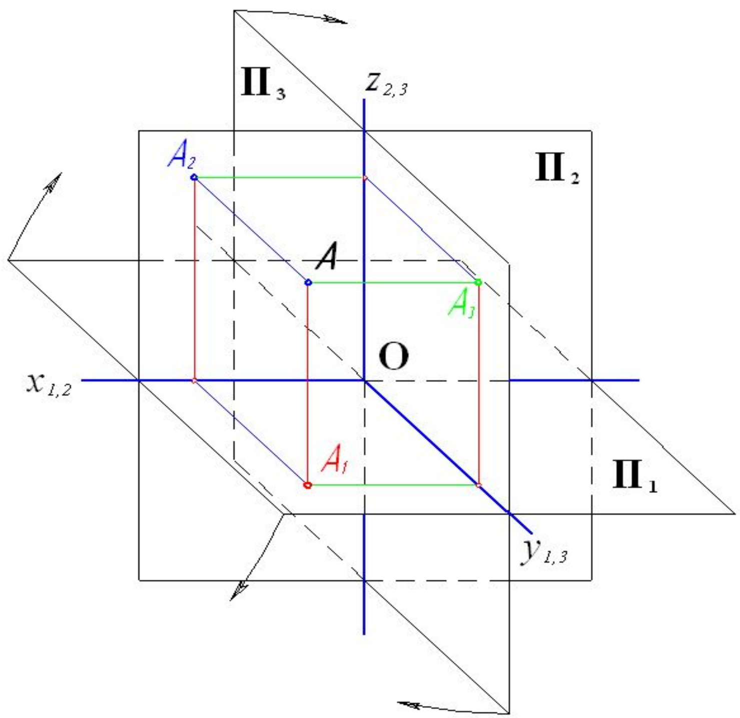


- Точка B выше точки A;
- Точка C перед точкой A;
- Точка D ниже точки A и за точкой A;
- Точка E выше точки A и перед точкой A;
- Точка F ниже точки A и перед точкой A;
- Точка M выше точки A и за точкой A.

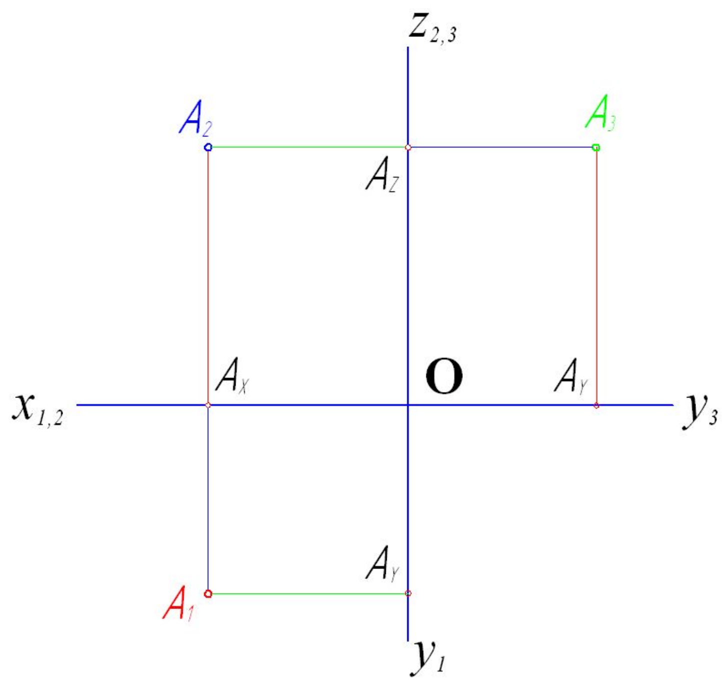
Проецирование точки в системе трех ортогональных плоскостей проекций

Точка в первом октанте

Наглядное изображение



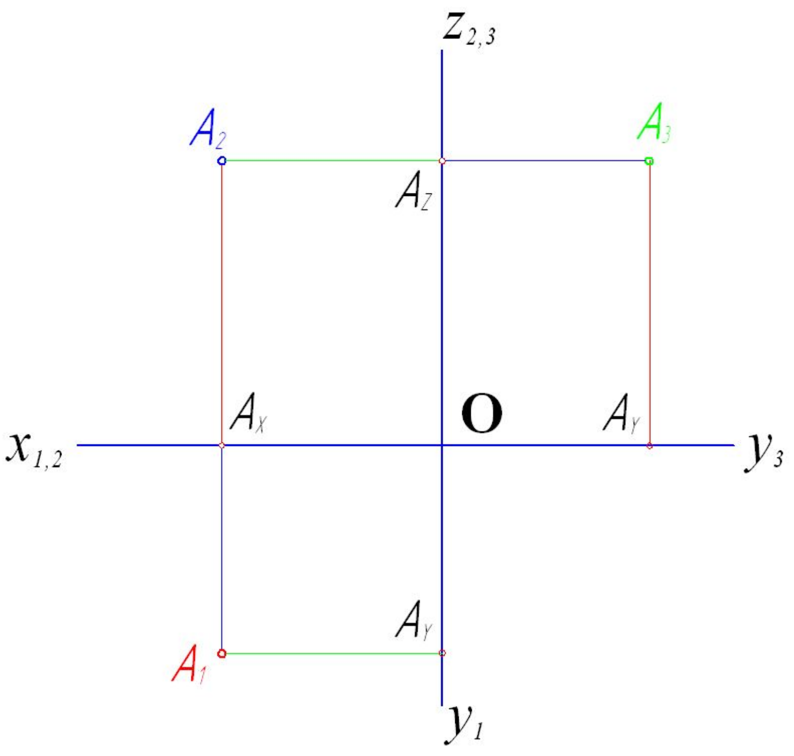
Эпюр



$$\left.\begin{array}{l}(A,\Pi_1)=(A_2,x_{1,2})=z_A \\ (A,\Pi_2)=(A_1,x_{1,2})=y_A \\ (A,\Pi_3)=(A_2,z_{2,3})=x_A\end{array}\right\}$$ абсолютные координаты точки

Условия, которым должен удовлетворять эпюр точки, расположенной в любой части пространства, в системе трех ортогональных плоскостей проекций:

- $A_1A_2 \perp x_{1,2}$
- $A_2A_3 \perp z_{2,3}$
- $(A_1,x_{1,2}) = (A_3,z_{2,3})$



Переход от эпюра в начертательной геометрии к безосному чертежу