Лекция 5

Методы преобразования плоскостей проекций.

- Вращение вокруг проецирующих осей.
- Вращение вокруг линии уровня
- Плоско- параллельное перемещение.

Общие положения

В данной группе методов исходный базис (П1 иП2) жестко зафиксирован в пространстве. Объект перемещается (вращается) так, чтобы он отразился на исходные плоскости П1 и П2 в удобном для решения задачи положении

Общие положения

- Независимо от метода преобразования, в задаче выделяется главный элемент, с которым и выполняются преобразования. Все остальные элементы (объекты) задачи являются зависимыми от главного и преобразуются вместе с ним.
- Главным элементом может быть прямая или плоскость

Общие положения

Типовые задачи:

- Главный элемент – прямая

1) Прямую общего положения преобразовать в линию уровня

   $L \rightarrow L' \parallel П$

2) Прямую общего положения преобразовать в проецирующую

   $L \rightarrow L'' \perp П$

Общие положения

- Главный элемент – плоскость

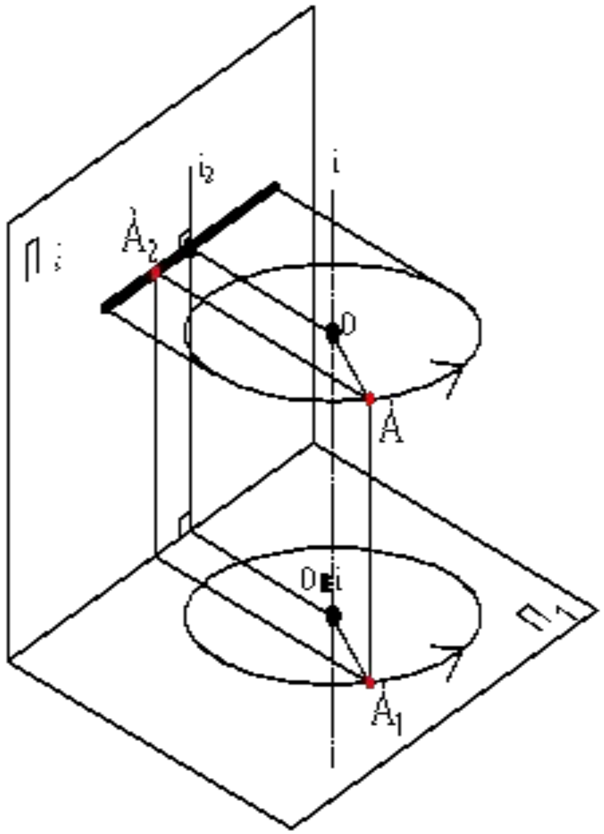
3) Плоскость общего положения преобразовать в проецирующую

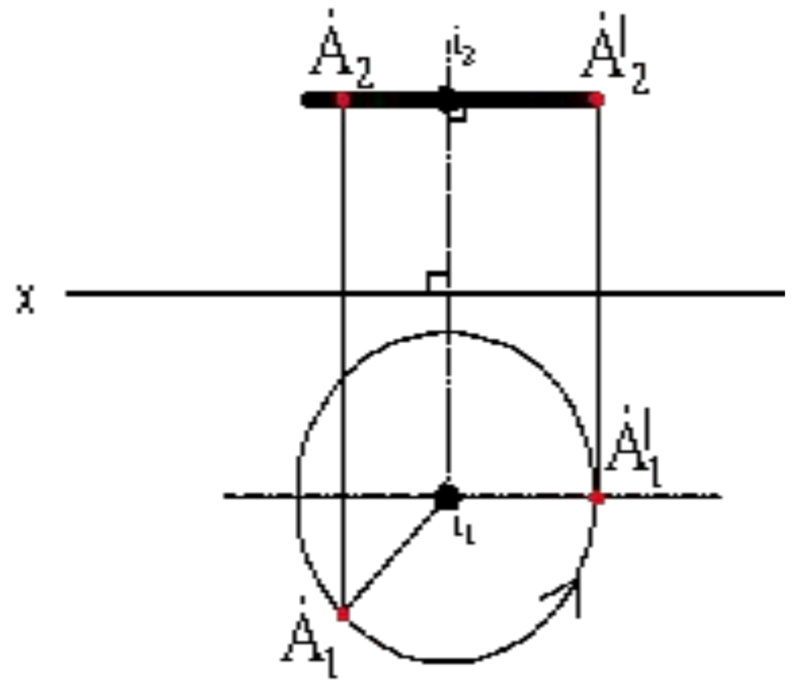
   $\alpha \rightarrow \alpha' \perp \Pi$

4) Плоскость общего положения преобразовать в плоскость уровня

   $\alpha \rightarrow \alpha'' \parallel \Pi$

Вращение вокруг проецирующих осей



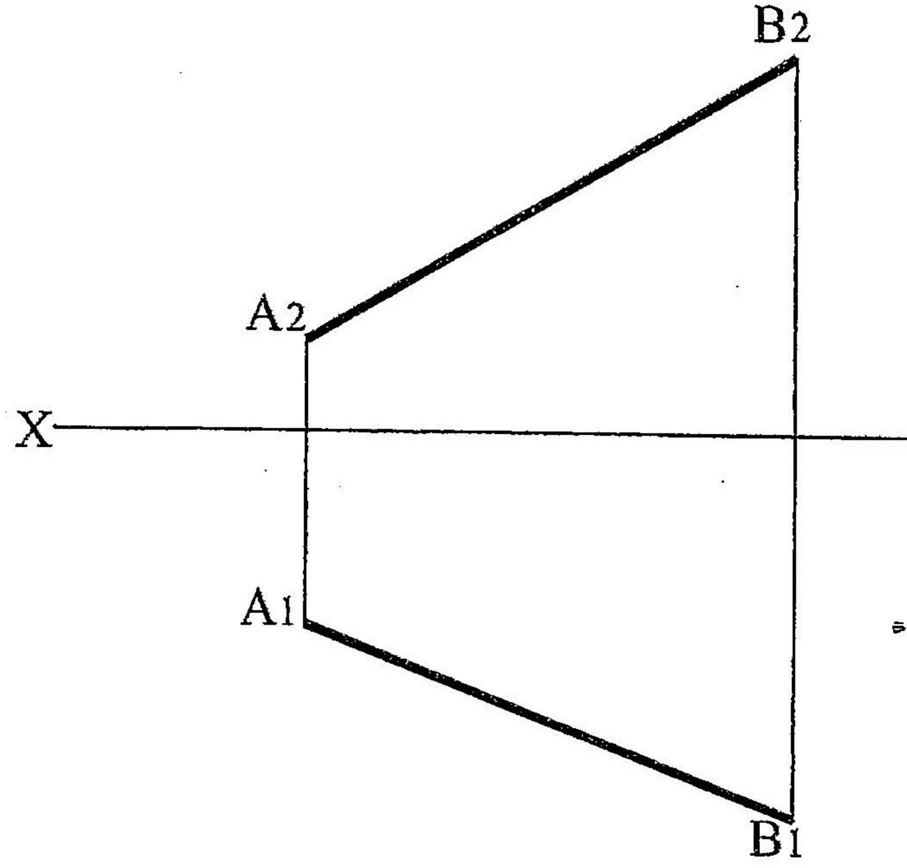


Сущность метода вращения вокруг проецирующих осей состоит в том, что все точки фигуры движутся по окружностям в плоскостях, перпендикулярных к оси вращения, параллельно плоскости проекций, которой перпендикулярна ось вращения.

Преобразование отрезка прямой общего положения в прямую уровня (1 типовая задача)

Задача 7.1 стр.34

Найти натуральную величину отрезка прямой АВ и угол наклона его к плоскости П1 вращением вокруг оси, перпендикулярной плоскости проекций П1

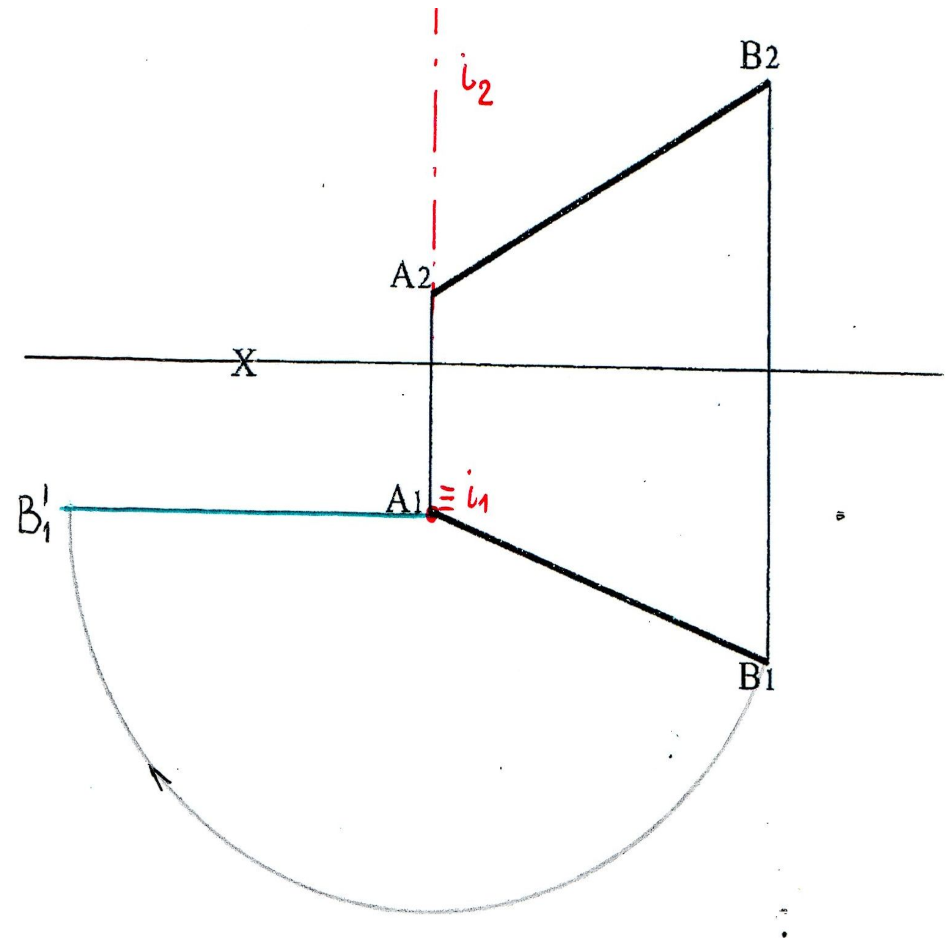


Решение: Отрезок проецируется на плоскость проекций в натуральную величину, если он параллелен этой плоскости.

- Следовательно, надо выполнить 1 типовую задачу: преобразовать прямую общего положения в прямую уровня

В (·) А задаем ось i, перпендикулярную плоскости П1

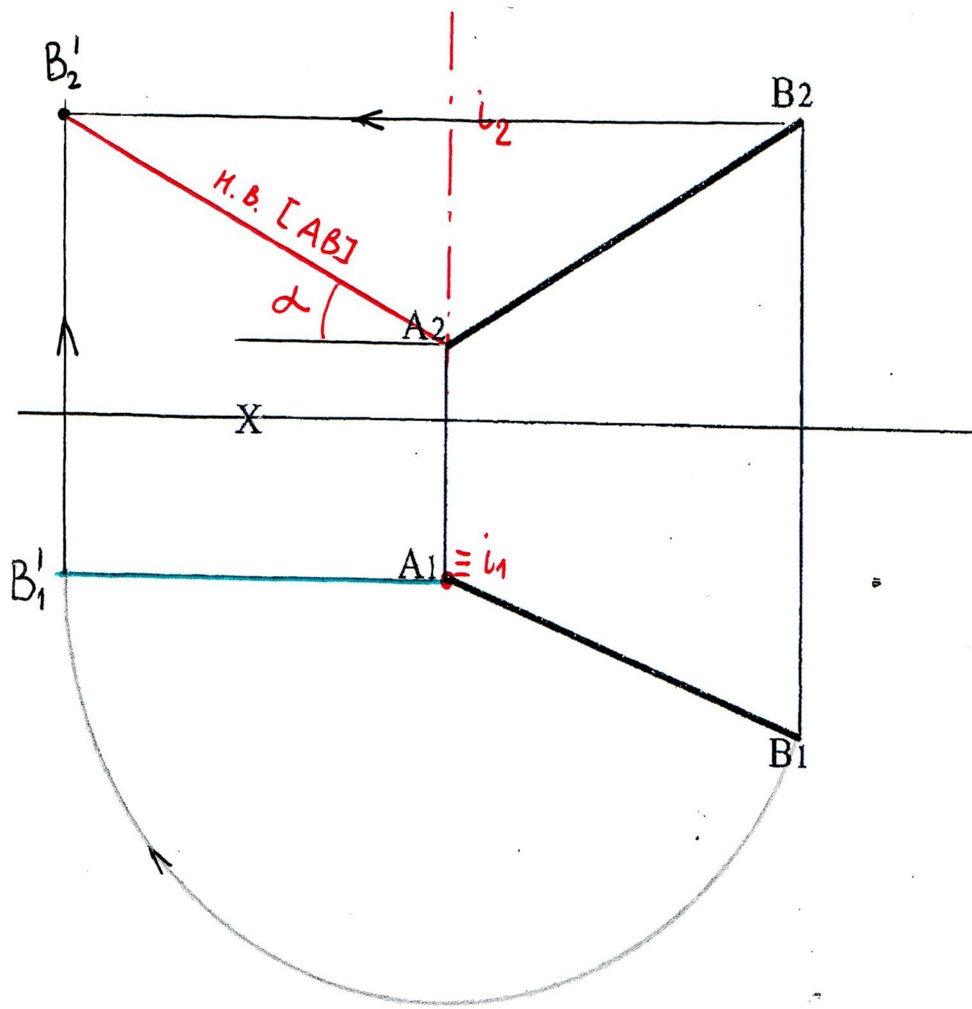
$A_1 \equiv i_1$, $i_2 \perp$ Оси Х и поворачиваем отрезок таким образом, чтобы он стал **параллелен** плоскости П2.



На плоскости П2 проекция точки В перемещается на своей высоте в новое положение В2‘

В2‘ А2 = н.в. [АВ]

α – угол, который [АВ] составляет с горизонтальной плоскостью

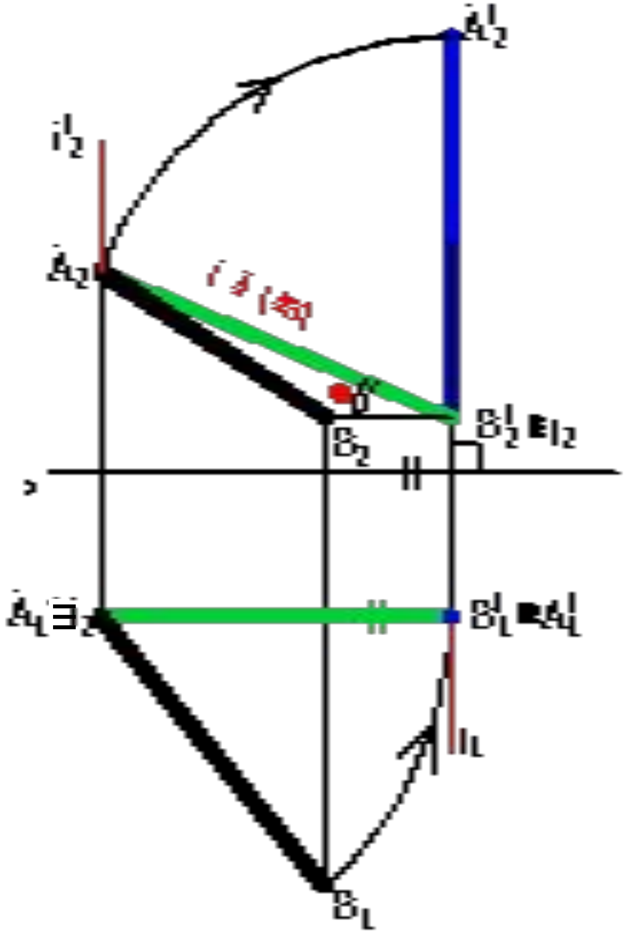


Преобразование отрезка прямой общего положения в проецирующий (2 типовая задача)

В том случае, если [АВ] – отрезок прямой общего положения, задача решается в два действия.

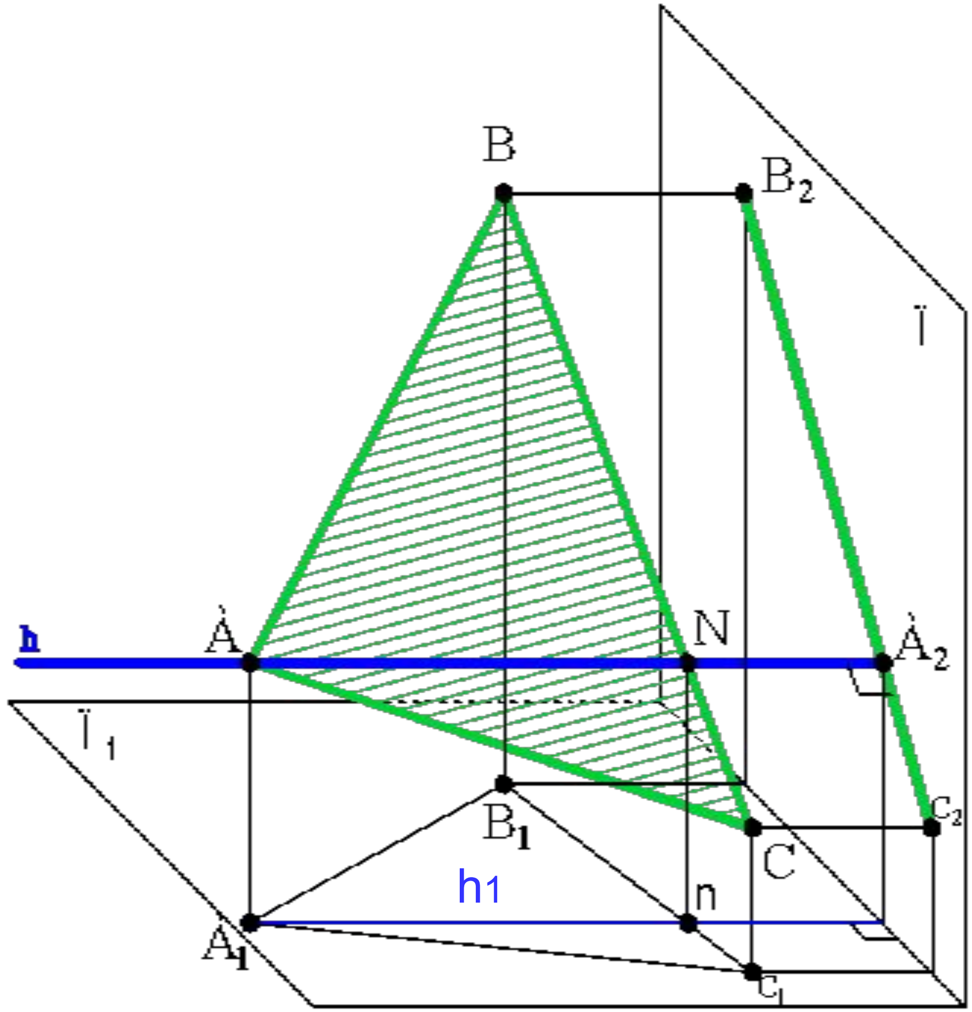
1. Преобразовываем отрезок [АВ] в прямую уровня.

2. В (·) В задаем ось j, перпендикулярную плоскости Π_2 и поворачиваем отрезок таким образом, чтобы он стал перпендикулярен плоскости Π_1. Тогда он проецируется на эту плоскость в точку ($B_1' \equiv A_1'$).



Преобразование плоскости общего положения в проецирующую (3 типовая задача)

Плоскость общего положения перпендикулярна другой плоскости, в том числе плоскости проекций в том случае, если она содержит в себе прямую, перпендикулярную этой плоскости.



$h \subset \Delta ABC$

$h \perp П_2 \rightarrow \Delta ABC \perp П_2$

Преобразование плоскости общего положения в проецирующую и определение угла наклона плоскости к плоскости проекций (3 типовая задача)

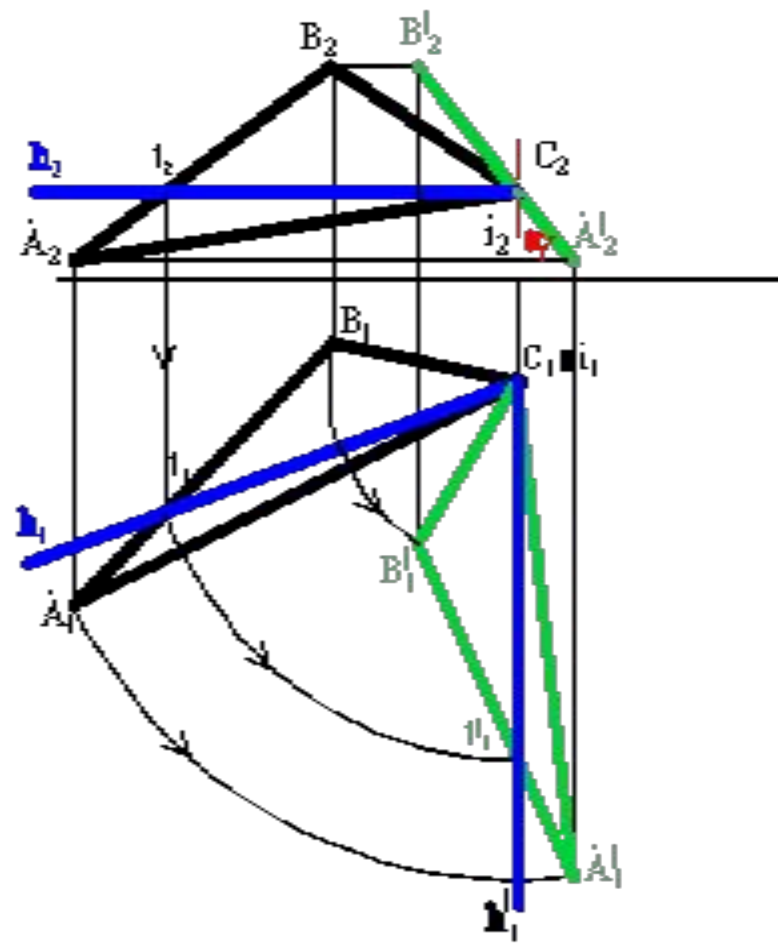
Чтобы определить угол наклона плоскости общего положения к какой-либо плоскости проекций, необходимо преобразовать эту плоскость в проецирующую. (3 типовая задача)

Плоскость перпендикулярна другой плоскости в том случае, если она содержит в себе прямую, перпендикулярную этой плоскости.

h ⊥ **П2** → **h1** ⊥ **X1,2**

Поворот треугольника осуществляется вокруг оси «i», перпендикулярной П1 и проходящей через точку С.

$C_1 \equiv i_1$, $i_1 \perp X$

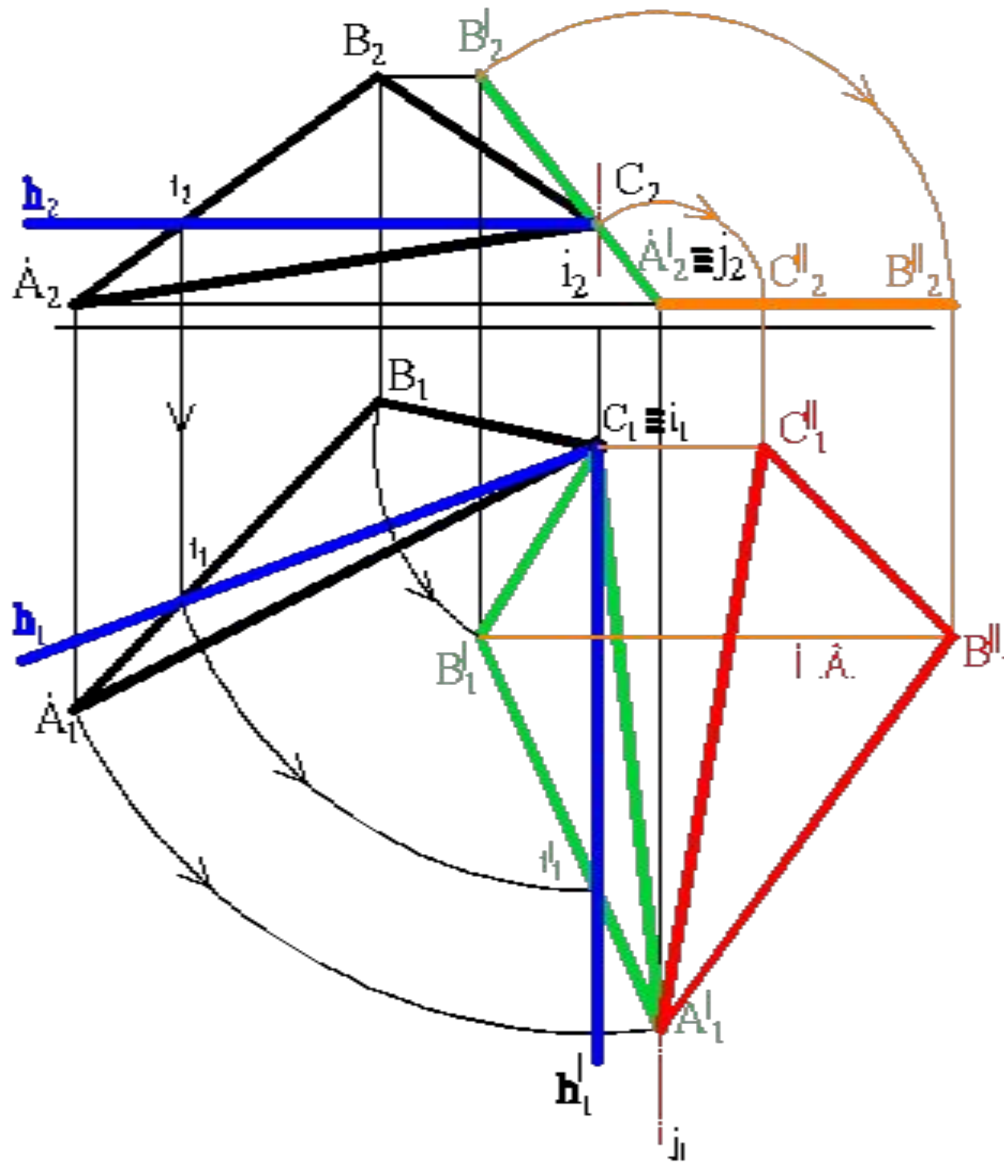


Преобразование плоскости общего положения в плоскость уровня (4 типовая задача)

Задача решается в два действия.

1. **Плоскость, вращением вокруг оси «i», преобразовывают в проецирующую ($i \perp П_1$, $C_1 \equiv i_1$, $i_2 \perp OX$) .**

2. Изменив ось вращения ($j_2 \equiv A_2'$, $j_1 \perp X$), плоскость располагают параллельно плоскости проекций, на которую она проецируется в натуральную величину.



Δ ABC $\parallel$ $П_1$, $A''_2\ B''_2\ C'_2$ $\parallel$ $x_{1,2}$

$\rightarrow\rightarrow$ $A''_1 B''_1 C''_1$ - н.в.

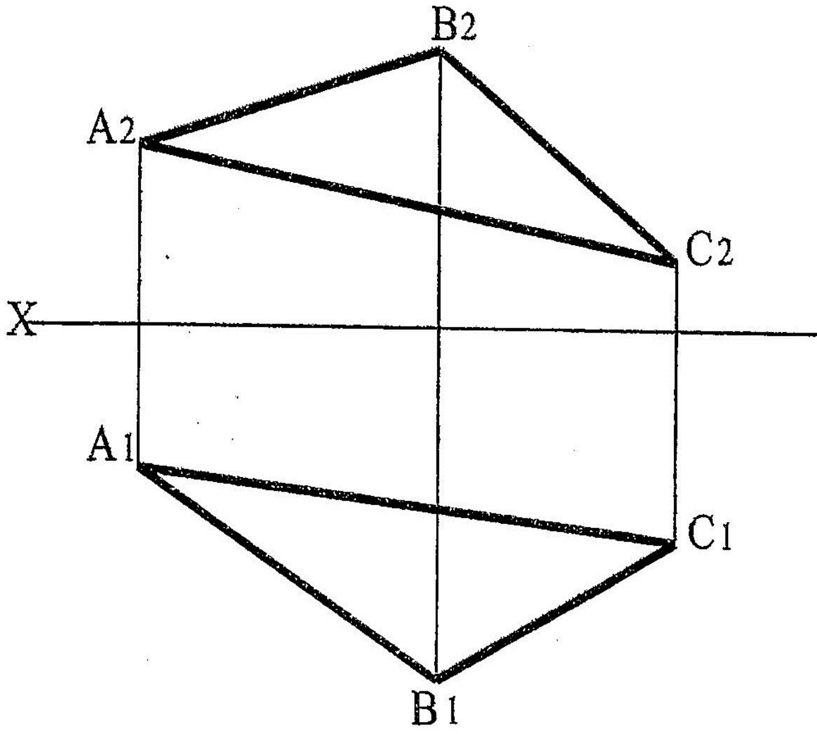
Преобразование плоскости общего положения в плоскость уровня (4 типовая задача)

Задача 7.2 стр.34:

Найти истинную величину треугольника АВС последовательным вращением вокруг осей, перпендикулярных плоскостям проекций.

Задача решается в два этапа: 1) развернем плоскость в положение проецирующей (3 типовая задача)

2) Развернем плоскость в положение, параллельное плоскости проекций (4 типовая задача)



Решение: Гл.элемент преобразования – плоскость.

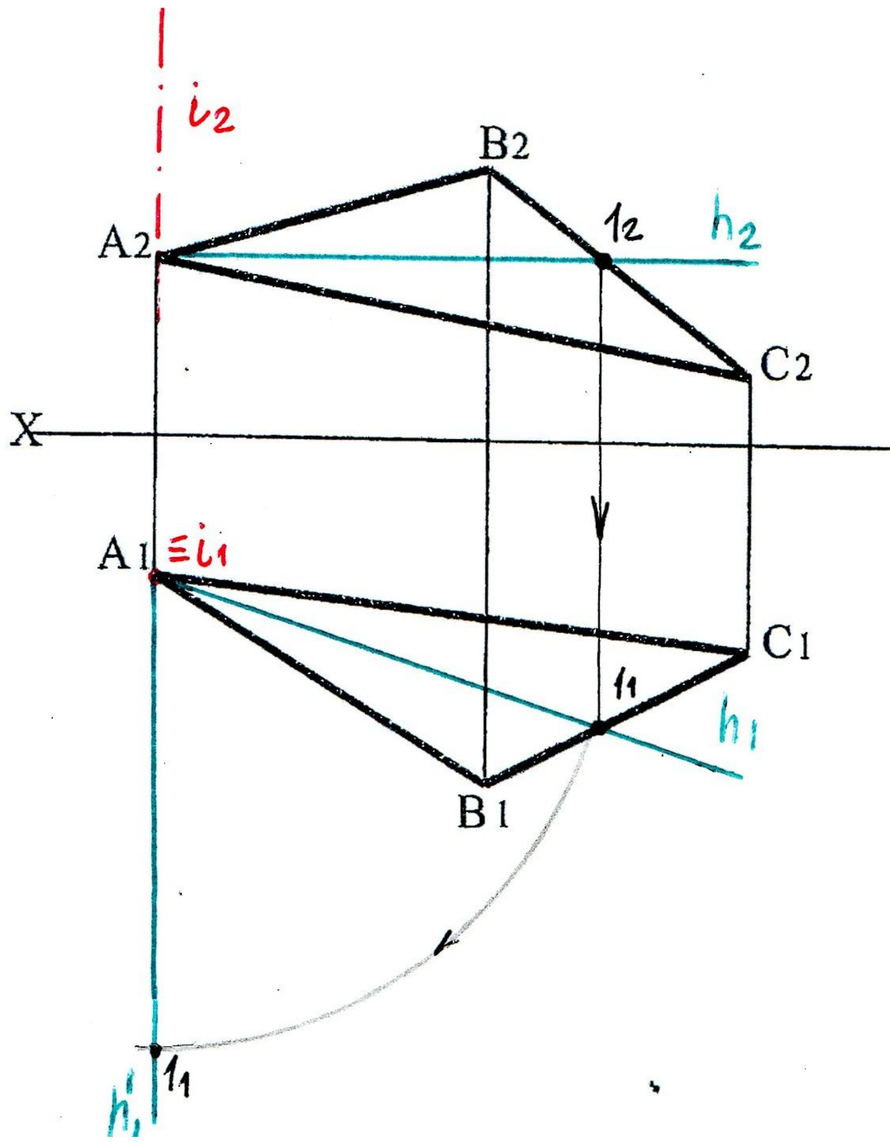
1) Преобразуем плоскость общего положения в проецирующую:

Зададим в плоскости ΔАВС линию уровня (например горизонталь)

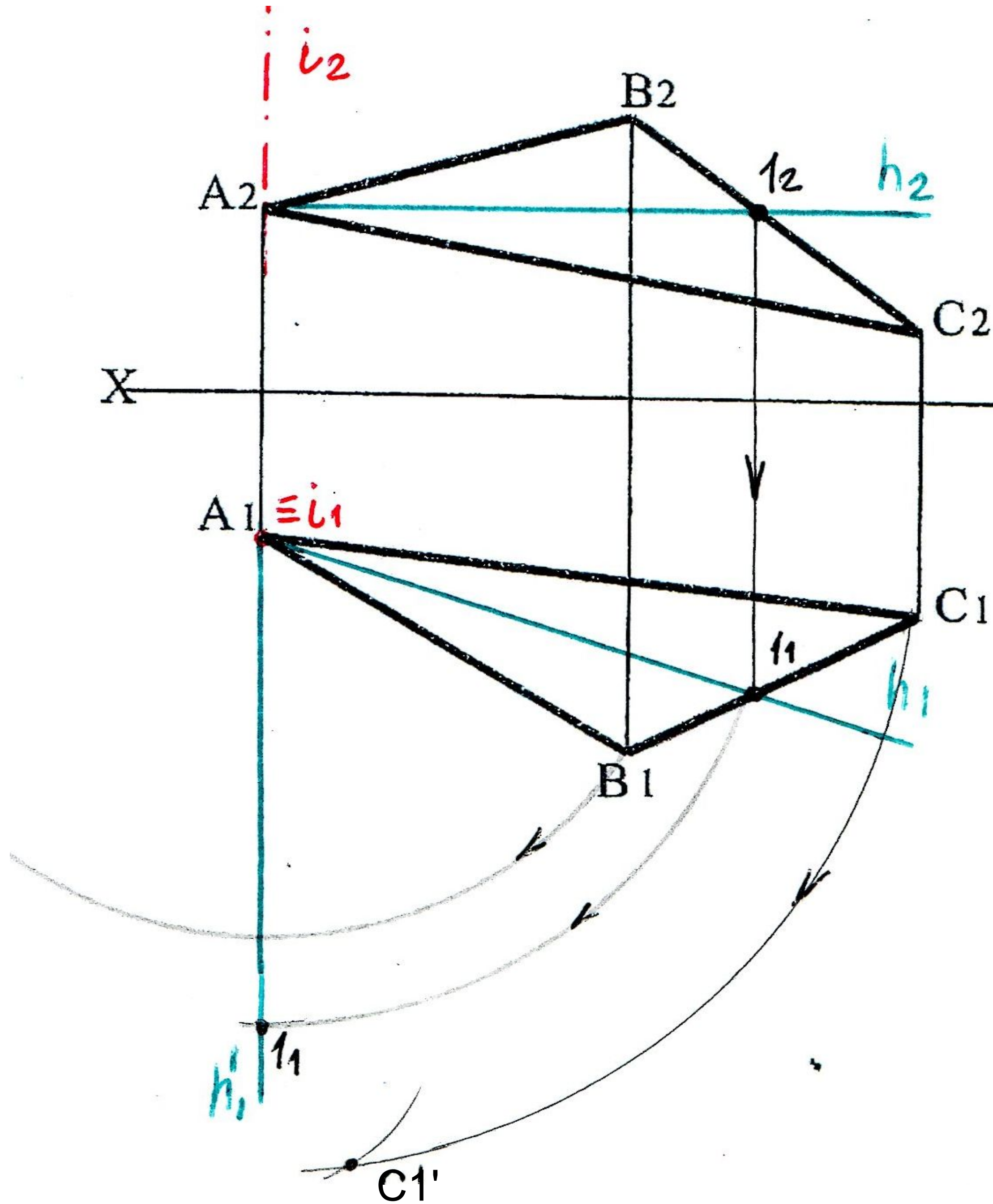
Выберем ось вращения i┴П1, проходящую через точку А

$A_1 \equiv i_1$, $i_2 \perp X$

Развернем горизонталь вокруг оси i так, чтобы она стала перпендикулярна к плоскости П2

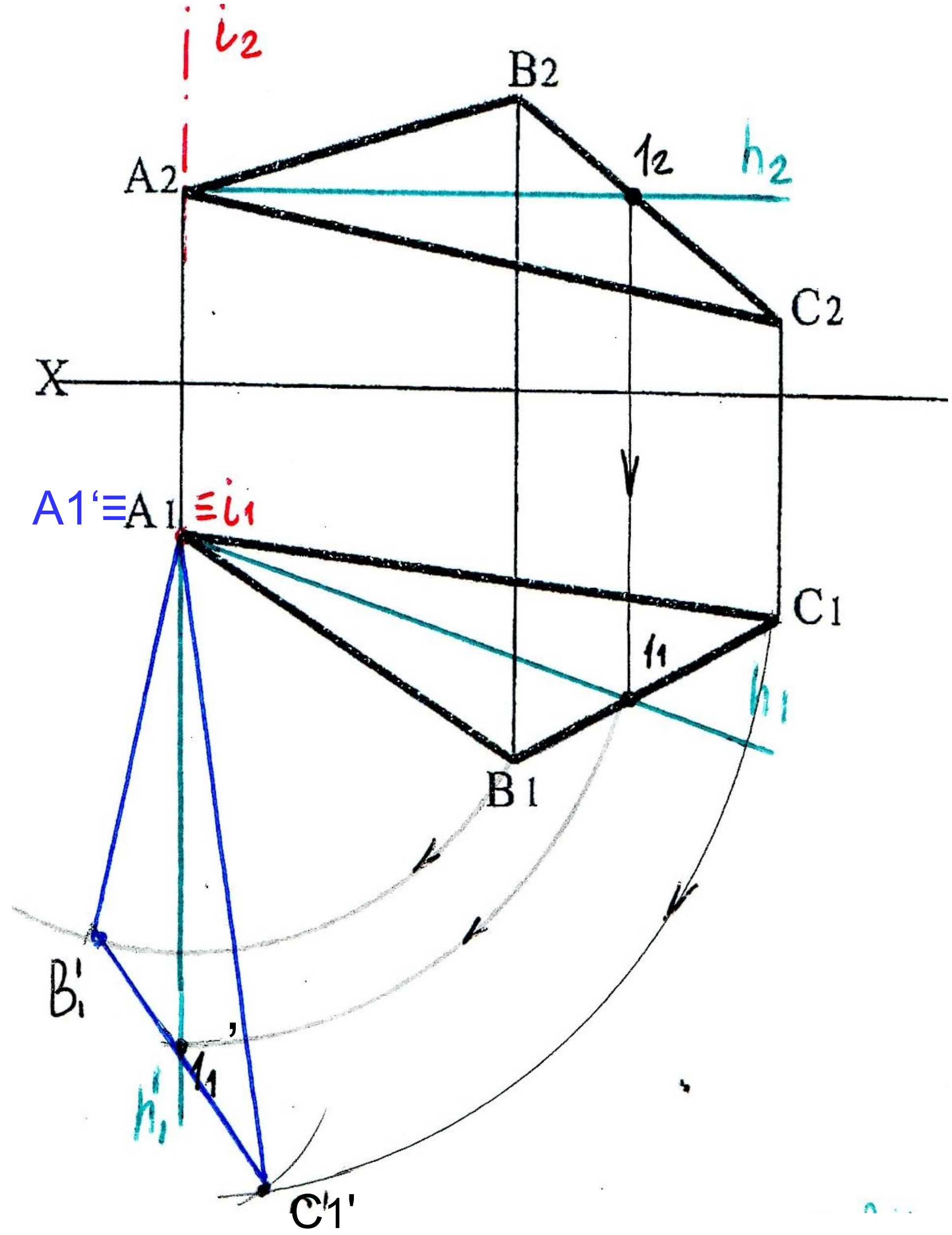


Все точки фигуры движутся одновременно и останавливаются, когда горизонталь разворачивается в положение, перпендикулярное плоскости П2. (намечаем траектории вращения точек В и С. Измеряем расстояние от 1_1 до C_1 и из нового положения точки 1_1 делаем засечку на траектории точки С - получаем C_1'

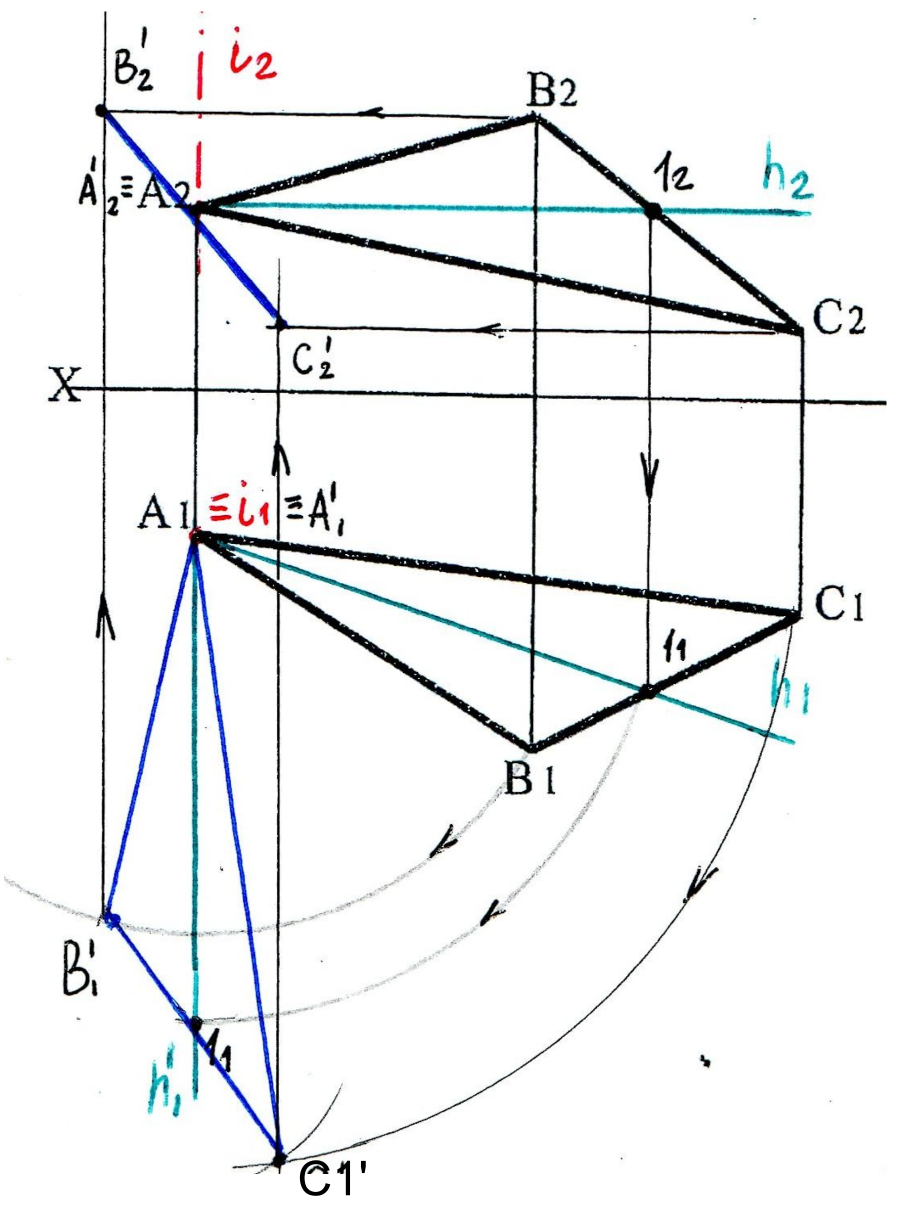


- Соединяем проекции точек 1_1‘ и C_1' , продолжаем далее до пересечения с траекторией движения точки В и определяем (.)$B1$' .
- Точка А при вращении осталась на месте, т.к. лежит на оси вращения. Соединяем

A_1‘-B_1 ‘-C_1 ‘→Δ A_1‘B_1‘C_1‘

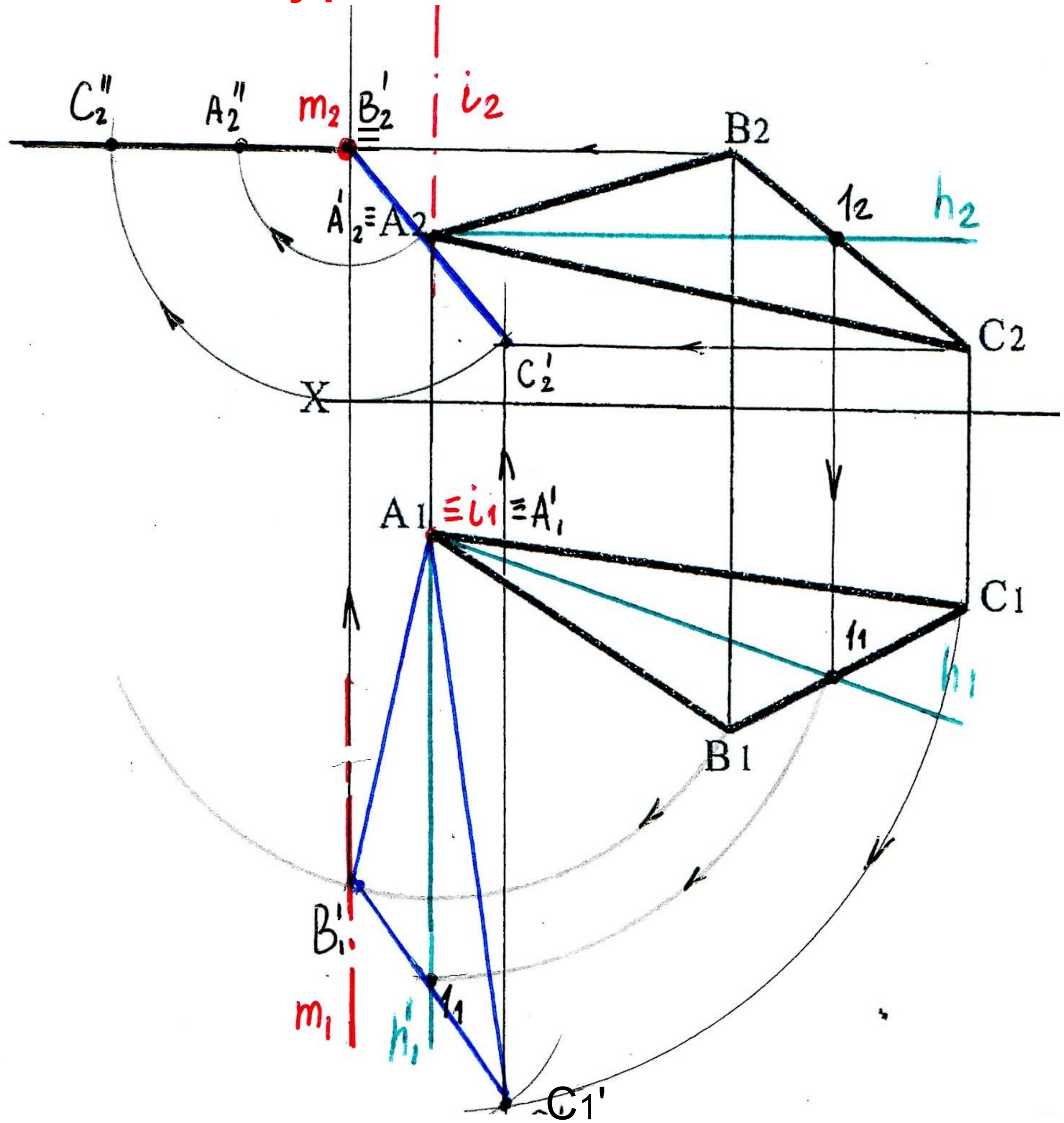


- Все точки фигуры, вращаясь вокруг оси i⊥П1, движутся параллельно плоскости П1
- На чертеже на плоскости П2 все проекции точек перемещаются параллельно оси X, каждая на своей высоте.
- Т.о. находим новое положение фронтальных проекций точек B2'и C2' по линиям связи с горизонтальной проекцией ΔA1' B1' C1'
- A2'≡ A2
- Плоскость ΔABC проецируется в линию на П2

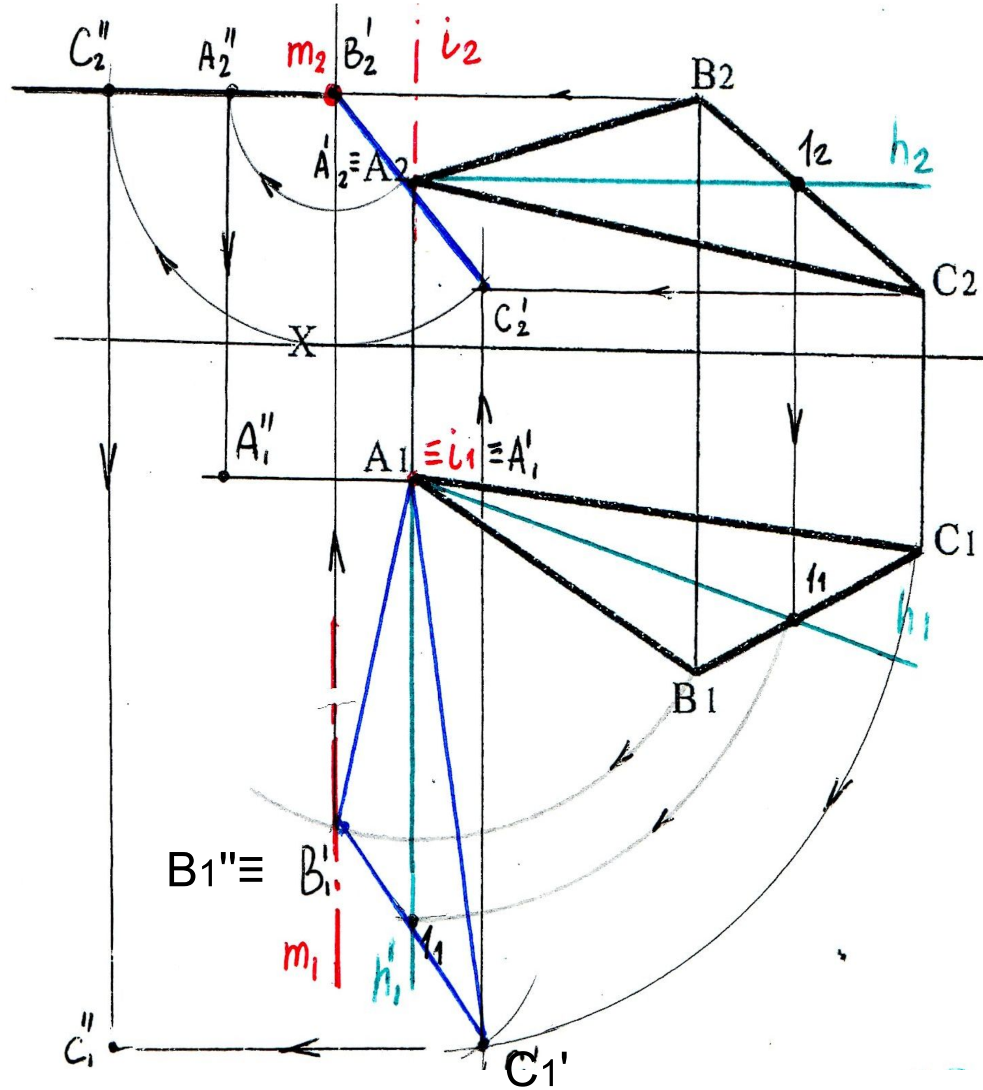


2)Преобразуем проецирующую плоскость в плоскость уровня

- Зададим вторую ось вращения $m \perp П2$ ($m_2 \equiv B_2$‘, $m_1 \perp$ оси X)
- Развернем плоскость ΔABC параллельно плоскости П1 вокруг оси m
- (на П2 проекция $C_2''A_2''B_2'' \parallel X$)

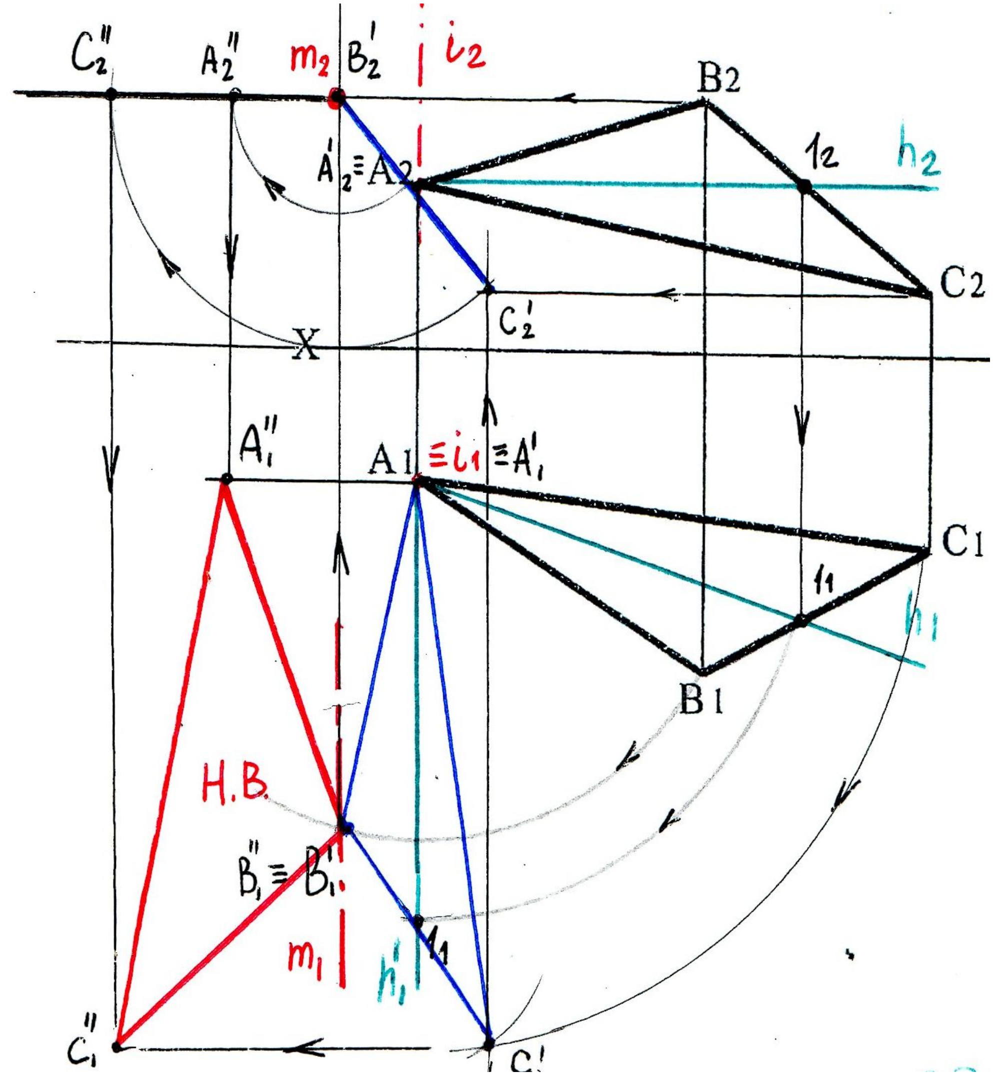


- Т.к. на П2 проекции точек A_2'' и C_2'' вращаются по окружности, на П1 проекции точек A_1'' и C_1'' перемещаются параллельно оси Х
- По линиям связи находим горизонтальные проекции точек A_1'', C_1'' . Точка В находится на оси m, Следовательно, проекции $B_1''\equiv B_1'$



Соединив полученные проекции

A1"C1 " B1 “ получим натуральную величину ΔABC



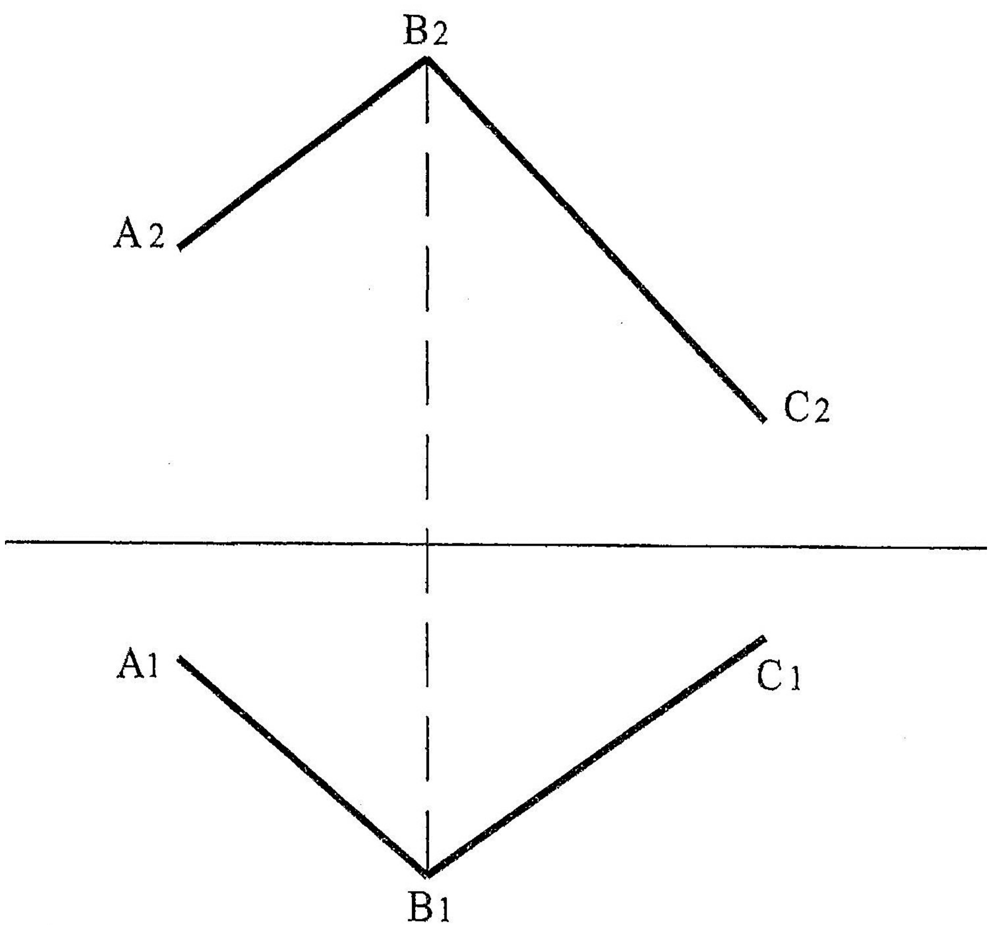
Вращение вокруг линий уровня

- Этот способ применяется для преобразования плоскости общего положения в плоскость уровня и для определения действительной величины плоской фигуры.
- Задача решается одним вращением вокруг линии уровня данной плоскости-горизонтали или фронтали.

Рассмотрим примеры

Задача 7.3 стр.35 :

Определить натуральную величину угла между прямыми AB и BC методом вращения вокруг фронтали



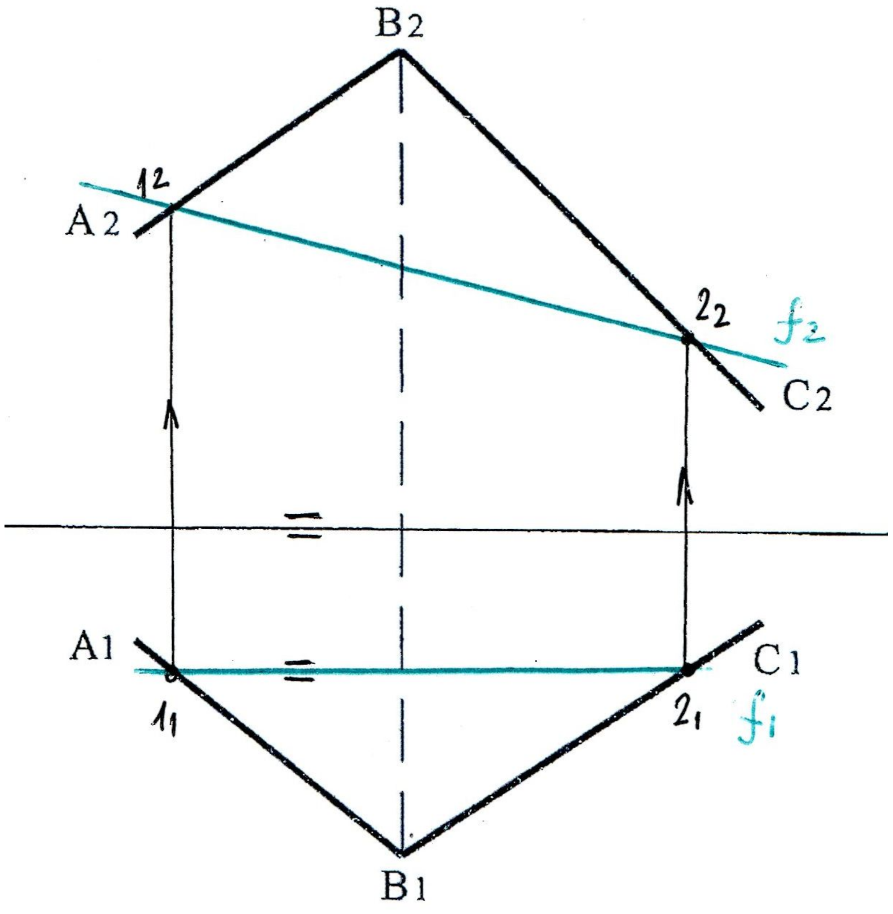
Решение:

Зададим в плоскости АВС фронталь на любом расстоянии от П2

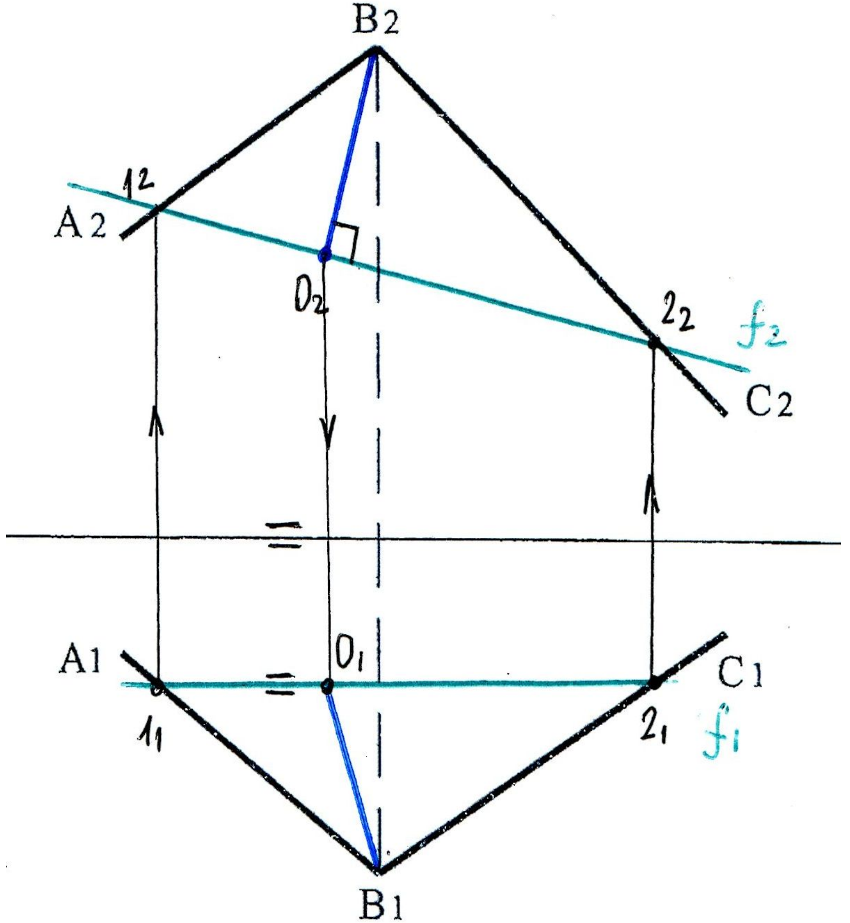
На чертеже на П1

f_1 ‖ оси Х и проходит через точки 1 и 2,

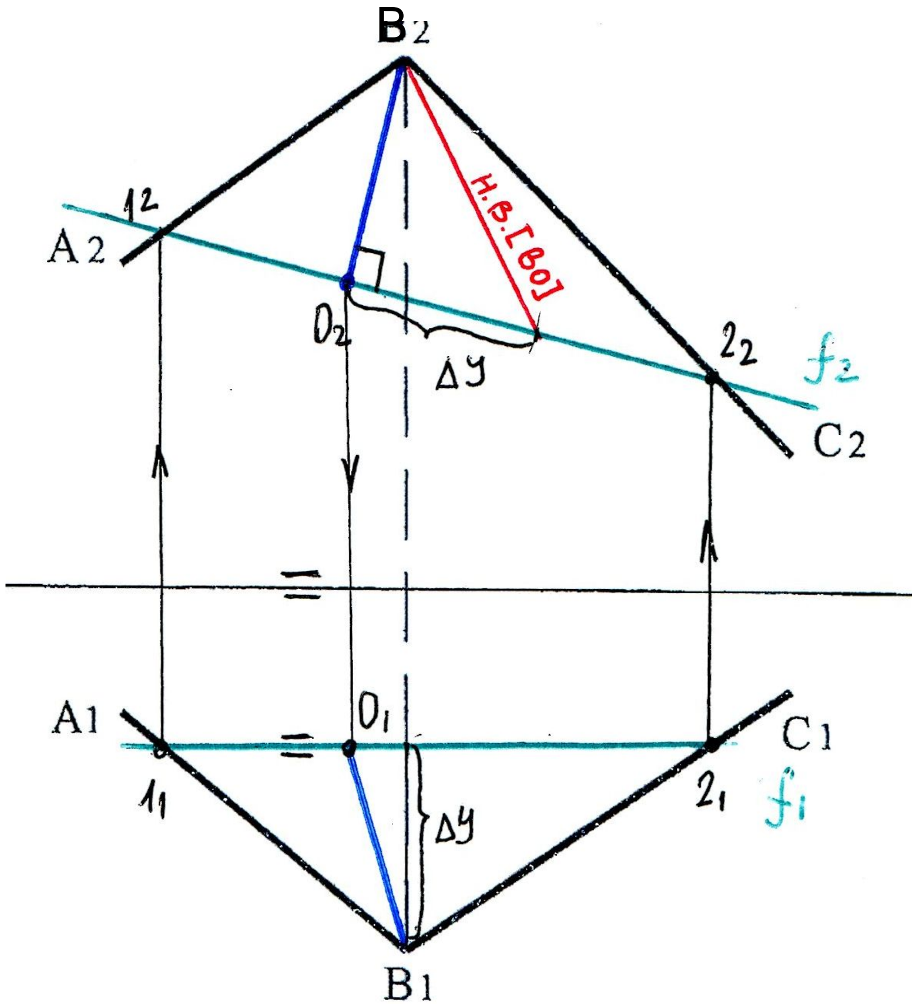
f_2- строим по принадлежности плоскости



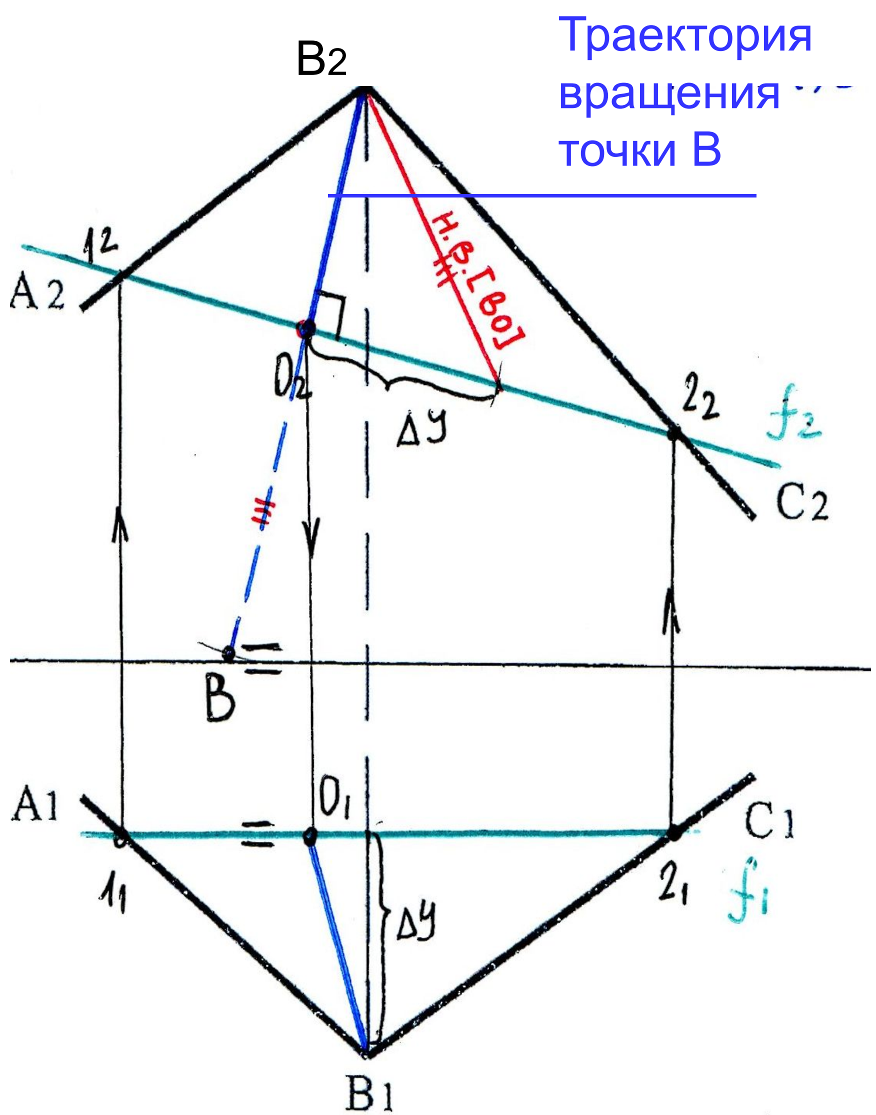
- Т.к. фронталь является осью вращения, точки 1 и 2, лежащие на оси, останутся неподвижными.
- Вершина В вращается по окружности, радиус вращения (.)В перпендикулярен оси вращения f . Проецируется на П2 отрезком прямой ВО, перпендикулярной оси вращения f
- $B_2O_2 \perp f_2 \rightarrow B_1O_1$ строим по принадлежности плоскости



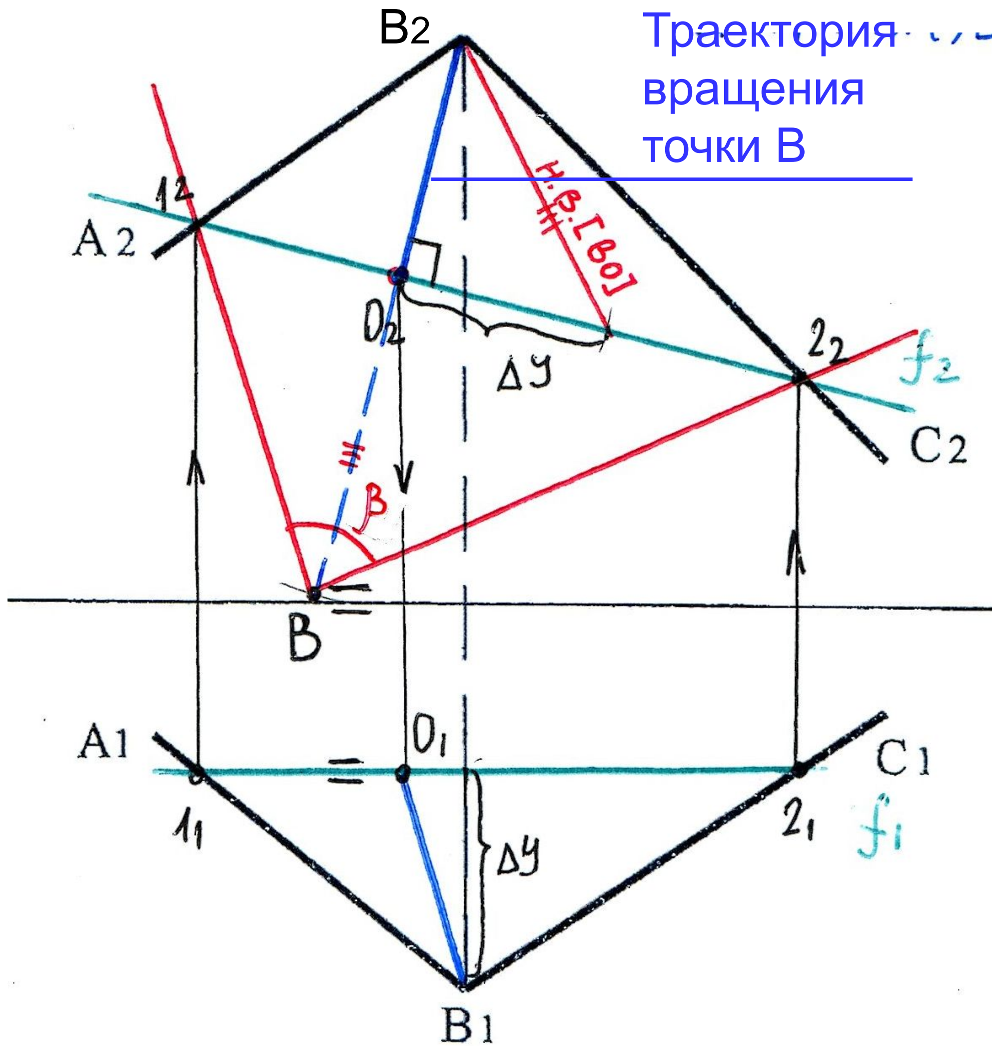
- Так как плоскость АВС должна развернуться параллельно П2, радиус вращения точки В (ВО) должен проецироваться на П2 в натуральную величину
- Длину радиуса вращения точки В (н. в.[ВО]) можно определить способом прямоугольного треугольника



- Траектория вращения точки В на П2 проецируется в линию, перпендикулярную оси вращения
- Отложим по траектории вращения отрезок BO_2 = н.в.[ВО]

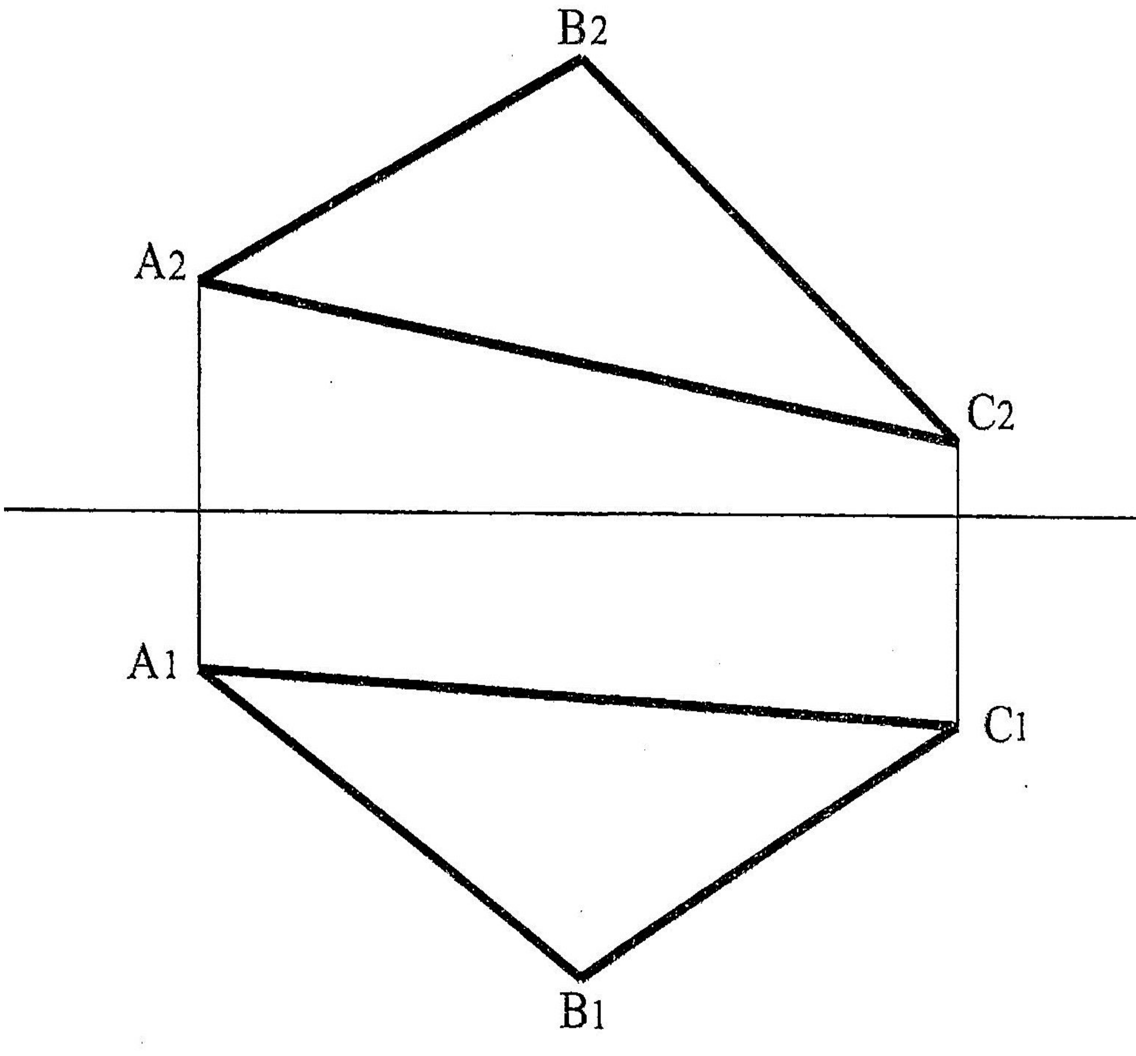


- Точка В развернулась в положение, параллельное П2.
- Угол β =н.в. угла между прямыми АВ и ВС



Задача 7.4 стр.35

Определить натуральную величину треугольника АВС вращением вокруг горизонтали



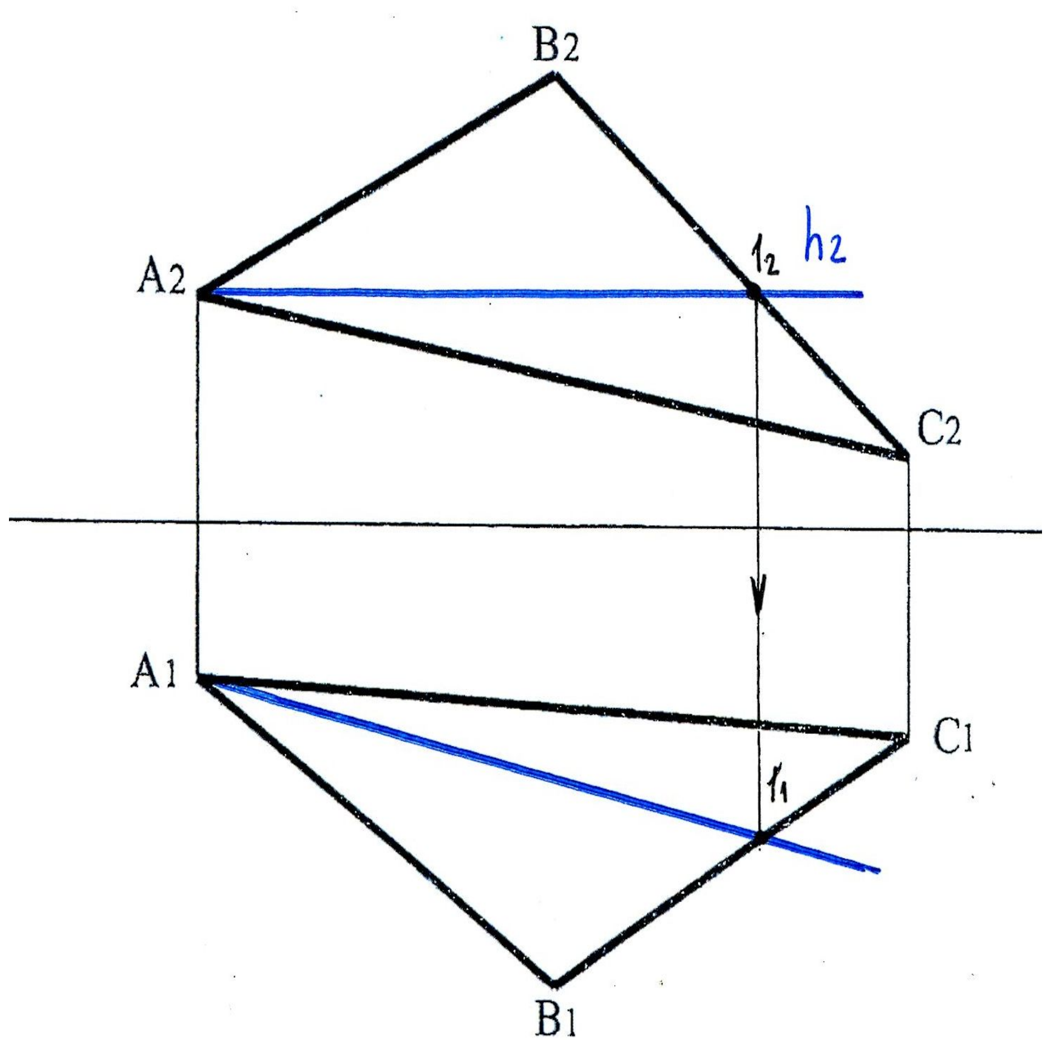
Решение:

Зададим в плоскости ABC горизонталь на любой высоте от П1 (например, через (.)A

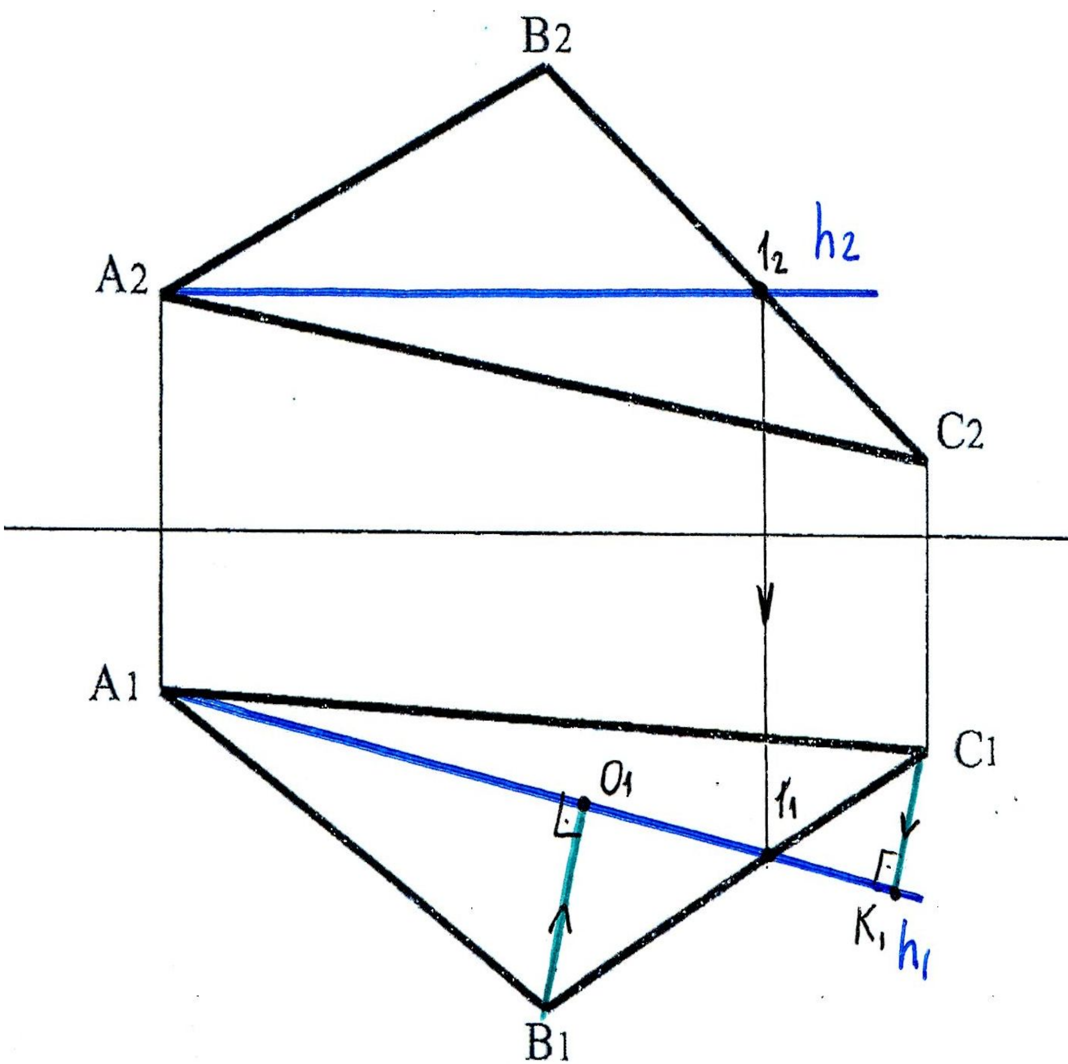
На чертеже на П2

h_2 || оси X и проходит через точки 1 и A,

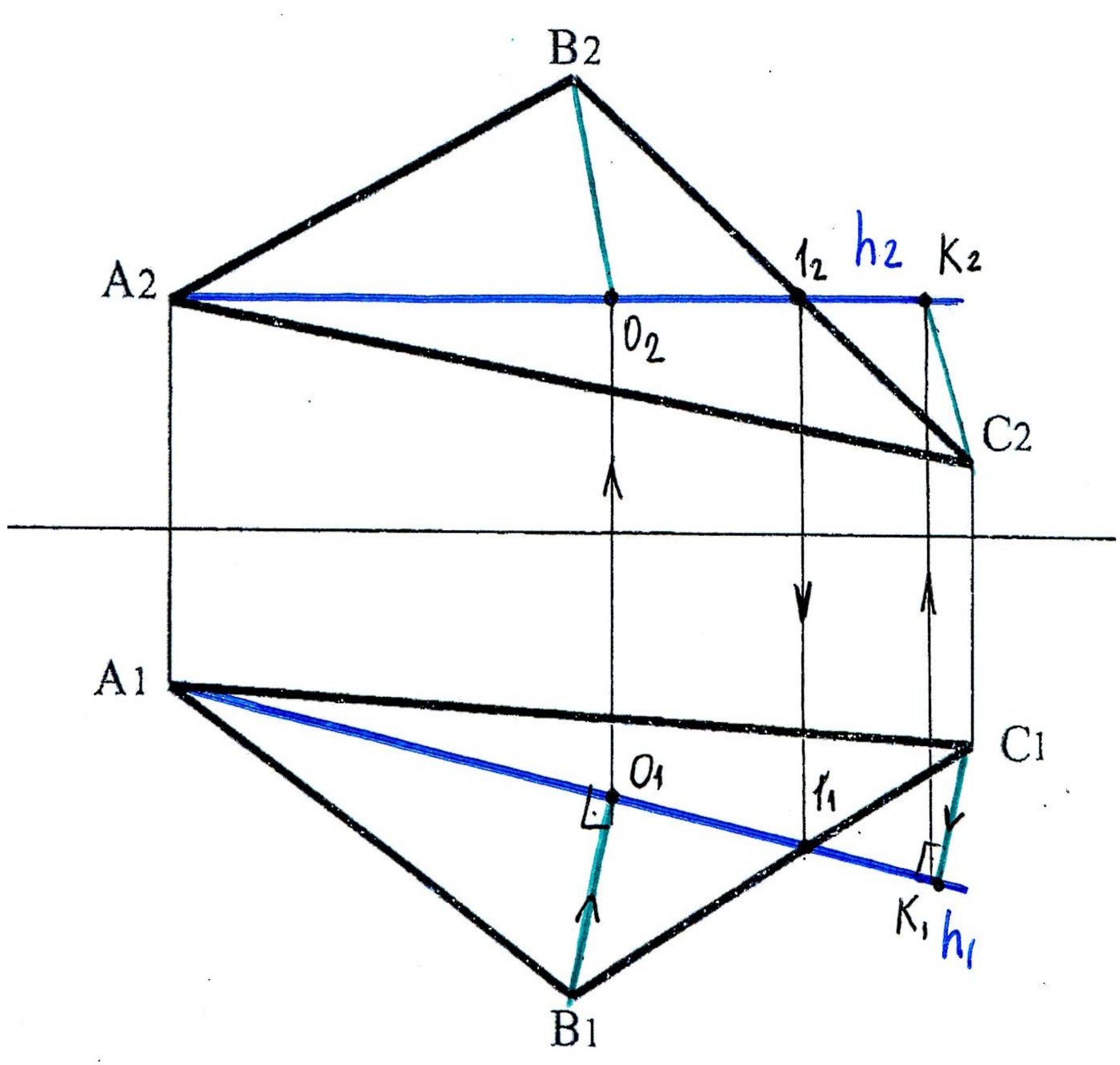
h_1- строим по принадлежности плоскости



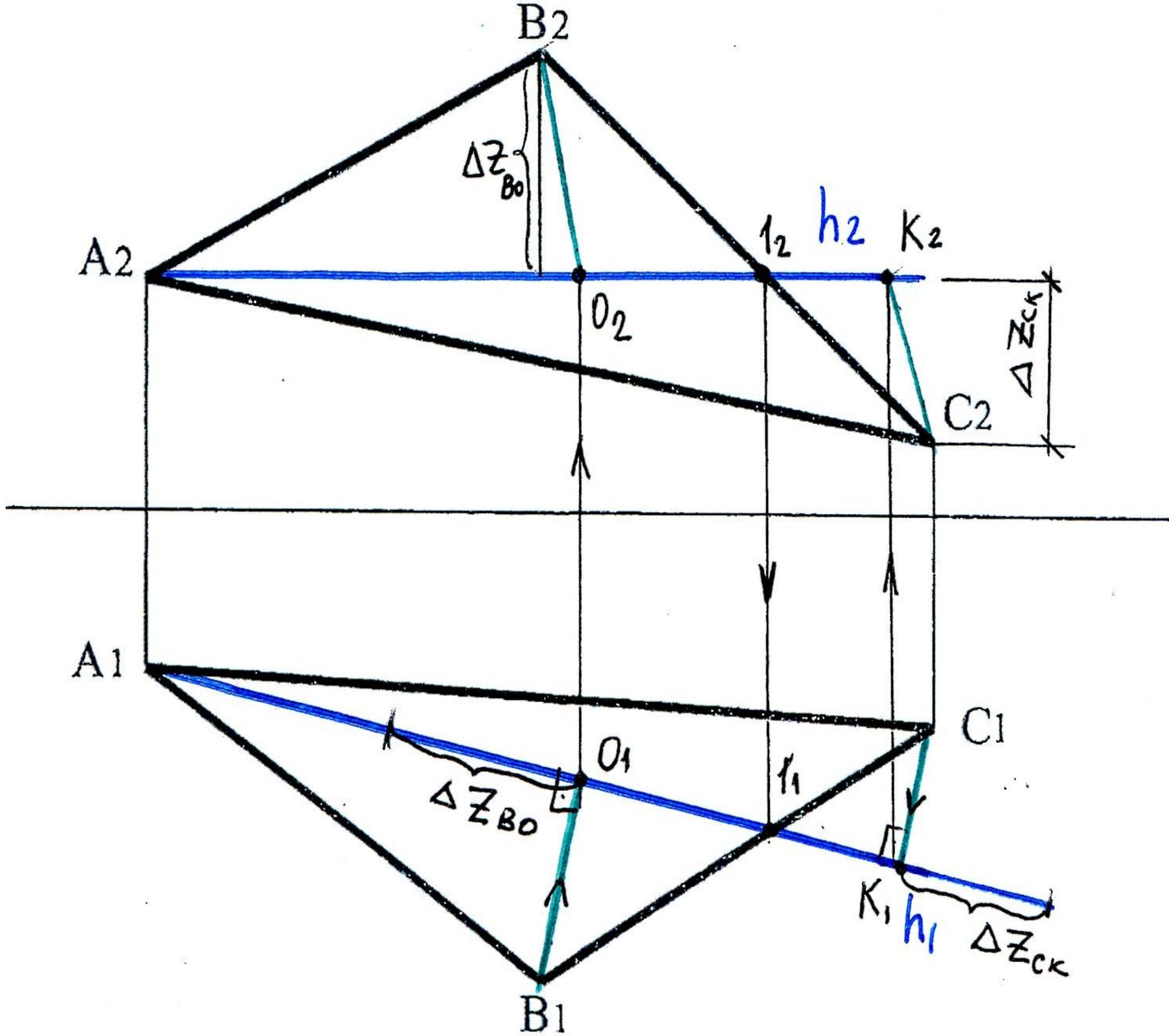
- Т.к. горизонталь является осью вращения, точки 1 и А, лежащие на оси, останутся неподвижными.
- Вершины В и С вращаются по окружностям. Радиусы вращения точек В и С проецируются на П1 **отрезками прямых B_1O_1 и C_1K_1**, перпендикулярными горизонтальной проекции оси вращения h_1 (на основании теоремы о проецировании прямого угла без искажения)
- $B_1O_1 \perp h_1$,
- $C_1K_1 \perp h_1$

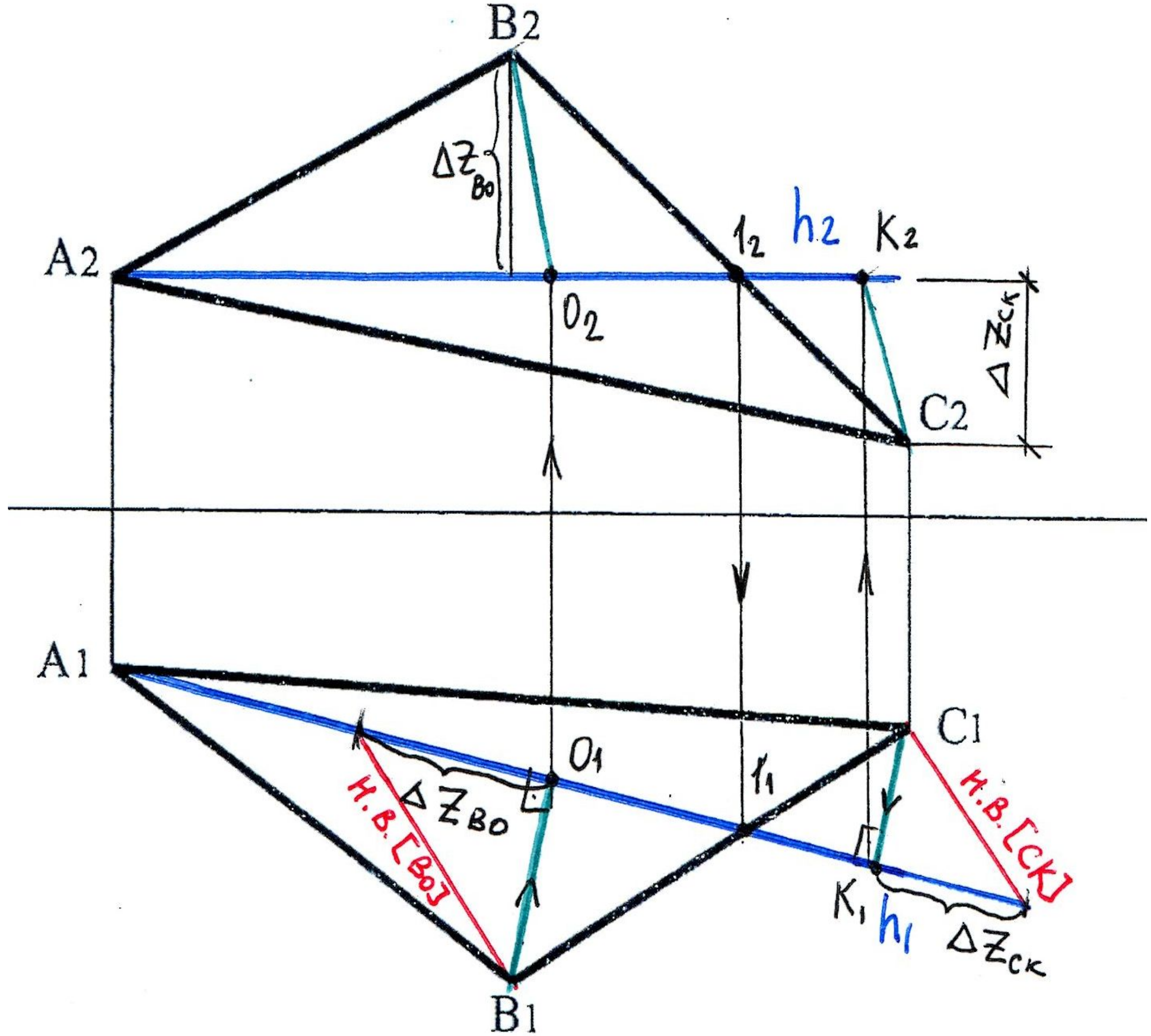


- **B_2O_2 и C_2K_2** строим по принадлежности плоскости треугольника



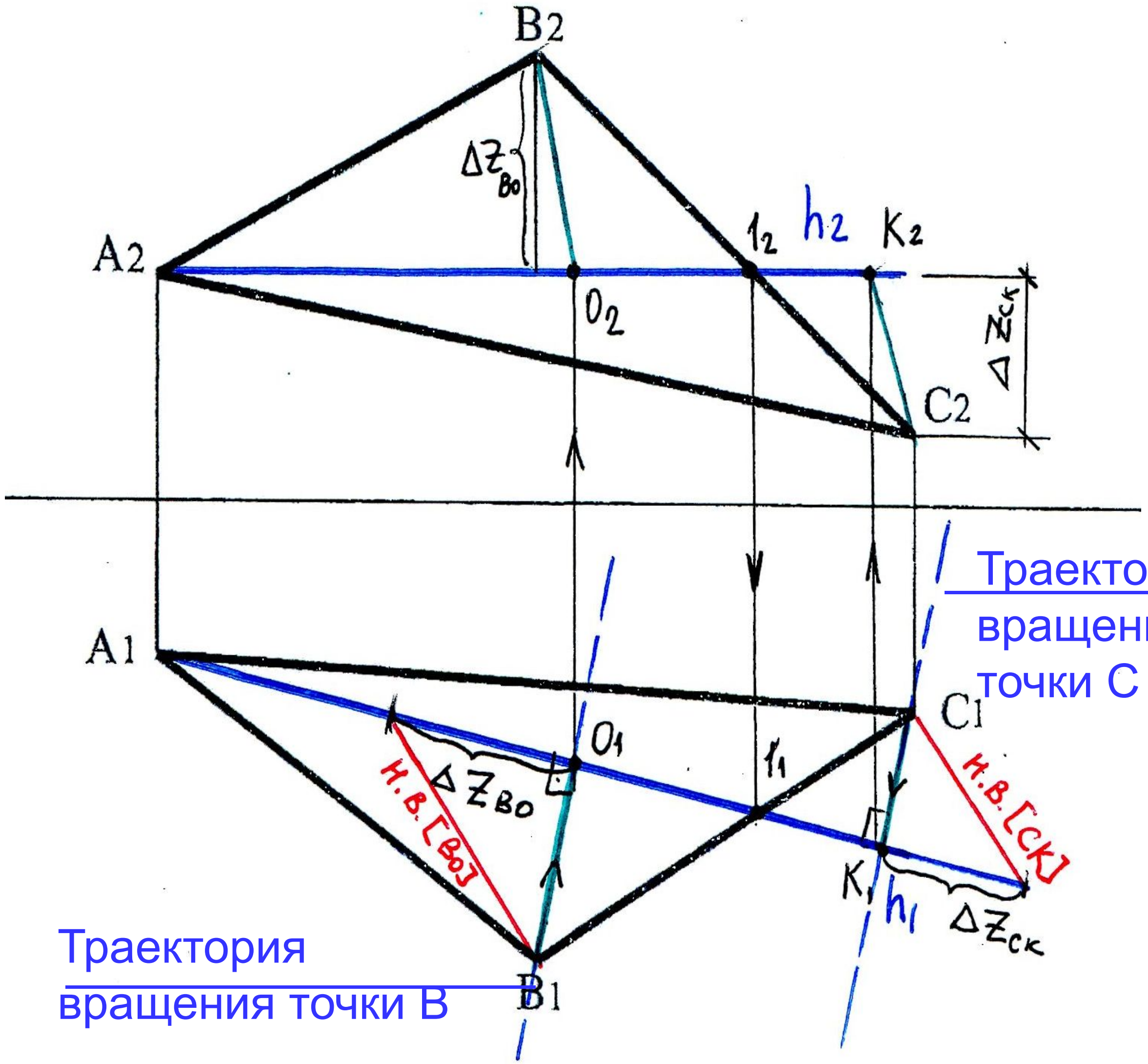
- Так как плоскость АВС должна развернуться параллельно П1, радиусы вращения точек В (ВО) и С (СК) должны проецироваться на П1 в натуральную величину
- Длины радиусов вращения точек В (н.в.[ВО]) и С (н. в.[СК]) можно определить способом прямоугольного треугольника





B2
ΔZ Bo
A2
1 2
h2
K2
O2
ΔZck
C2
A1
C1
O1
1 1
ΔZBo
H.B.[Bo]
H.B.[CK]
K1
h1
ΔZck
B1

Траектории вращения точек B и C на П1 проецируются в линию, перпендикулярную оси вращения



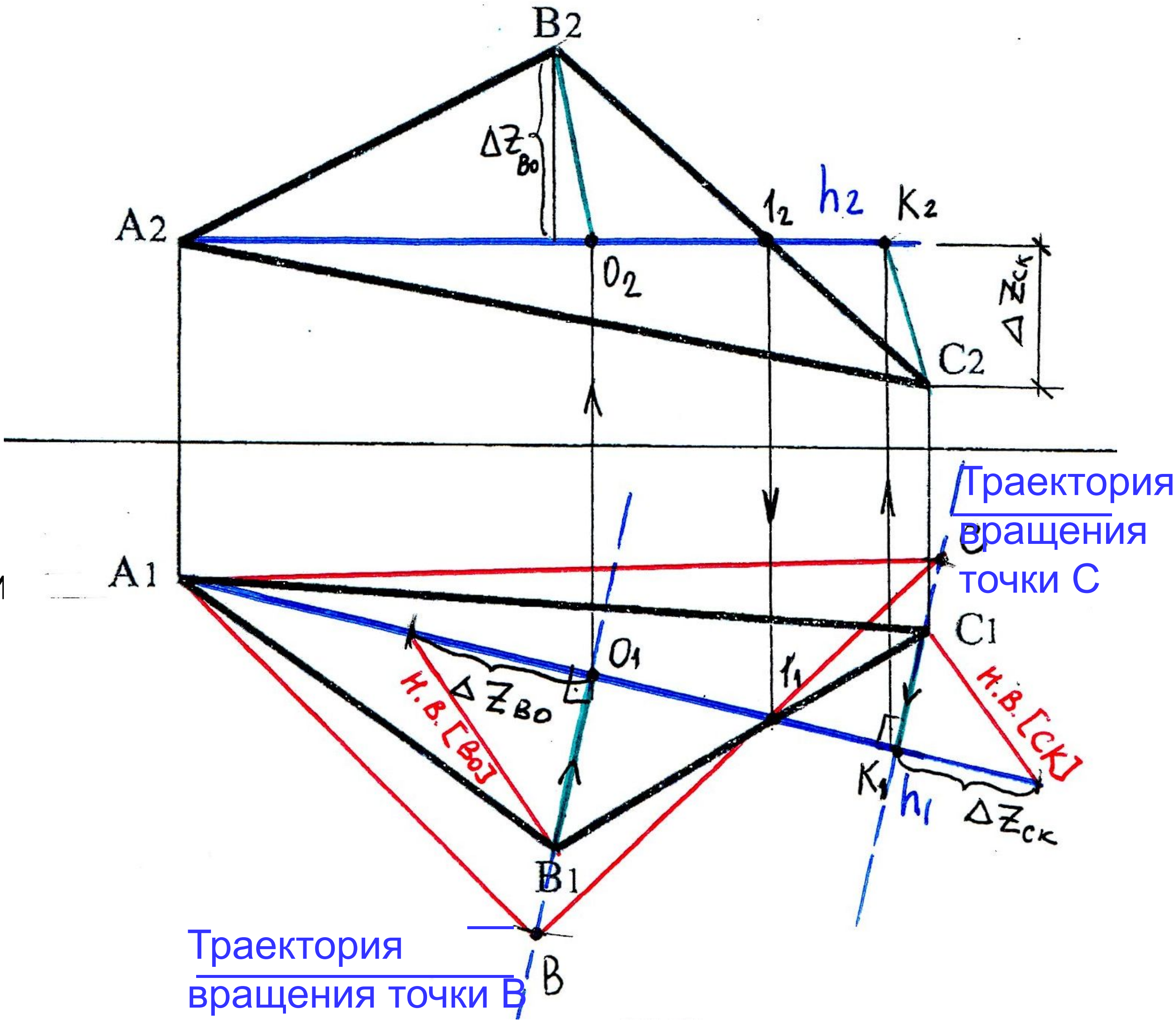
Траектория вращения точки C

Траектория вращения точки B

Отложим по траектории вращения точки В отрезок ВО1 = н.в.[ВО] и по траектории вращения точки С

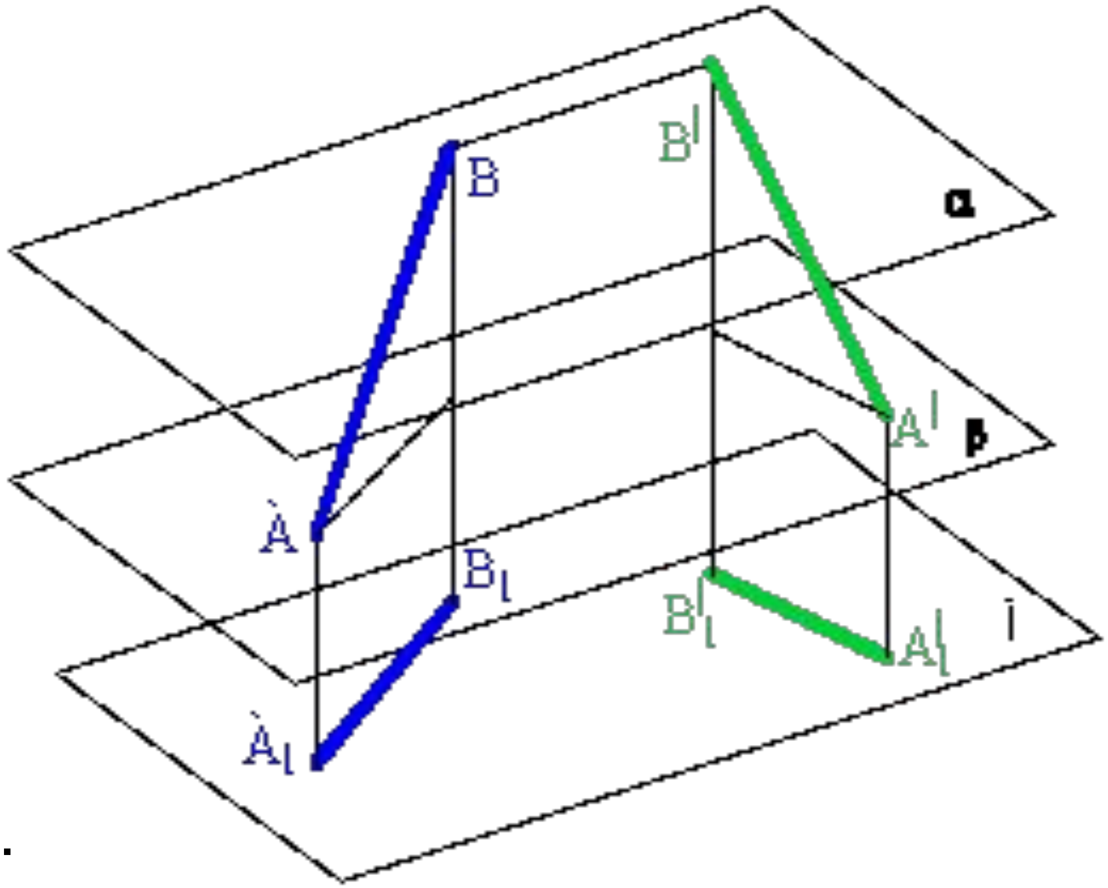
отрезок СК1 = н. в.[СК]

Соединив проекции А1, В,С получим натуральную величину ΔАВС



Метод плоскопараллельного перемещения

Сущность метода
 плоско-
параллельного
перемещения
состоит в том,
что все точки
фигуры движутся
в плоскостях,
параллельных
плоскостям проекций.



Преобразование отрезка прямой общего положения в прямую уровня (1 типовая задача)

Располагаем отрезок

параллельно

плоскости проекций П2

($A_1B_1 = A_1'B_1'$).

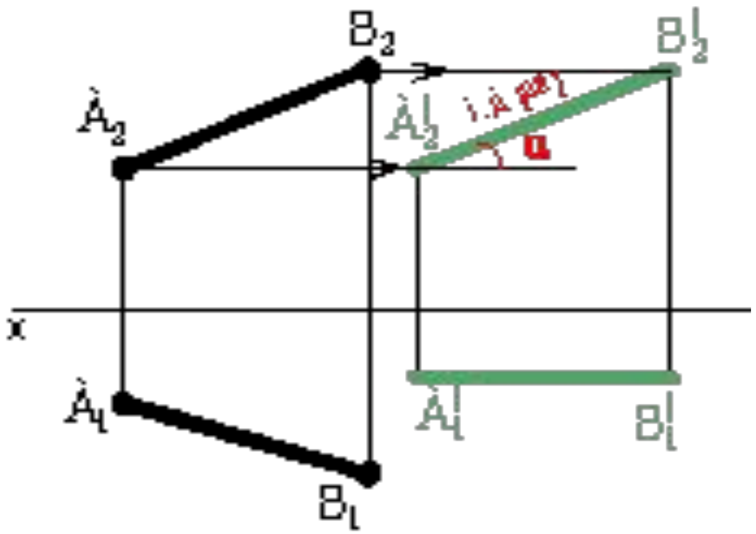
Он проецируется

на эту плоскость

в натуральную величину.

α- угол наклона к плоскости

П1



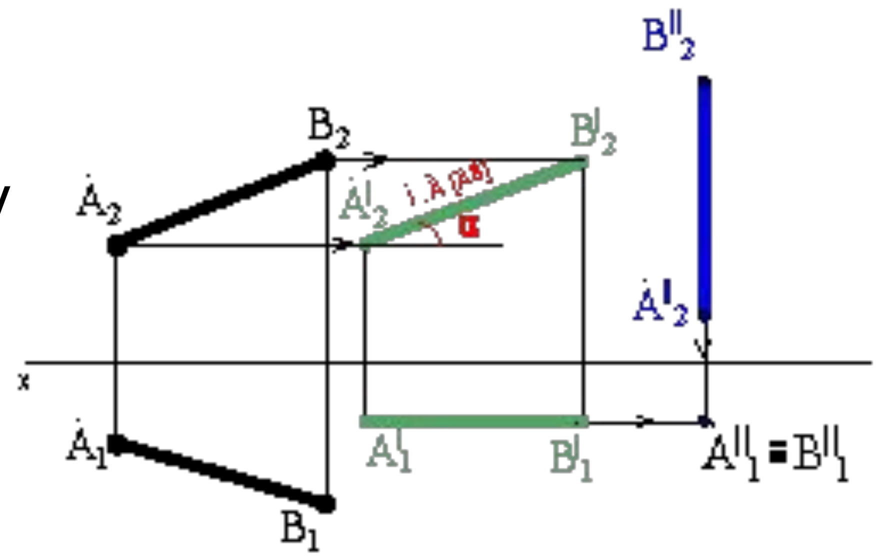
Преобразование отрезка прямой общего положения в проецирующий

Задача решается в два действия.

1. Отрезок преобразовывают

в прямую уровня.

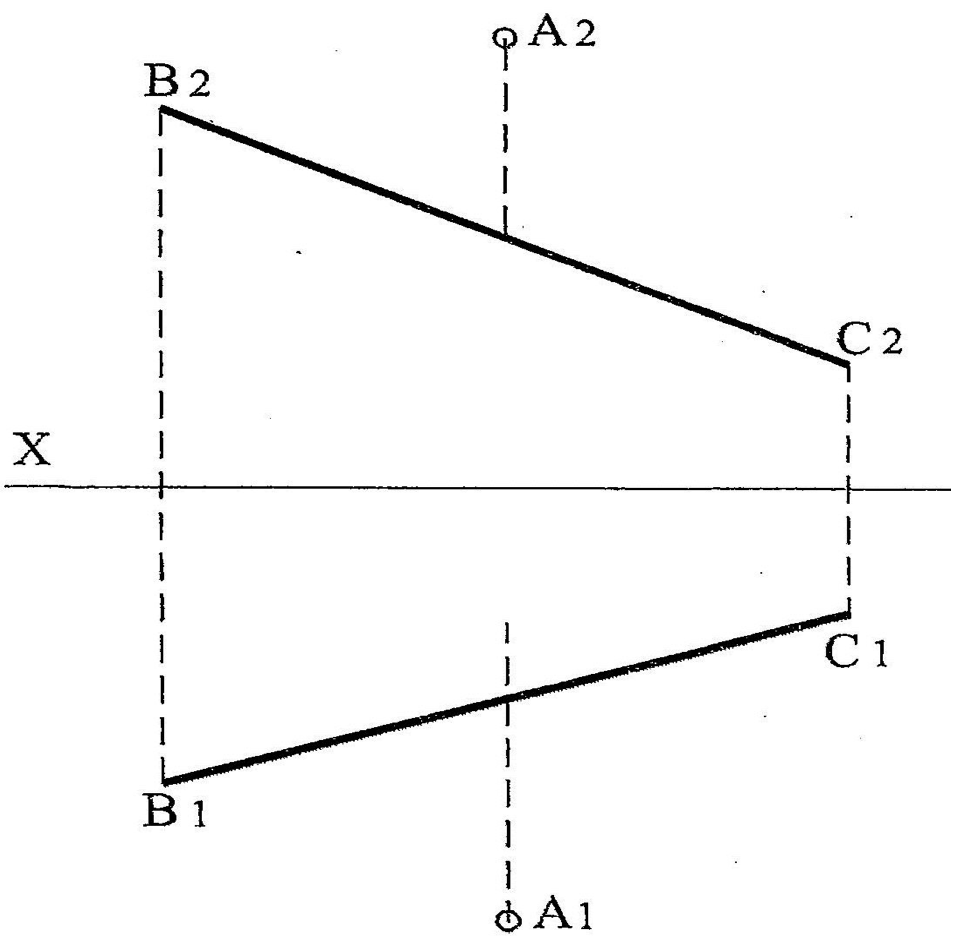
2. Затем натуральную величину отрезка располагают перпендикулярно плоскости проекций, на которую он проецируется в точку.



Задача 7.7 стр.37:

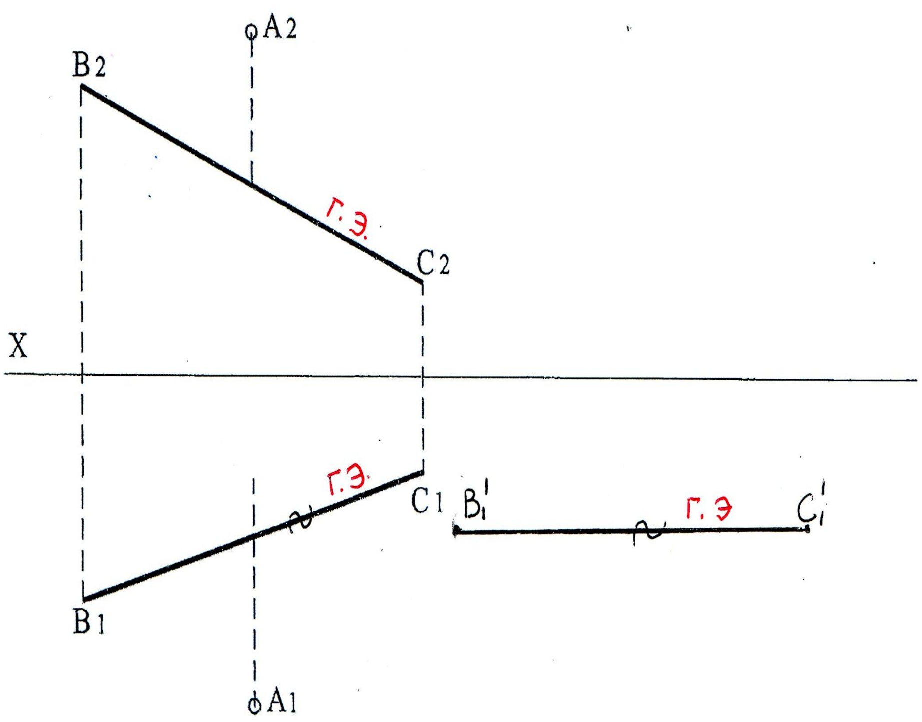
Найти расстояние от точки А до прямой ВС методом плоскопараллельного перемещения

Решение: Расстояние от точки до прямой – это перпендикуляр, опущенный из точки А к прямой ВС. Но так как прямая ВС и перпендикуляр являются прямыми общего положения и изображаются деформированными, сразу построить проекции расстояния не представляется возможным

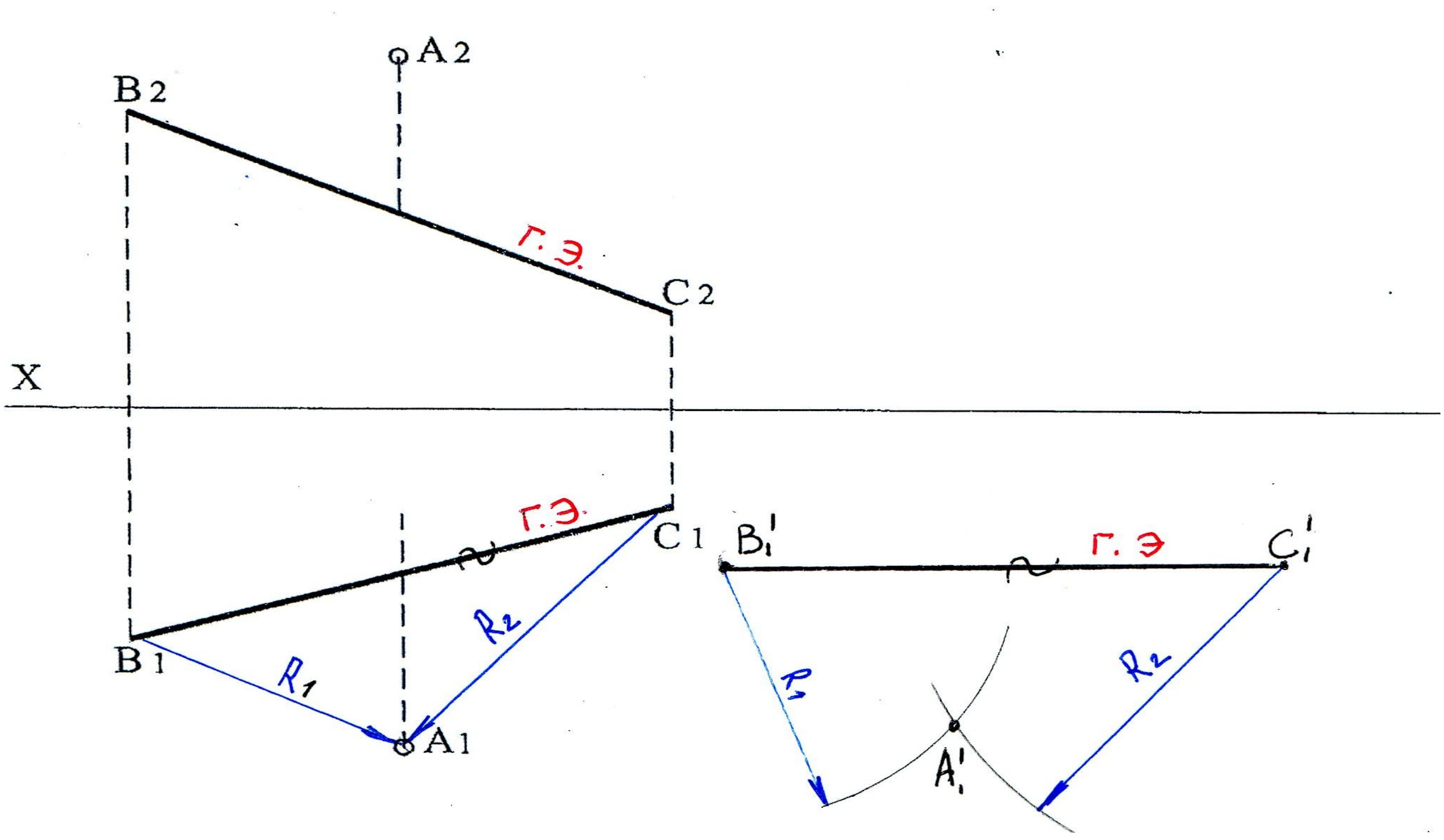


Если прямая ВС преобразуется в проецирующую, то расстояние от точки А до ВС будет проецироваться в натуральную величину как расстояние между двумя точками

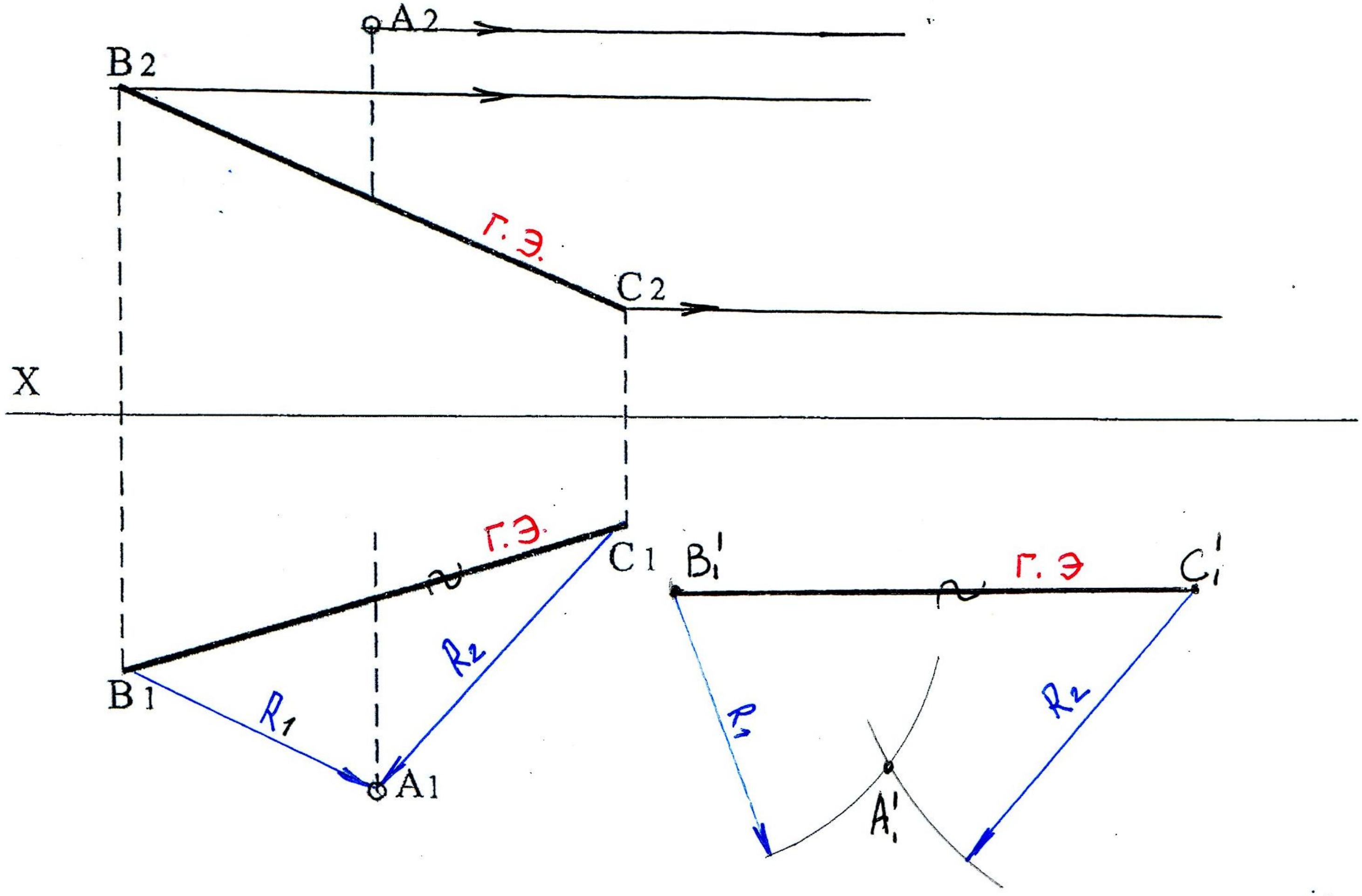
- Т.о. необходимо решить 2 типовую задачу- главный элемент- прямая
- Сначала преобразуем прямую ВС в прямую уровня (например фронталь) - переместим в пространстве прямую так, чтобы [ВС] стал параллельно П2
- $B_1C_1 = B_1'C_1'$; $B_1'C_1' \parallel X$



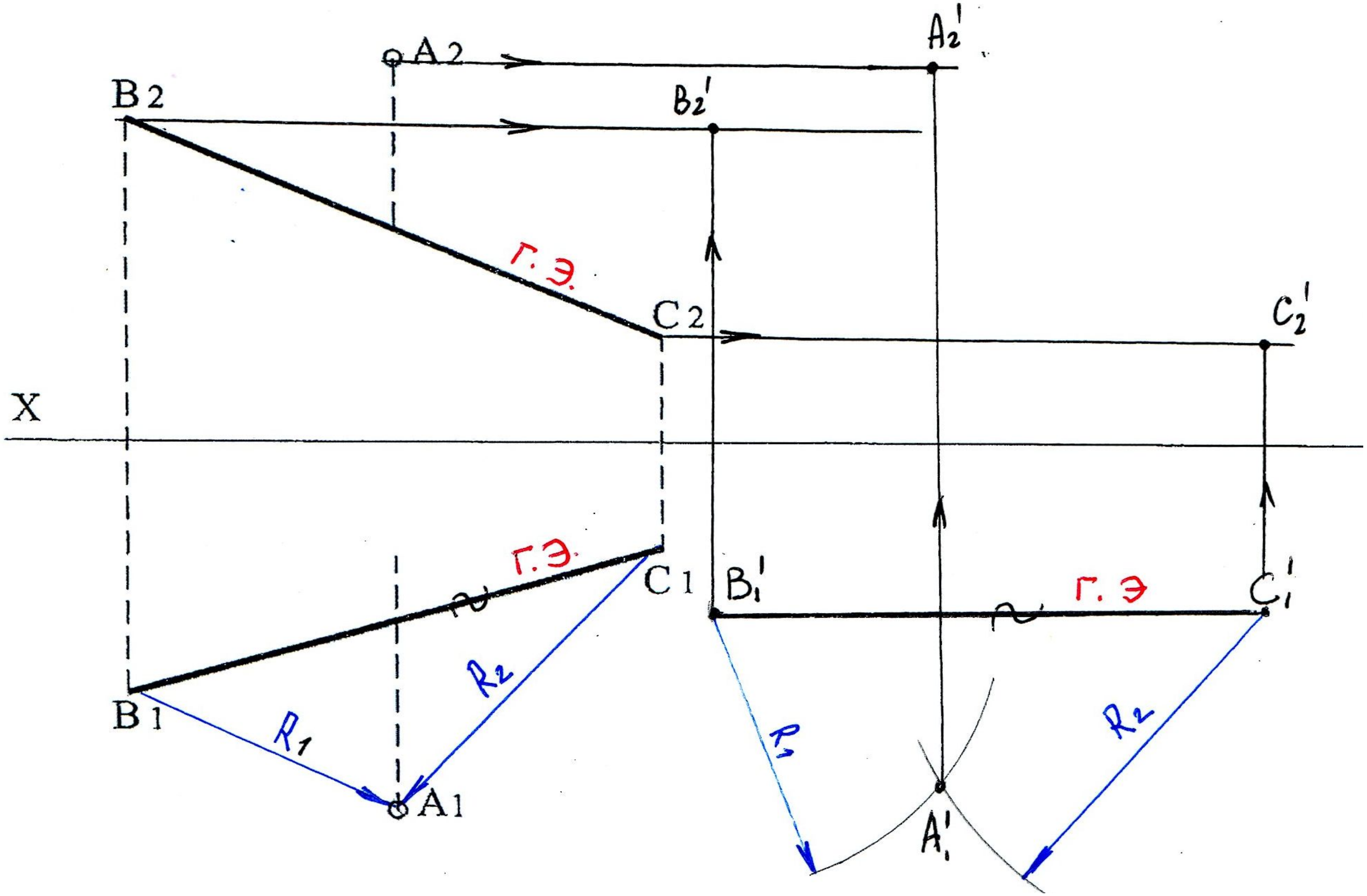
Вместе с главным элементом перемещается и (.)А, (находим новое положение проекции А1‘ с помощью расстояний от концов проекции отрезка В1С1 до проекции точки А1)



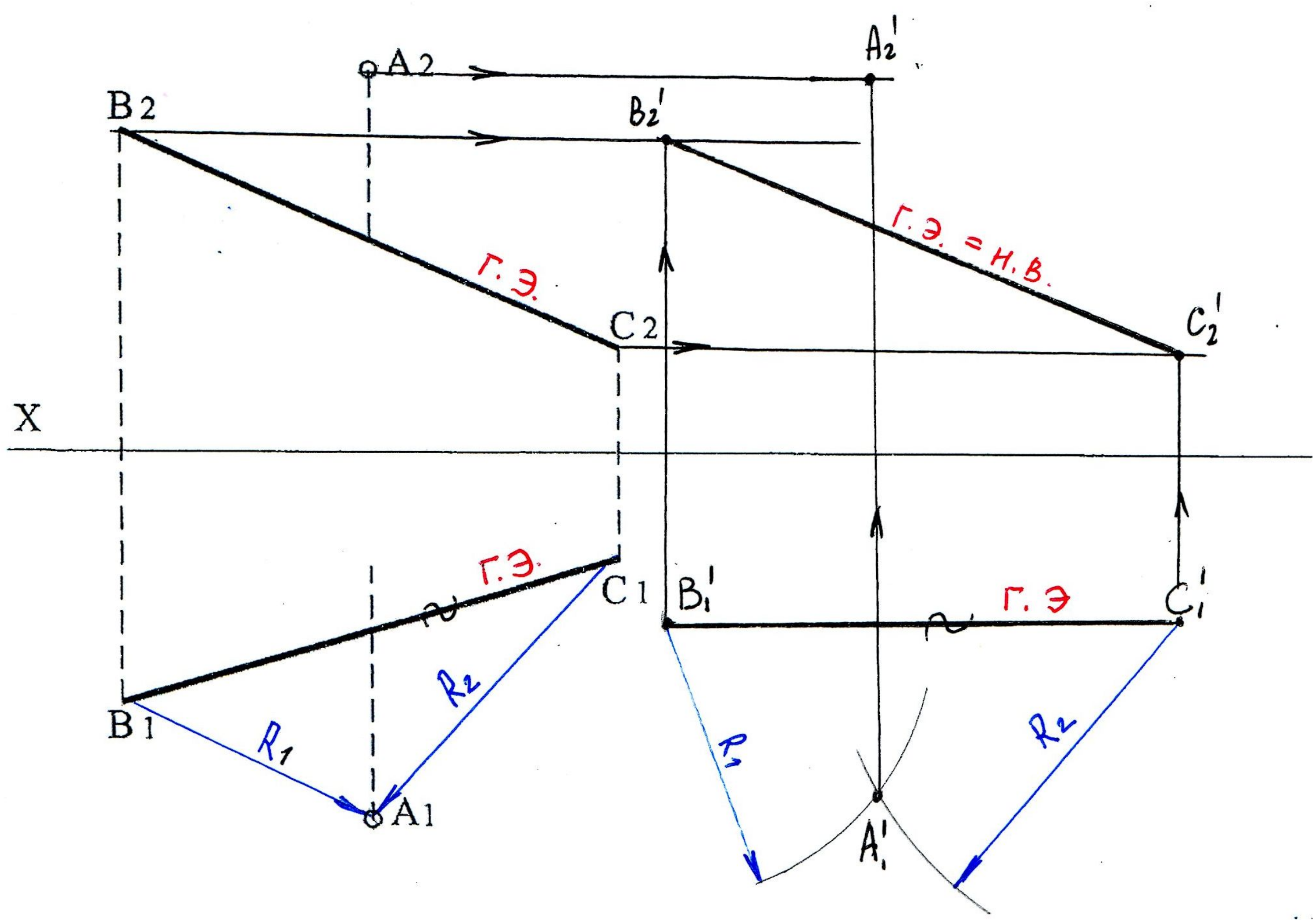
Все точки объекта движутся параллельно П1, поэтому на П2 фронтальные проекции точек смещаются параллельно оси Х



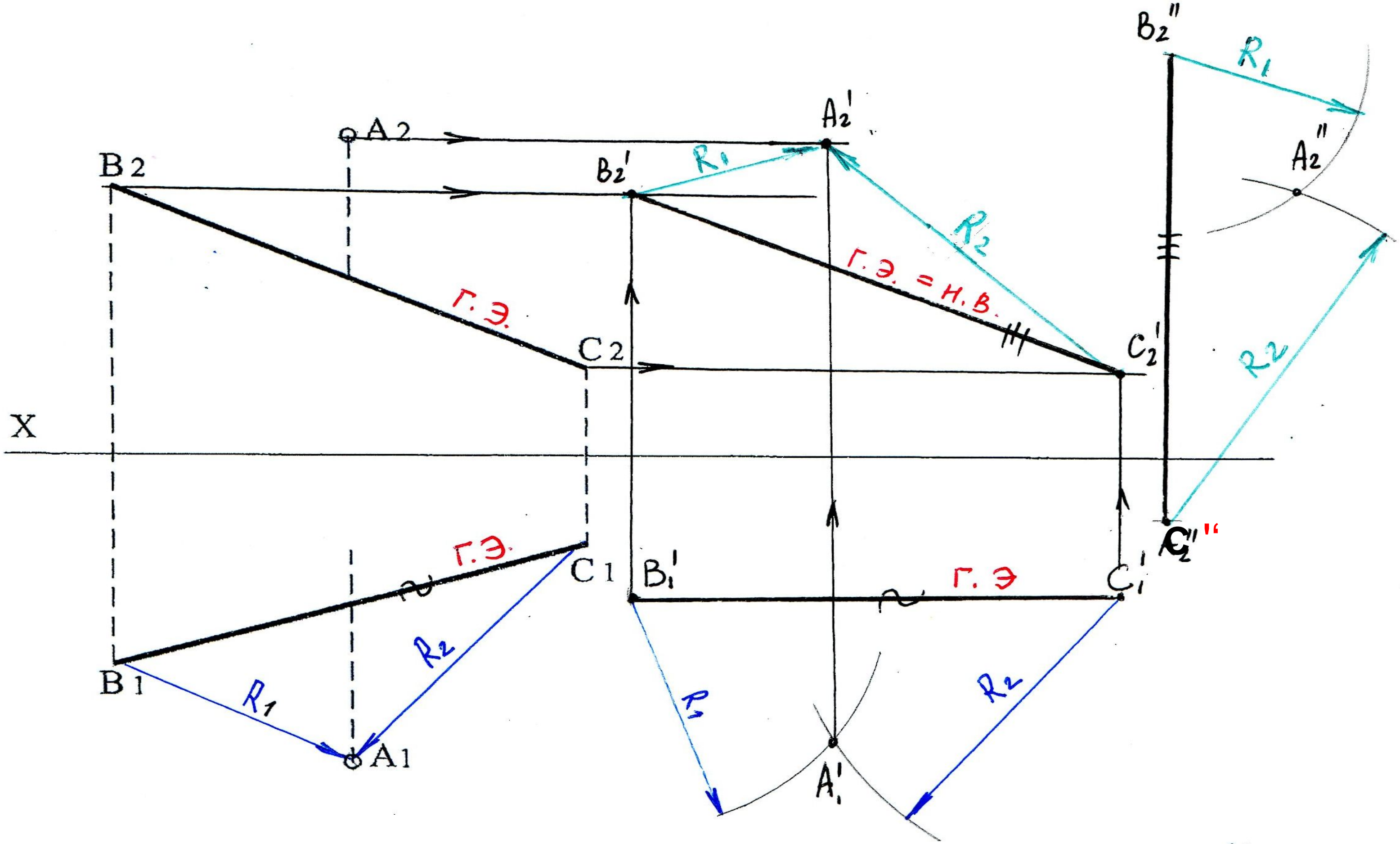
По линиям связи находим новое положение фронтальных проекций точек B2',C2 ' и A2 '



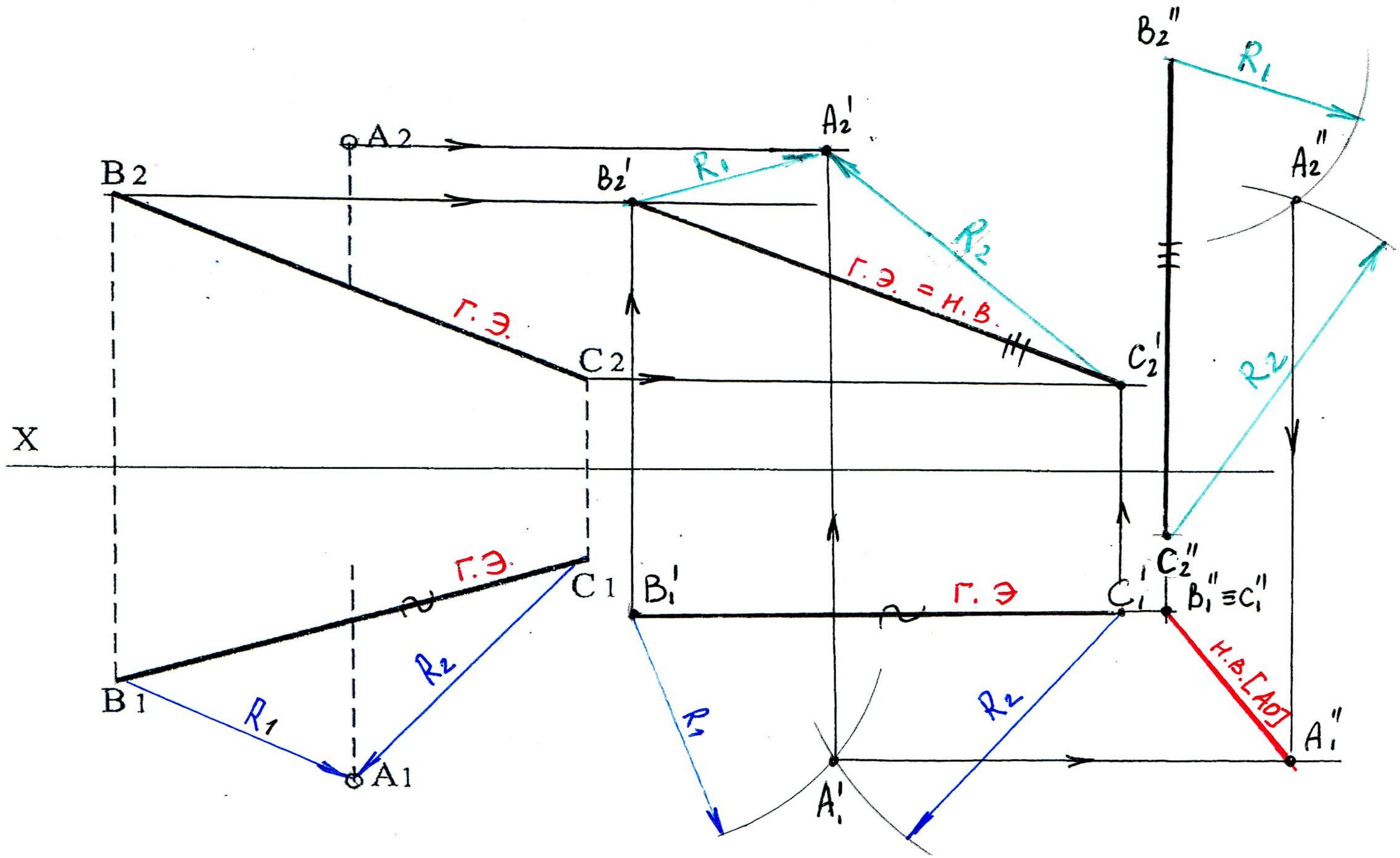
Отрезок ВС проецируется в натуральную величину (промежуточный результат)



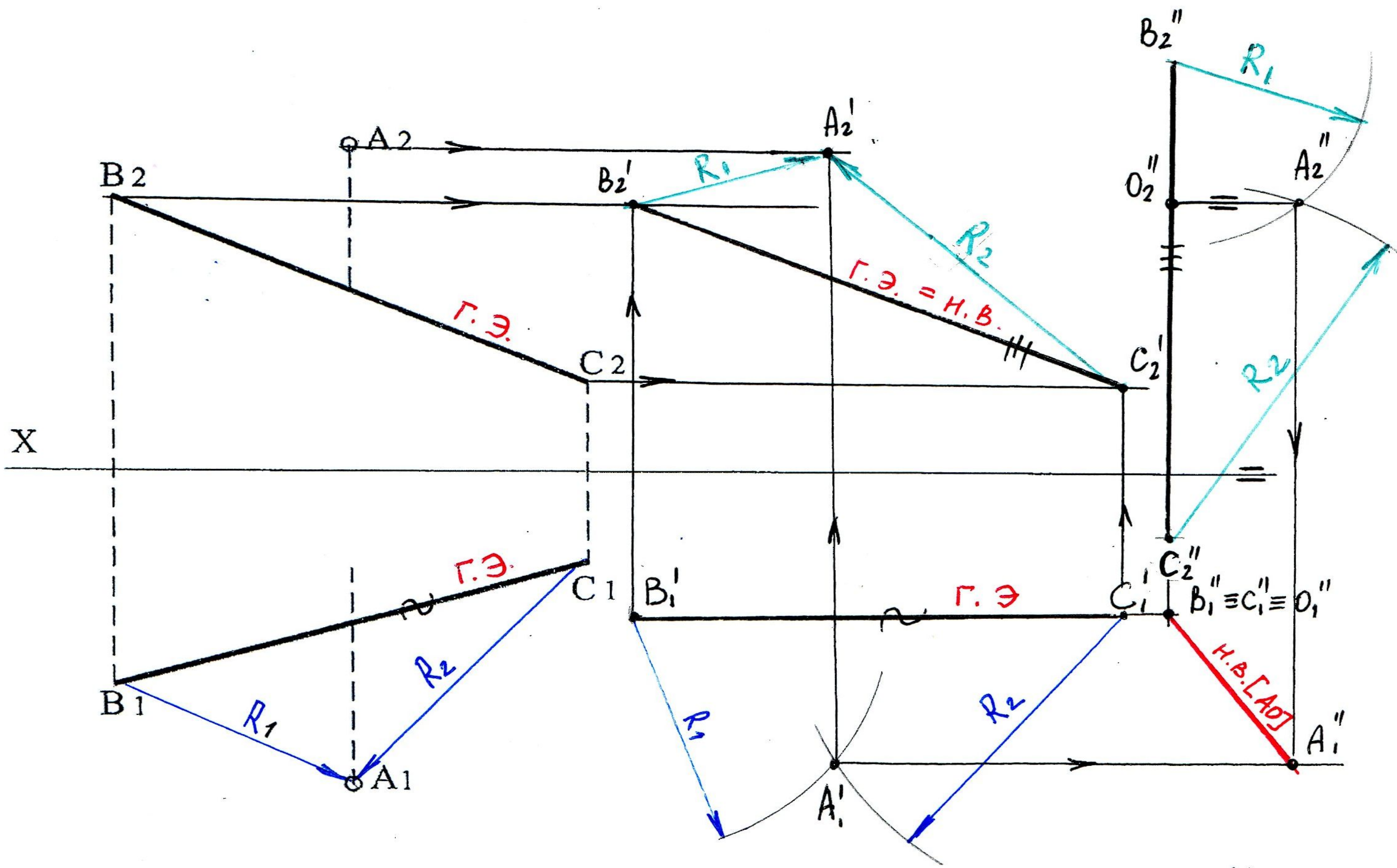
Преобразуем главный элемент- отрезок прямой ВС в положение проецирующего. На чертеже н.в. [BC] = $B_2'C_2'$ располагаем перпендикулярно оси X → $B_2''C_2''$ и вместе с ней переносим проекцию точки A_2'', измеряя расстояния с предыдущей проекции (R_1,R_2)



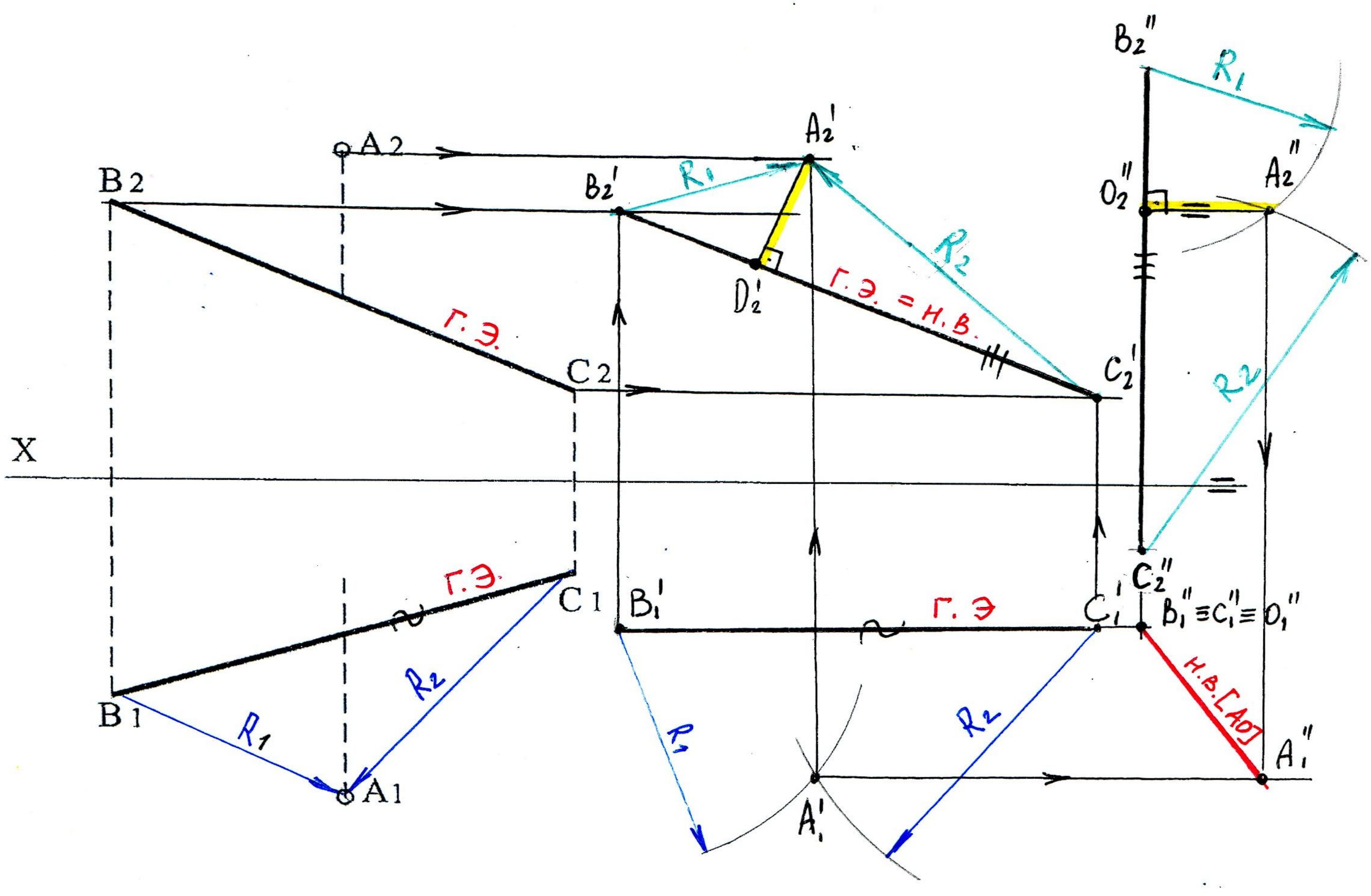
На П1 проекции точек движутся параллельно оси X и приходят в новое положение→ $B_1'' \equiv C_1''$ и A_1''. Отрезок прямой BC проецируется в точку ($B_1'' \equiv C_1''$). Находим расстояние от точки A до прямой, как расстояние между двумя точками $B_1'' \equiv C_1''$ и A_1''→н.в.[AO], где (.)O- основание перпендикуляра



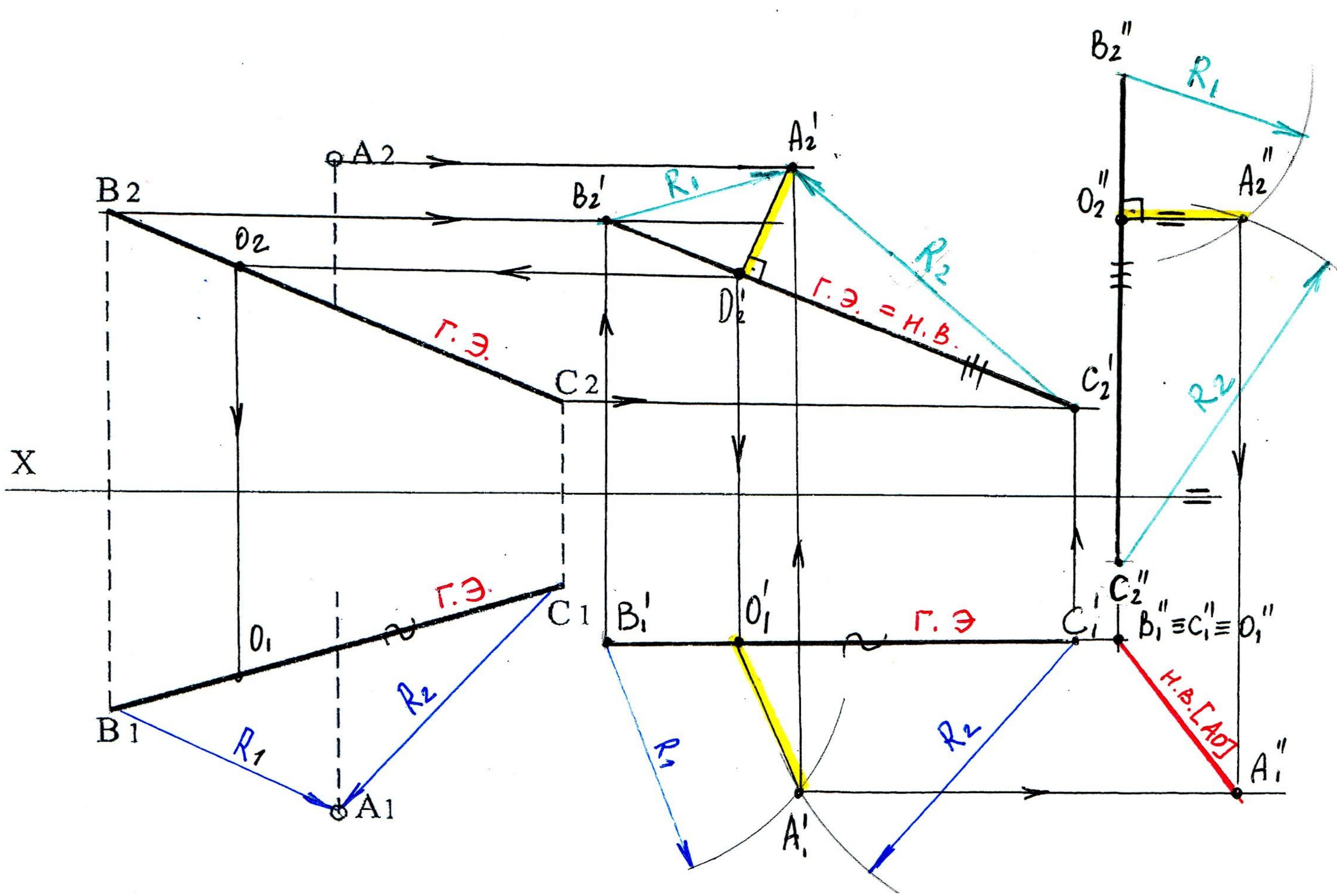
Находим недостающую проекцию АО на П2. Т.к. на П1 отрезок проецируется как н.в.[АО], на П2 его фронтальная проекция параллельна оси Х.



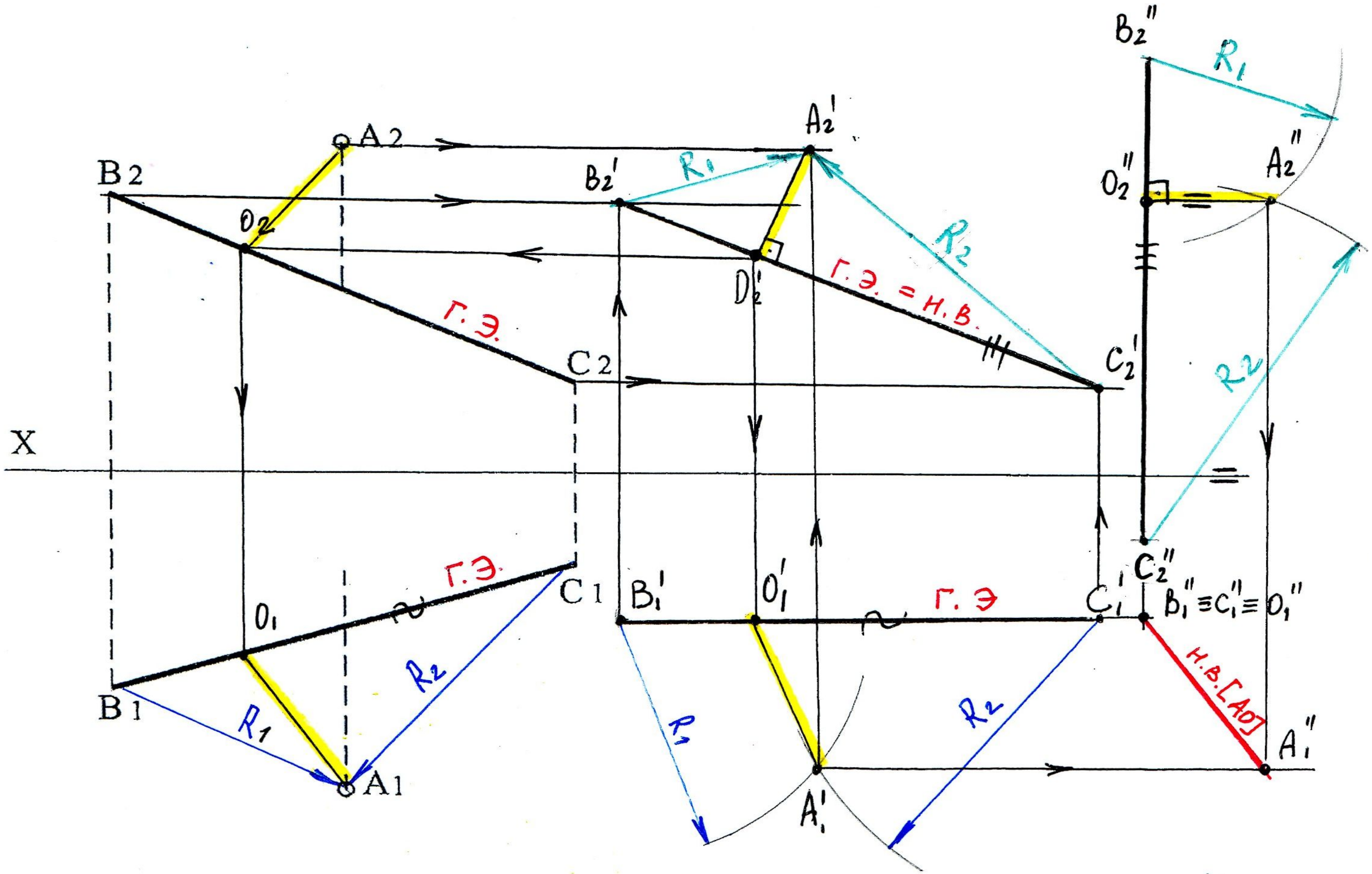
Далее покажем, как выглядят проекции АО на исходных данных. Для этого измерим $А_2''О_2''$(выделен желтым цветом) и вернем на предыдущее положение (на первое перемещение). Получим $А_2'О_2'$



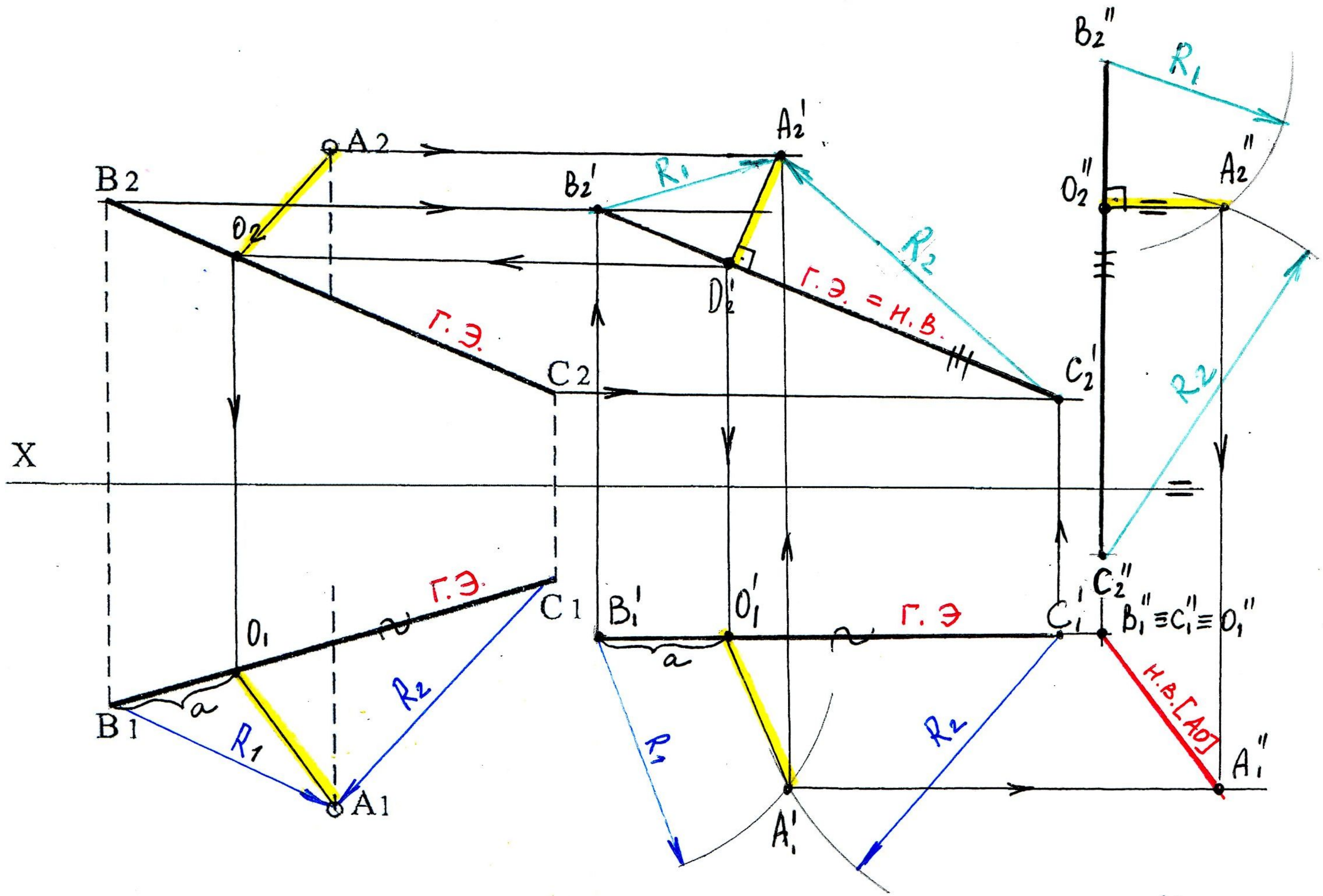
По линиям связи определим горизонтальную проекцию O1‘ и, соединив с A1‘, получим горизонтальную проекцию O1‘A1‘ на проекциях после первого перемещения



Далее по линиям связи найдем проекции O2 (параллельно оси Х на высоте точки О) и O1 на П1. Соединив одноименные проекции, получим проекции кратчайшего расстояния от точки до прямой на исходных изображениях (A2O2 и A1O1 - выделены желтым цветом)



Второй вариант возврата точки O на исходные проекции: измеряем расстояние a на горизонтальной проекции $B_1'C_1'$ на промежуточном положении прямой и переносим на исходную горизонтальную проекцию B_1C_1, получаем (.)O_1. Потом находим O_2 по линии связи

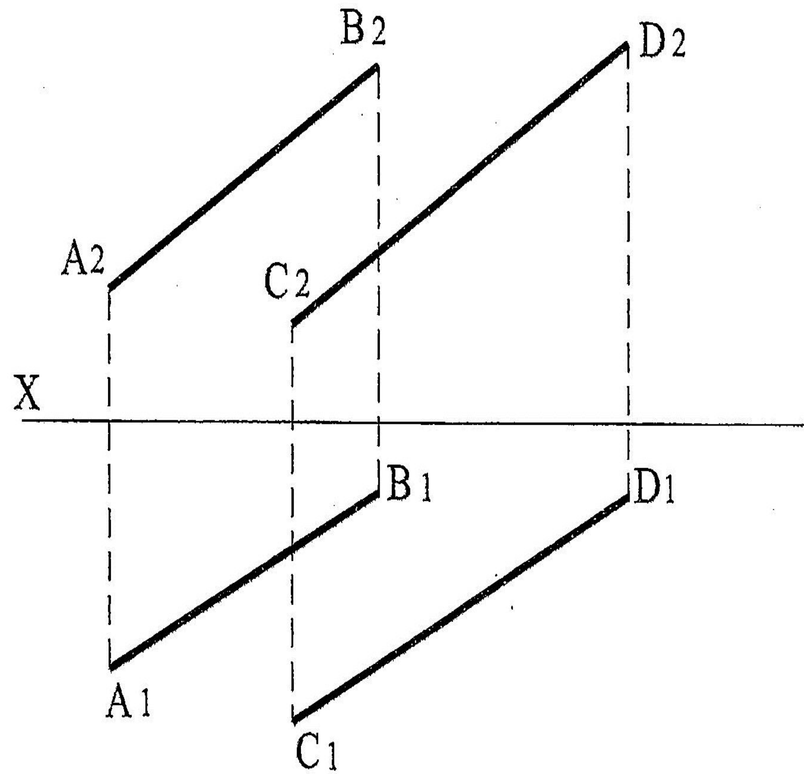


Определение расстояния между параллельными прямыми способом плоскопараллельного перемещения

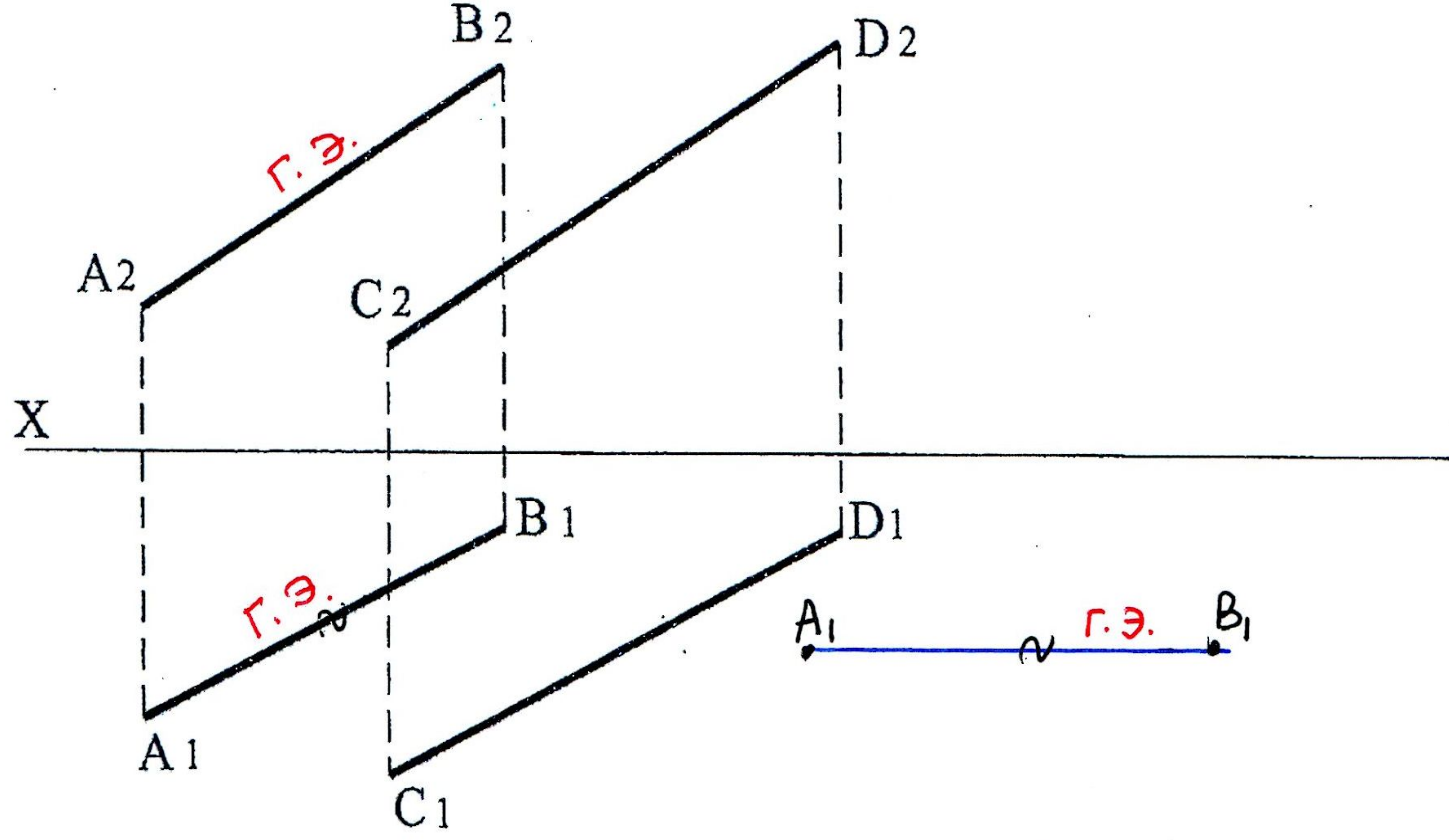
Задача 7.8 стр.37

Найти расстояние между двумя параллельными прямыми

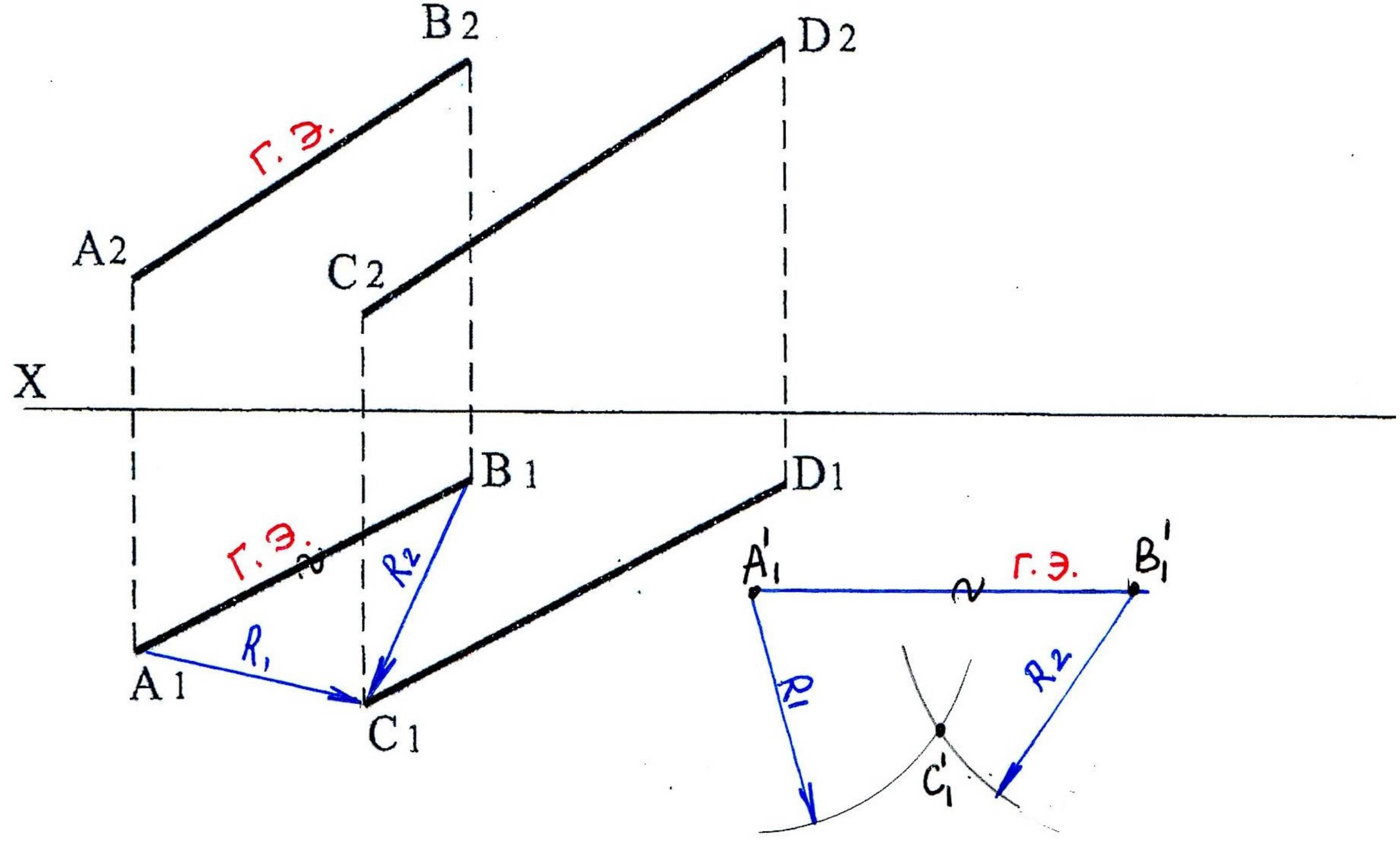
Решение: Сразу построить проекции расстояния между параллельными прямыми не сможем, т.к. они обе общего положения. Но если обе прямые преобразовать в проецирующие (перпендикулярные) к плоскости проекций, то они проецируются в точки и расстояние между ними будет видно в натуральную величину



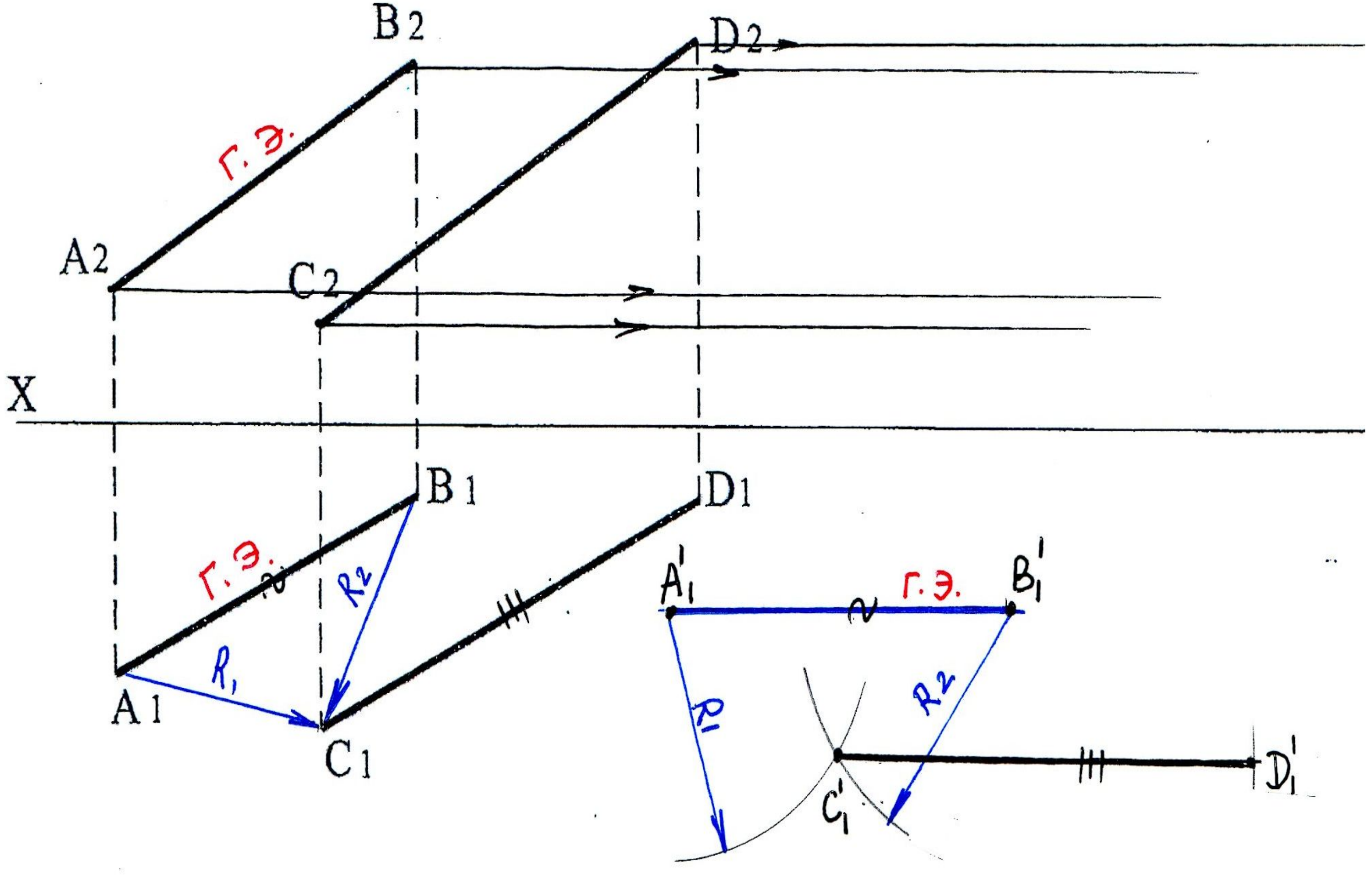
Выбираем главный элемент преобразования- например АВ (Г.Э.) и преобразовываем АВ в прямую уровня. Для этого измеряем длину проекции A_1B_1 и ставим параллельно оси Х (т.е. параллельно плоскости П2)



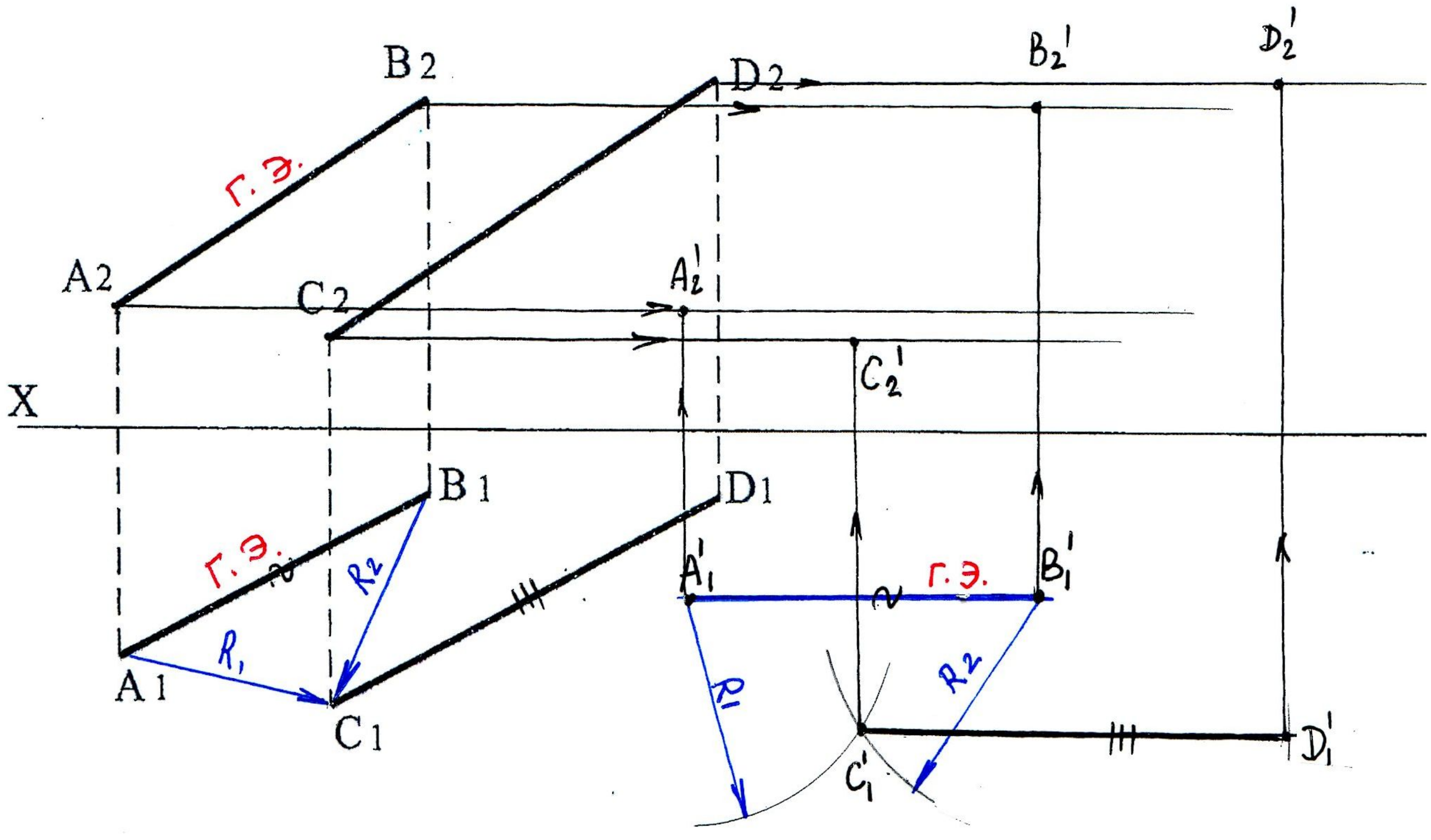
Т.к. вместе с главным элементом АВ перемещается и прямая CD, находим новое положение (.)С – проекция С1' (расстояния от А и В до (.)С при параллельном переносе не меняется. Следовательно, можем измерить расстояния R1 и R2 удаления С1 от А1 и В1 и засечками определить новое положение С1'



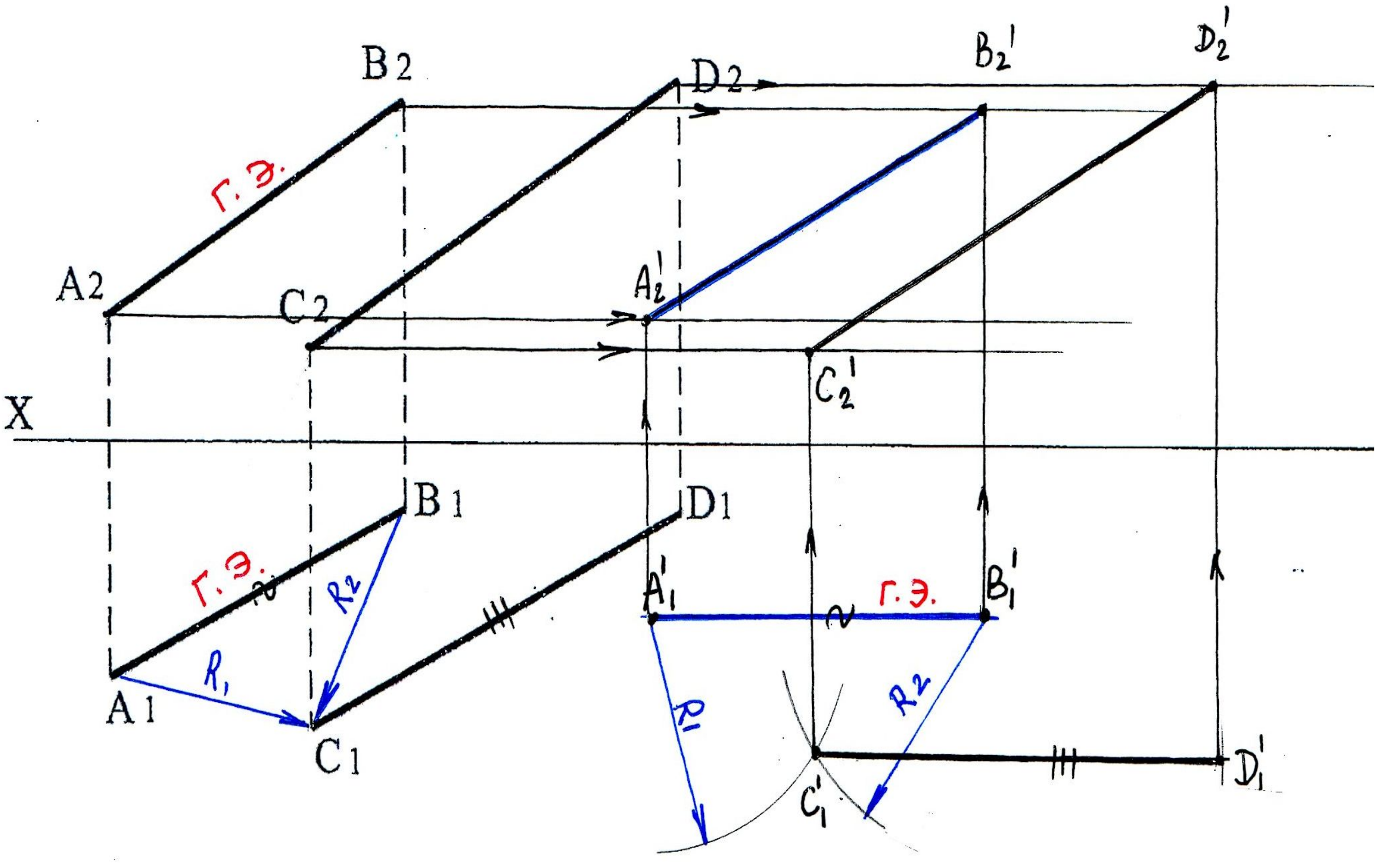
Т.к. прямые параллельны, то и при развороте АВ в положение, параллельное П2, проекции А1' В1‘ ‖ С1'D1‘ и так как движение переноса осуществляется в плоскостях, параллельных плоскости П1, длины горизонтальных проекций не изменятся. На П2 намечаем траектории движения фронтальных проекций точек параллельно оси X



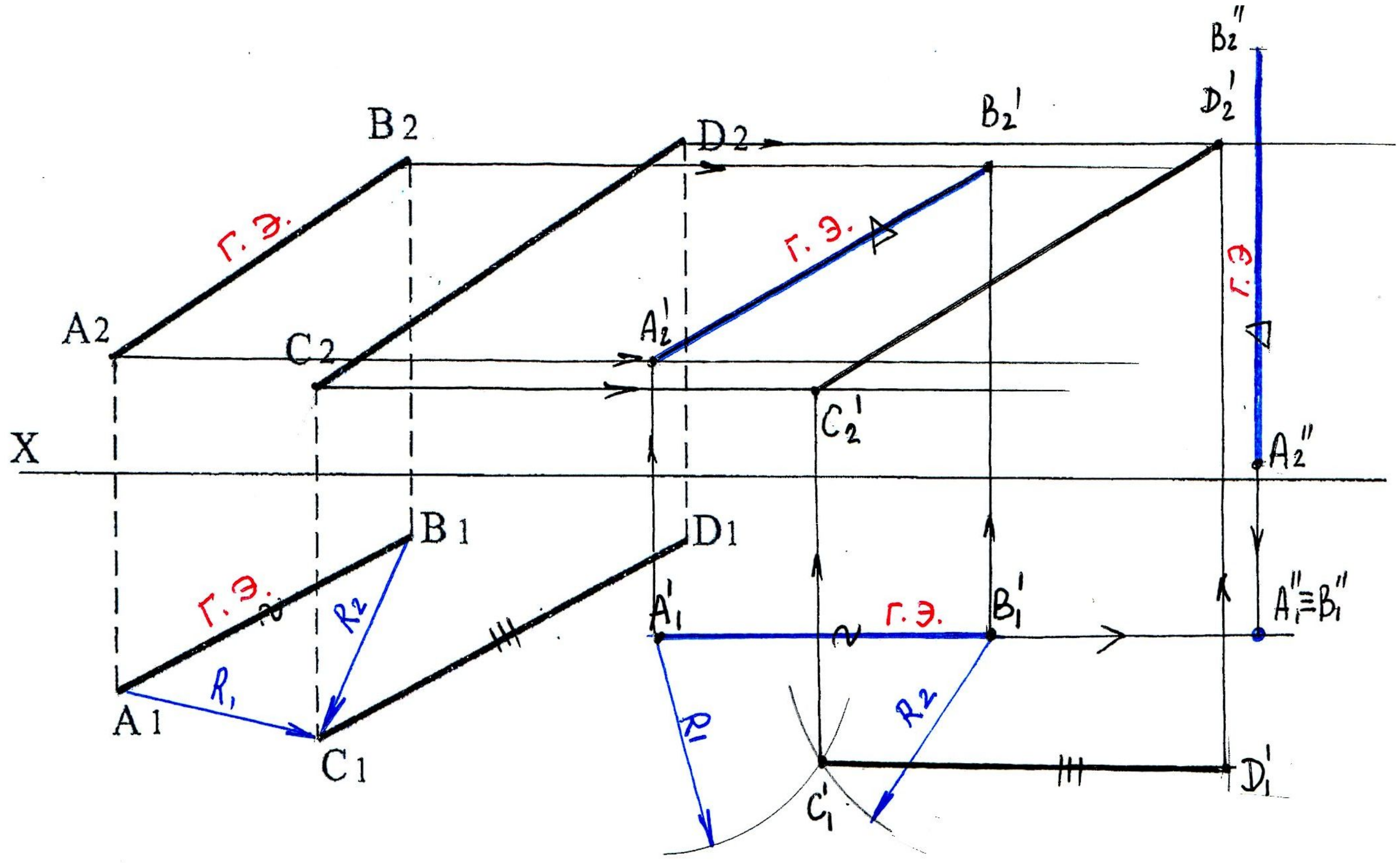
По линиям связи определяем фронтальные проекции точек A, B, C и D



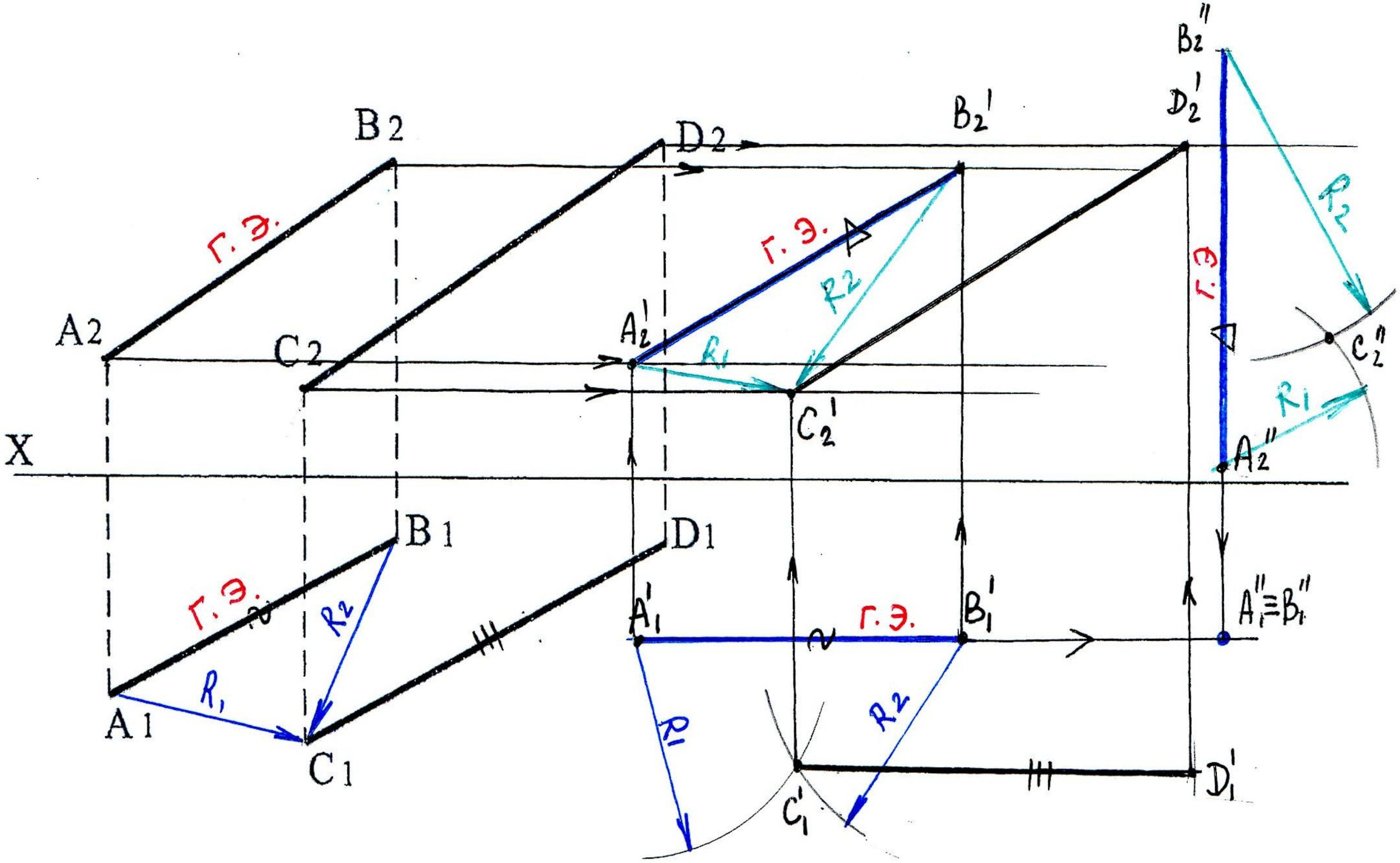
На П2 фронтальные проекции прямых в новом положении проецируются в натуральную величину (промежуточный результат) и параллельно друг другу



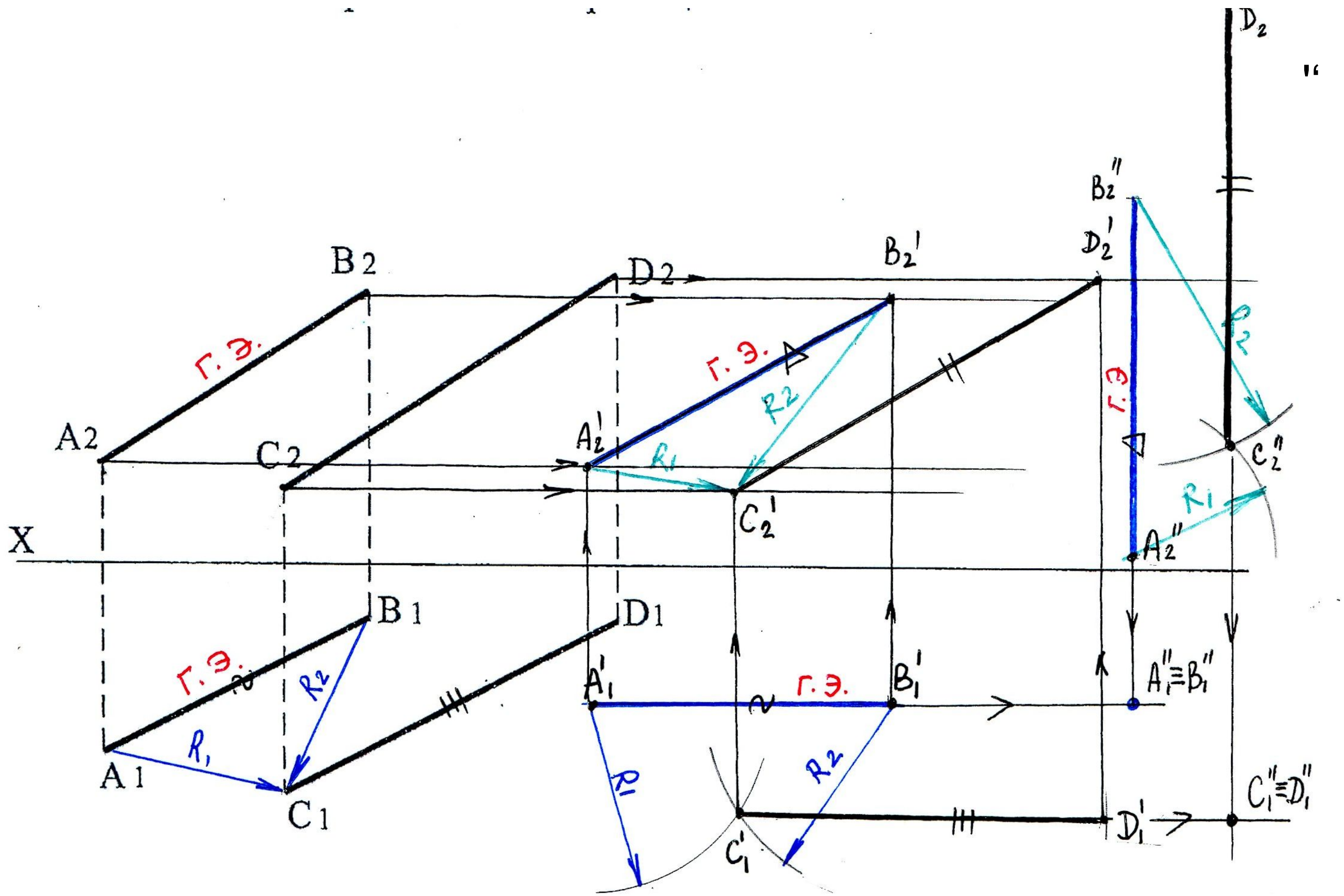
Выполняем второе перемещение –преобразуем отрезок АВ (Г.Э.) в проецирующий. На П2 А2‘В2‘ = А2‘‘В2‘‘ и А2‘‘В2‘‘ ⊥оси Х. На П1 траектория движения точки изобразится в виде прямой, параллельной плоскости П2 (на чертеже - оси Х) и получим А1‘‘≡В1‘‘



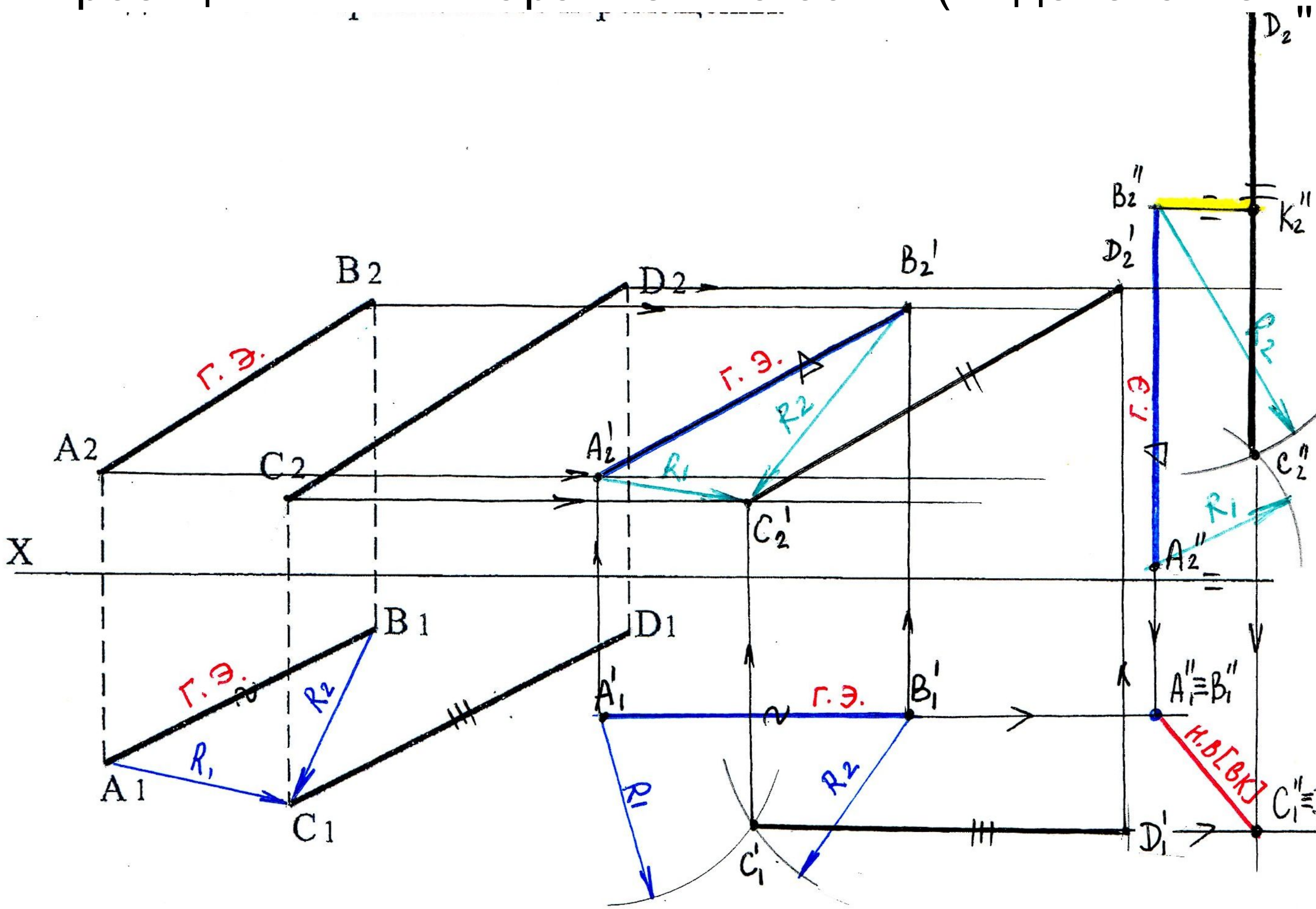
Т.к. вместе с АВ параллельно плоскости П2 перемещается и CD, расстояние между прямыми не изменится. Измеряем расстояния R1 от проекции А2' до С2' и R2 от В2‘ до С2' и засечками определяем новое положение С2''



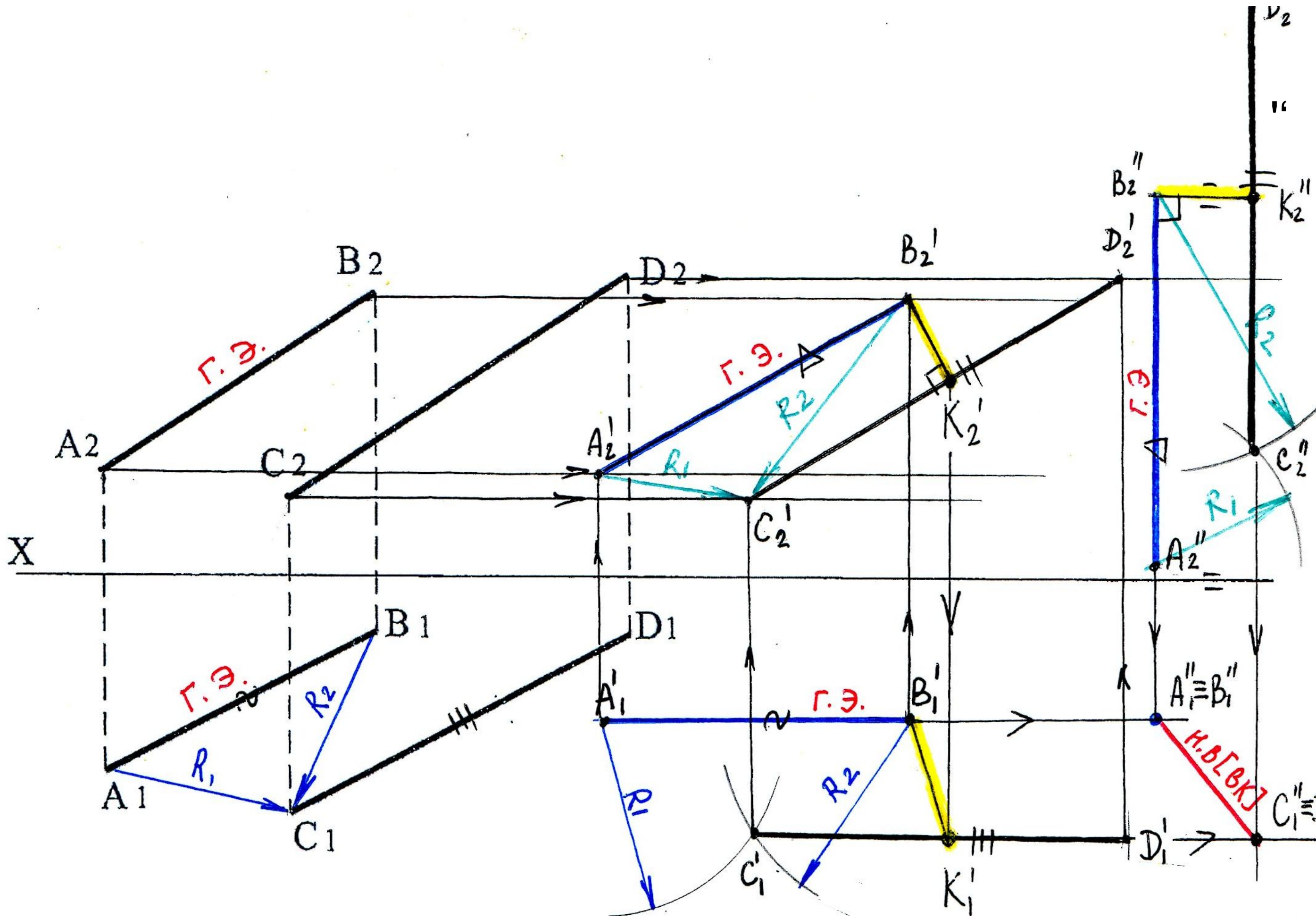
Строим фронтальную проекцию $C_2''D_2''$ после второго перемещения ($C_2'D_2' = C_2''D_2''$). Находим горизонтальную проекцию $C_1''D_1''$. Прямая CD также проецируется в точку ($C_1'' \equiv C_2''D_2''$ 1'')



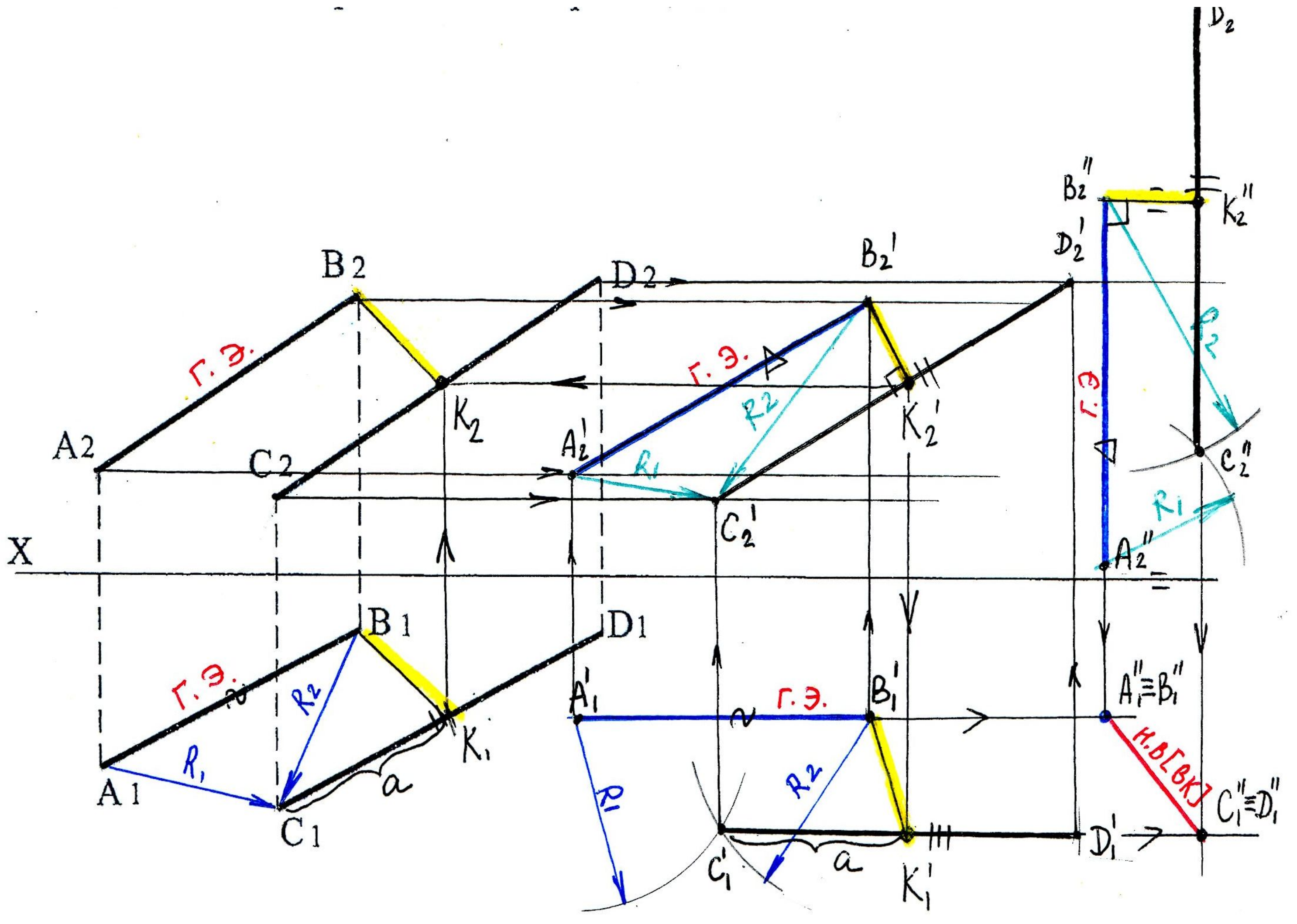
Натуральная величина расстояния между параллельными прямыми находится как расстояние между двумя точками, в которые проецируются прямые АВ и CD (н.в.[ВК]), где (.)К – основание перпендикуляра. Т.к. на П1 отрезок ВК проецируется в натуральную величину, он расположен параллельно П1 и на П2 его проекция В2 "К2" параллельна оси Х (выделена желтым)



Возвращаем проекции ВК на исходные позиции.
Т.к. В2 ''К2'' ┴С2 ''D2'', то и на предыдущей проекции В2'К2' ┴С2 'D2'.
Горизонтальную проекцию К1' определяем по линии связи

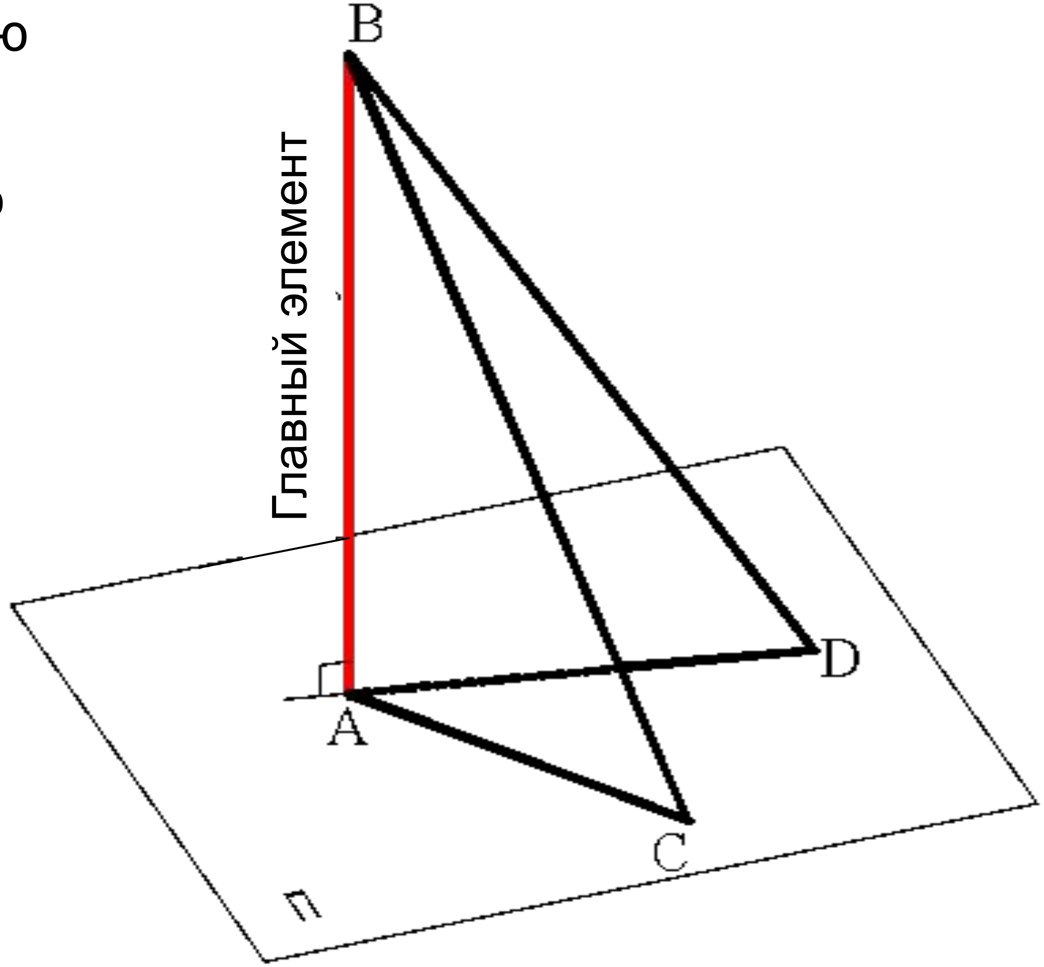


Возвращаем проекции ВК на исходные позиции. Можно определить положение проекции К$_2$ по линии связи на одной высоте с (.) К$_2$‘, или , замерив расстояние a=С$_1$'К$_1$' на горизонтальной проекции С$_1$ ' D$_1$‘, отложить его на С$_1$ D$_1$



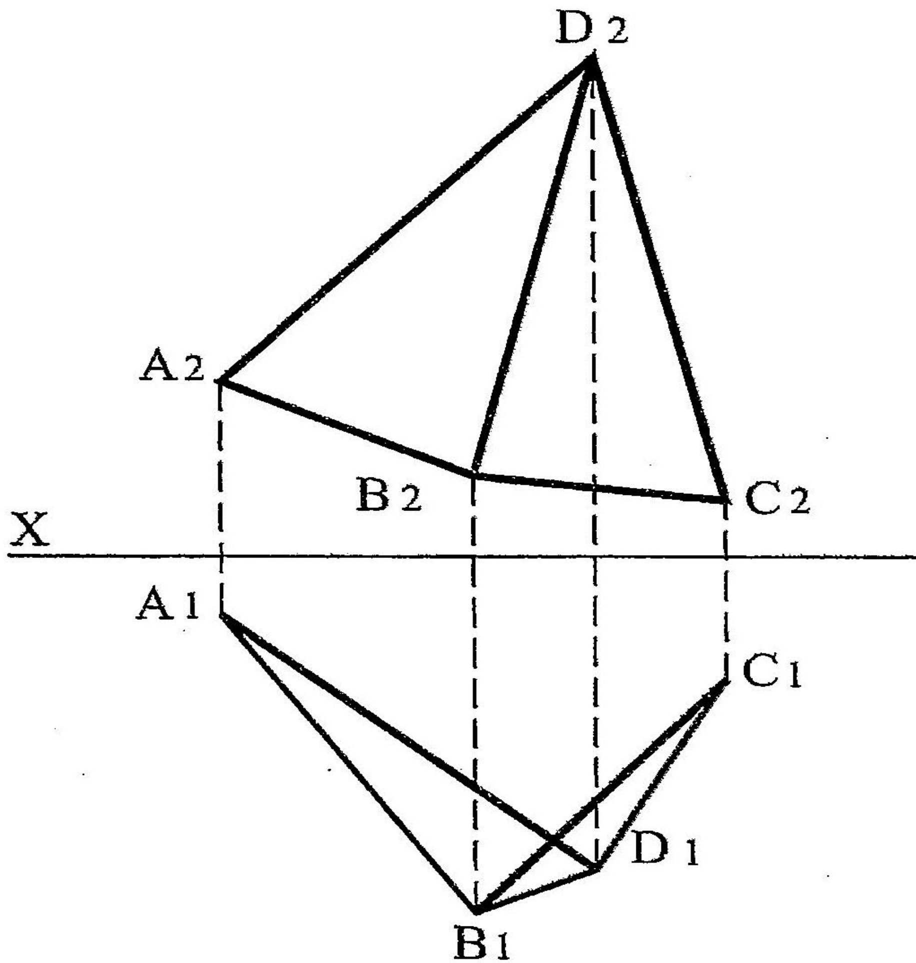
Определение натуральной величины двугранного угла

Чтобы определить натуральную величину двугранного угла, необходимо преобразовать его таким образом, чтобы ребро стало проецирующим.



Задача 7.9 стр.38 Найти истинную величину двугранного угла методом плоскопараллельного перемещения

Решение: У двух пересекающихся плоскостей есть общее ребро BD, которое является прямой общего положения. Если оно преобразуется в проецирующую прямую и отразится на плоскость проекций в точку, плоскости треугольников станут проецирующими и отобразятся на данной плоскости проекций в виде линий. Плоский угол между ними будет равен пространственному углу между этими плоскостями



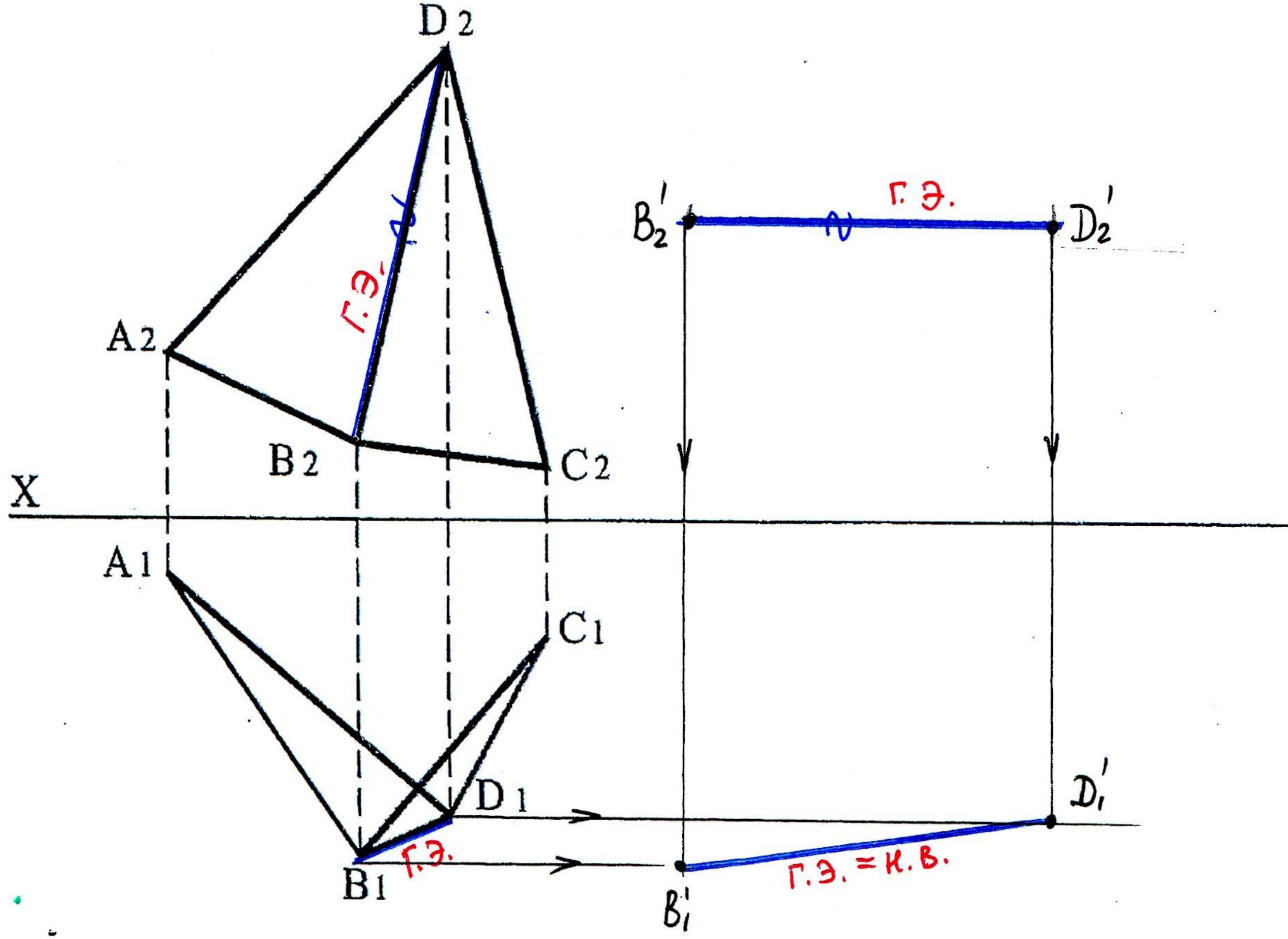
Таким образом, BD – главный элемент (Г.Э.).

1) Преобразуем BD в линию уровня (1 типовая задача). Точки B и D движутся одновременно в плоскостях, параллельных плоскости П2, поэтому на стене изображение ребра не меняется, но разворачивается в положение, параллельное плоскости П1

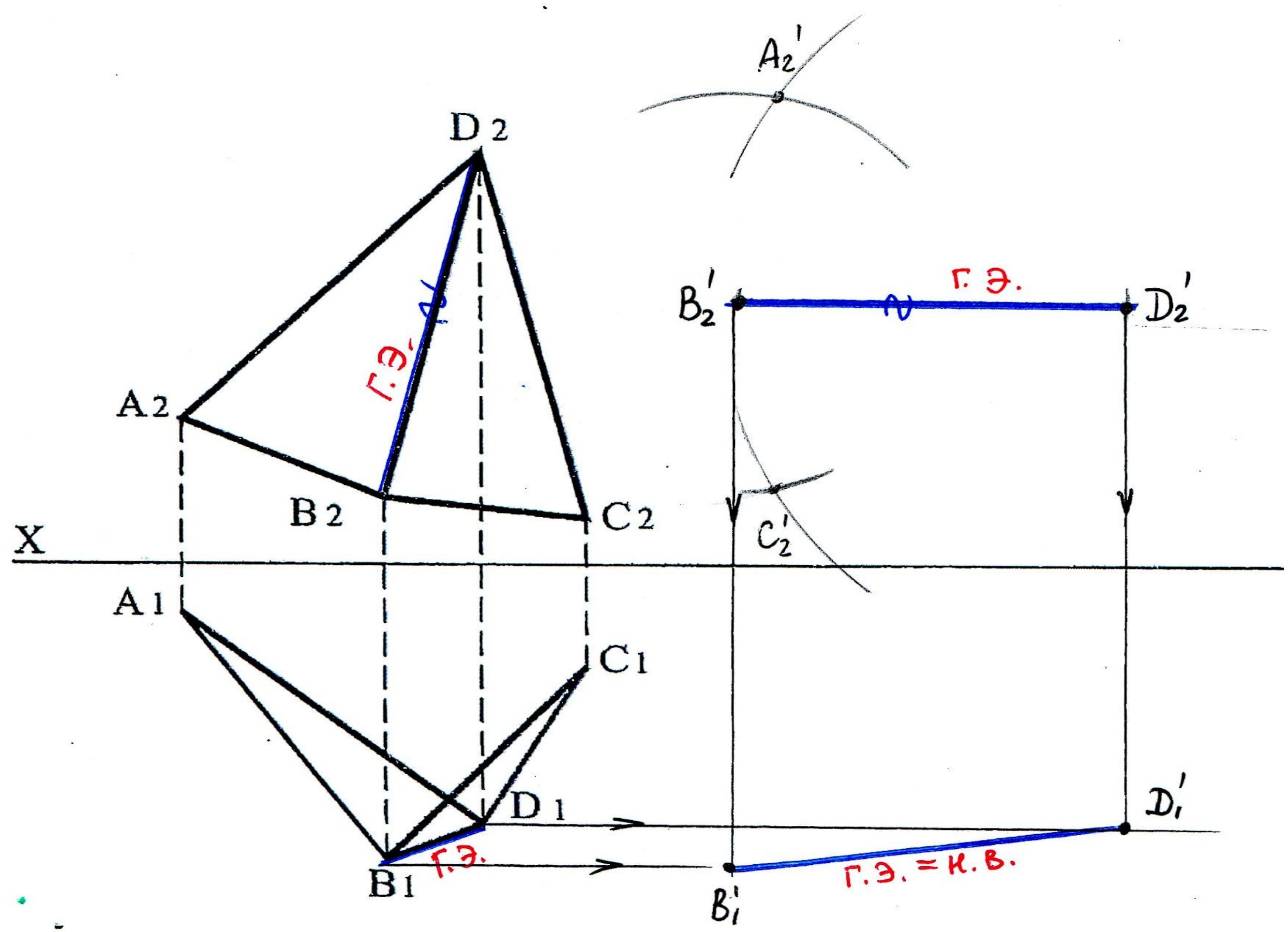
(B2 D2 = B2' D2' ; B2'D2' ǁ оси X).

На П1 траектории точек –прямые, параллельные оси X

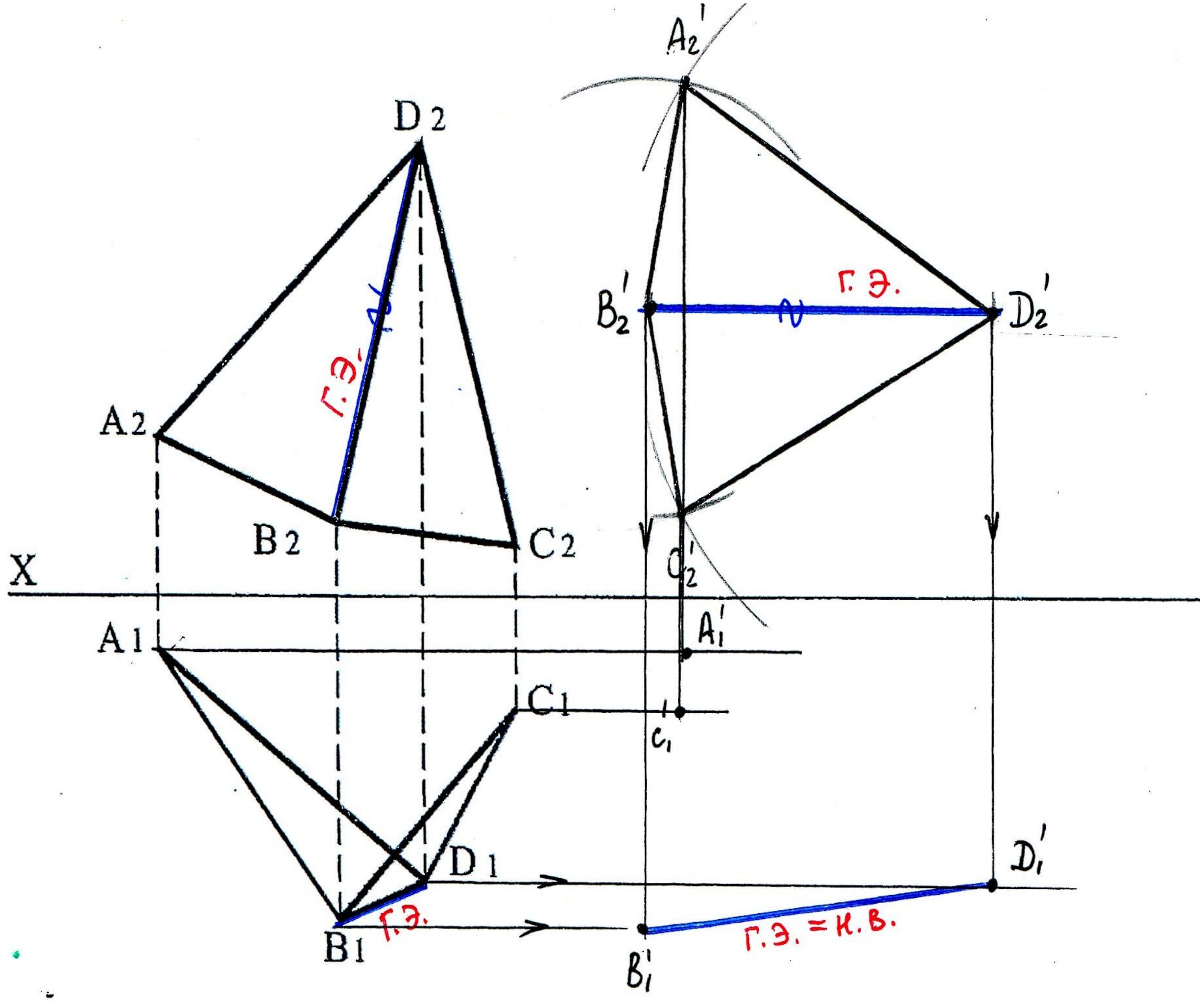
Находим горизонтальную проекцию ребра B1'D1' по линиям связи на траекториях движения точек



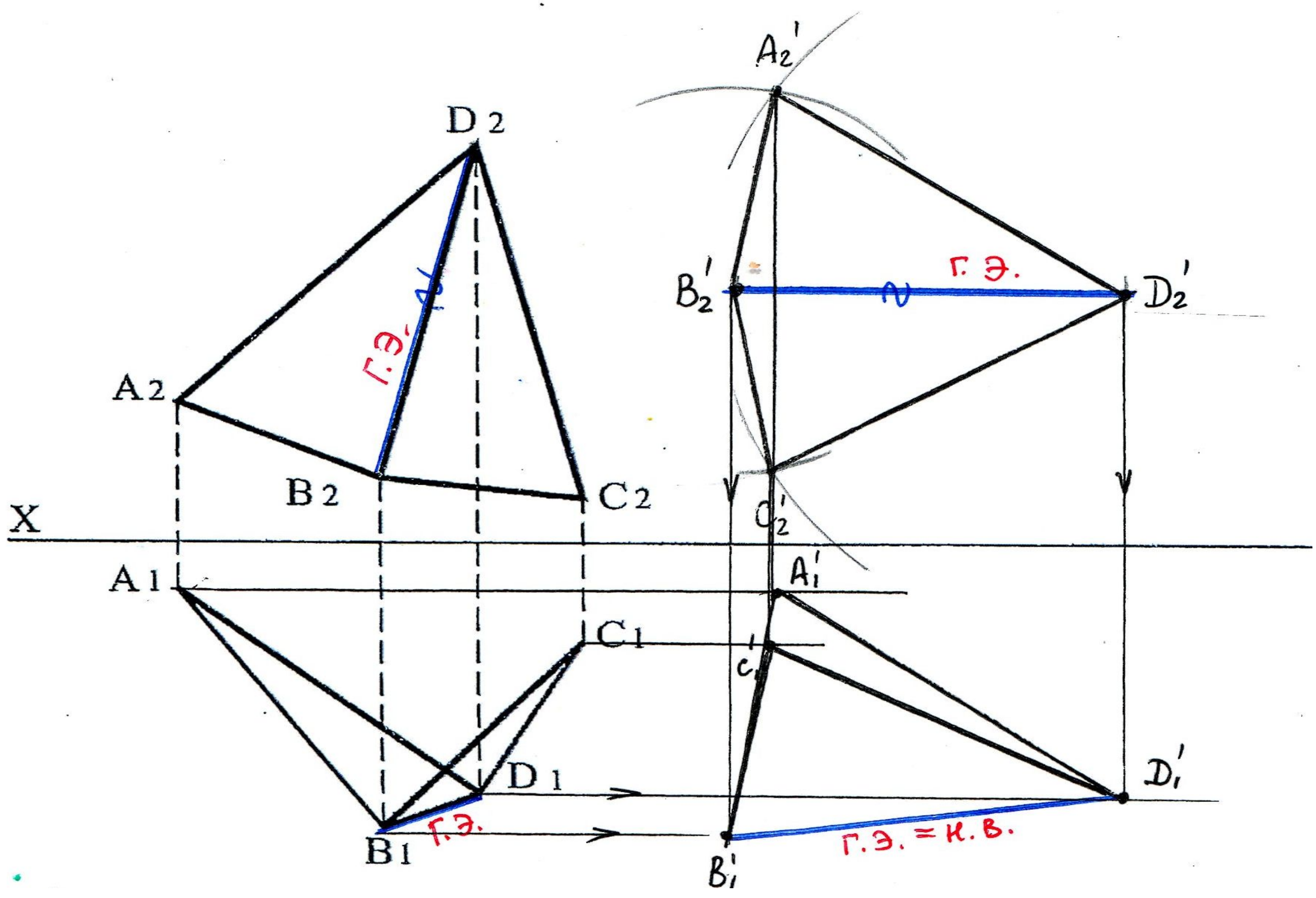
Вместе с главным элементом одновременно перемещаются точки A и C. Измеряем расстояния от точек B2 и D2 до A2 и засечками определяем новое положение проекции A2‘. Аналогично ищем C2'



Соединив полученные точки, получим фронтальную проекцию двугранного угла в новом положении. На П1 траектории движения точек А и С параллельны оси Х. По линиям связи определяем положение новых проекций А1' и С1'

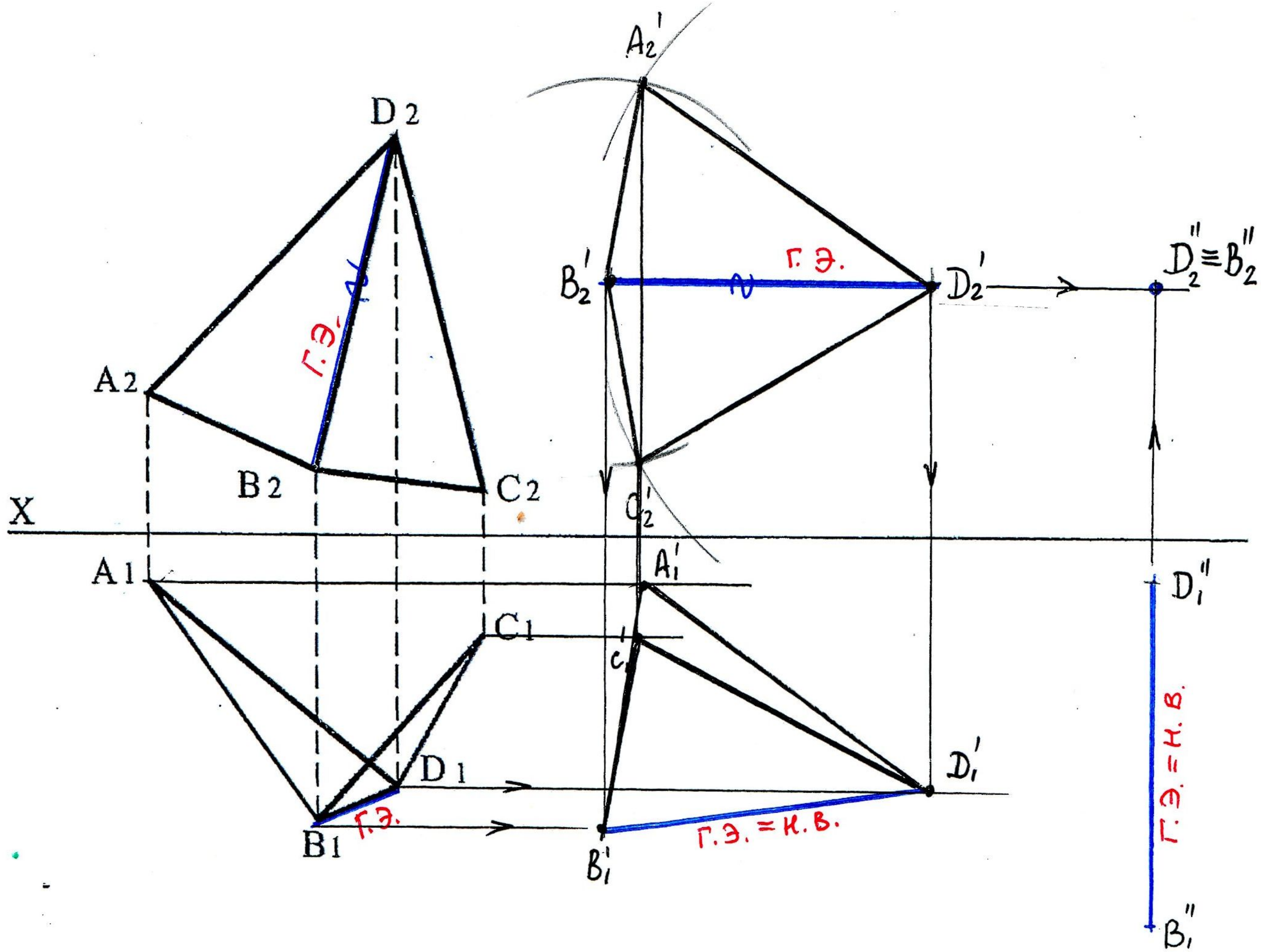


Соединяем полученные проекции точек на П1- получаем новую горизонтальную проекцию двугранного угла, причем общее ребро (Г.Э.) проецируется в натуральную величину

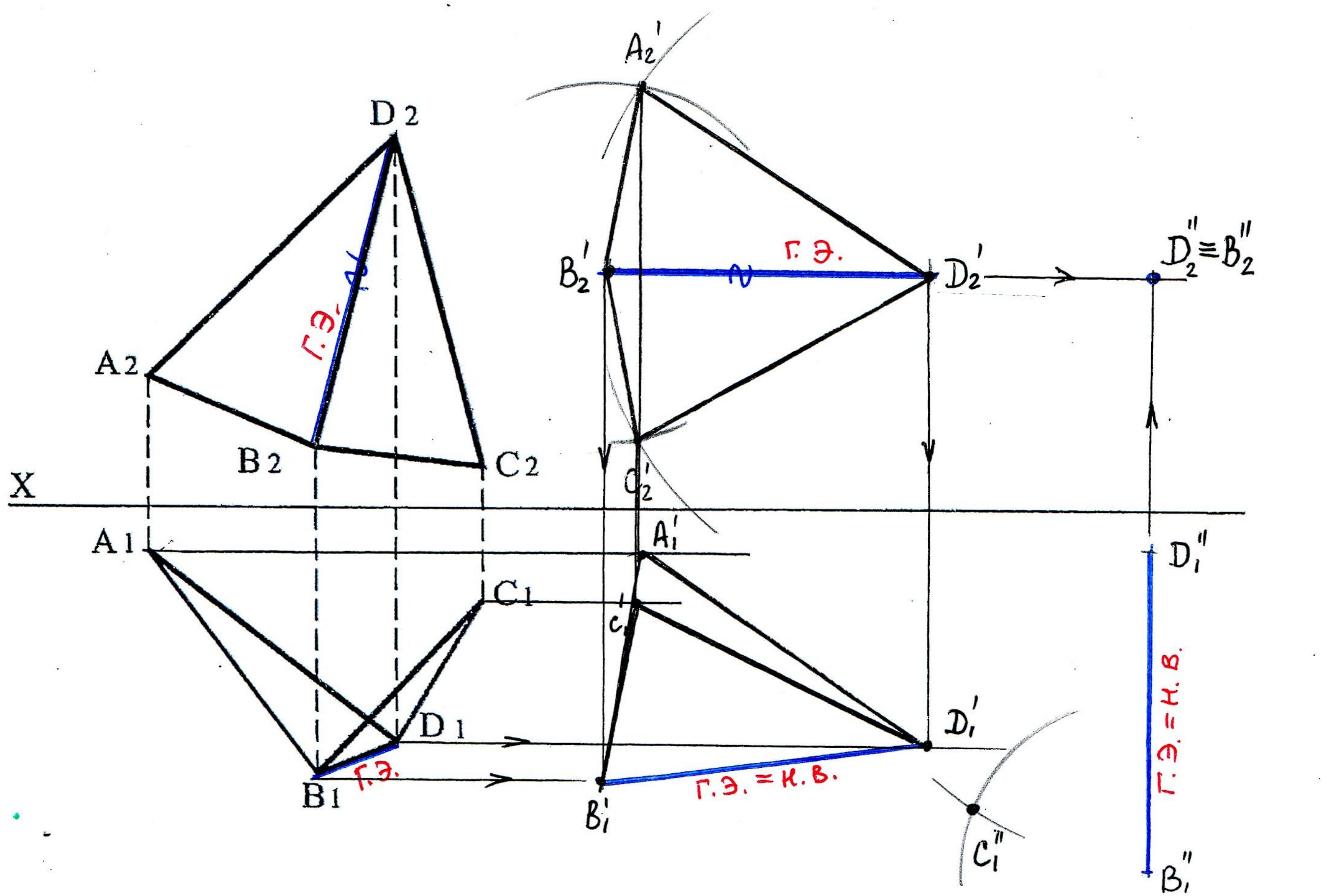


2)Преобразуем ребро BD в положение проецирующей прямой. Для этого развернем его в плоскостях, параллельных П1 в положение, перпендикулярное П2. Измеряем B1'D1‘= н.в. и ставим в положение, перпендикулярное оси X в любом месте.

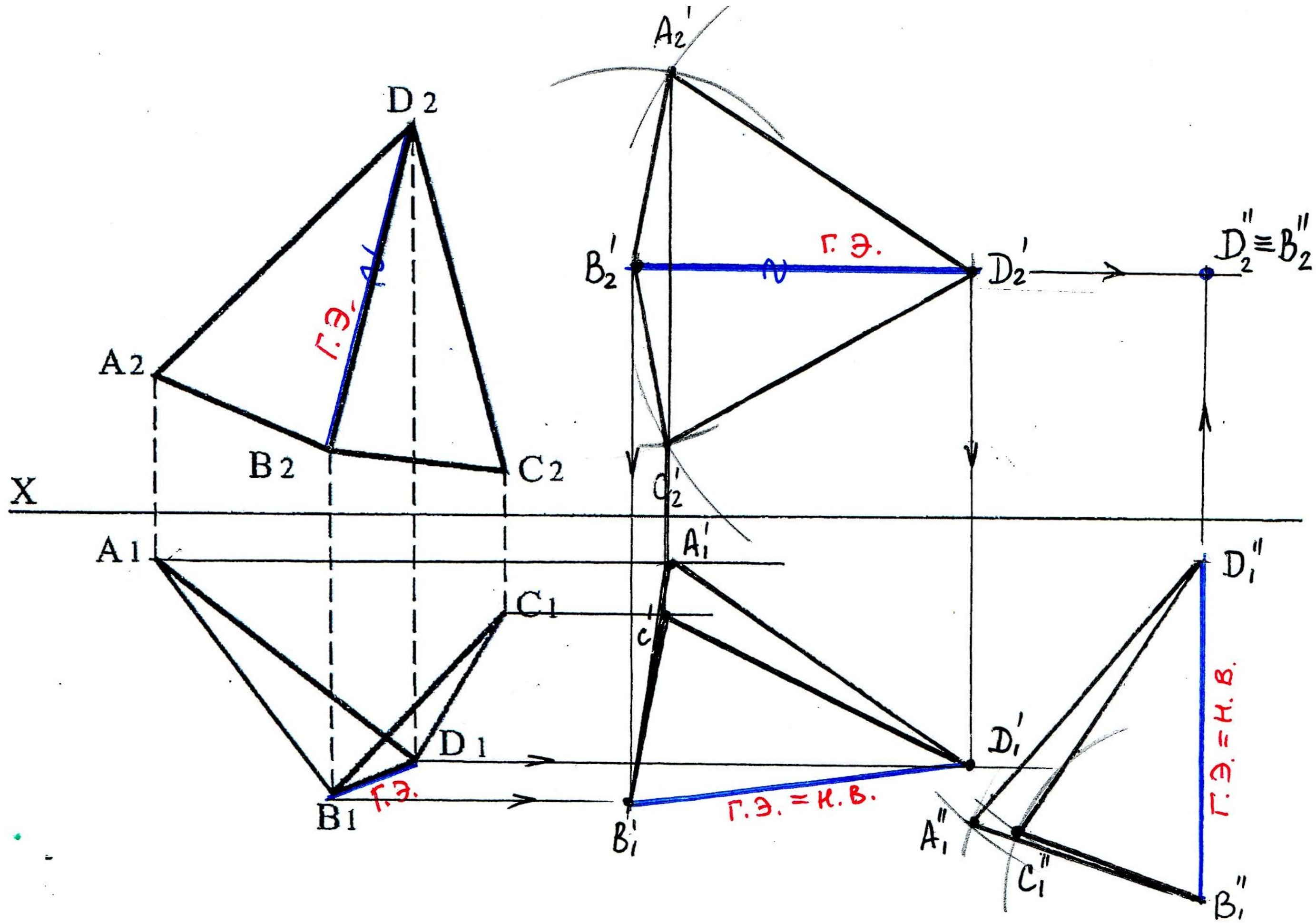
На П2 отрезок проецируется в точку B2''≡ D2''



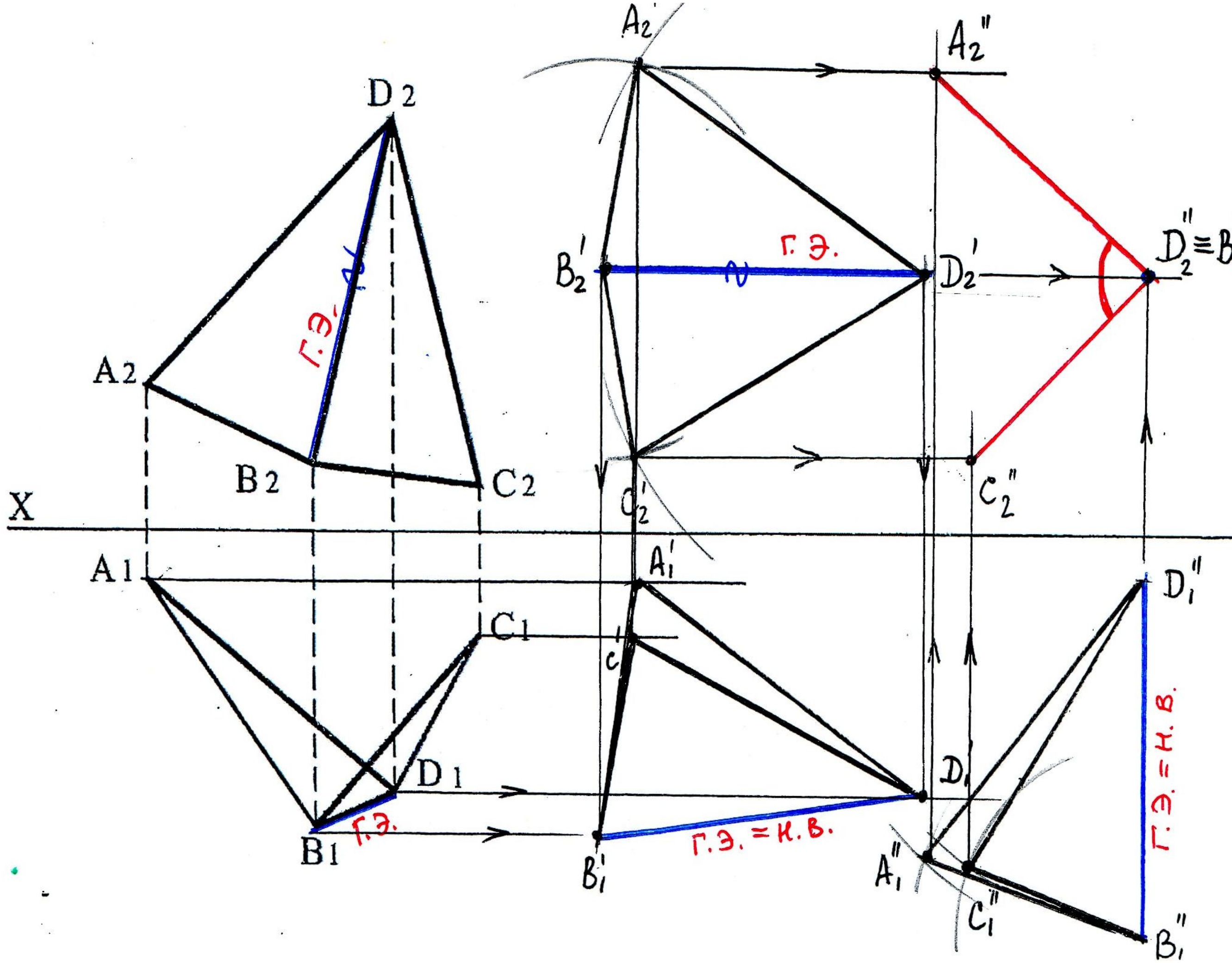
Т.к. движение переноса осуществляется параллельно П1, проекция на П1 двугранного угла не изменится, только Г.Э.= н.в. развернется перпендикулярно оси X. Определяем новое положение точки С1'' засечками, измеряя расстояния удаления от точек В1‘ и D1‘ до С1 ' с предыдущей проекции



Определяем новое положение точки A1'' засечками, измеряя расстояния удаления от точек B1‘ и D1‘ до A1 ' с предыдущей проекции. Соединив найденные точки, получим горизонтальную проекцию двугранного угла после второго перемещения

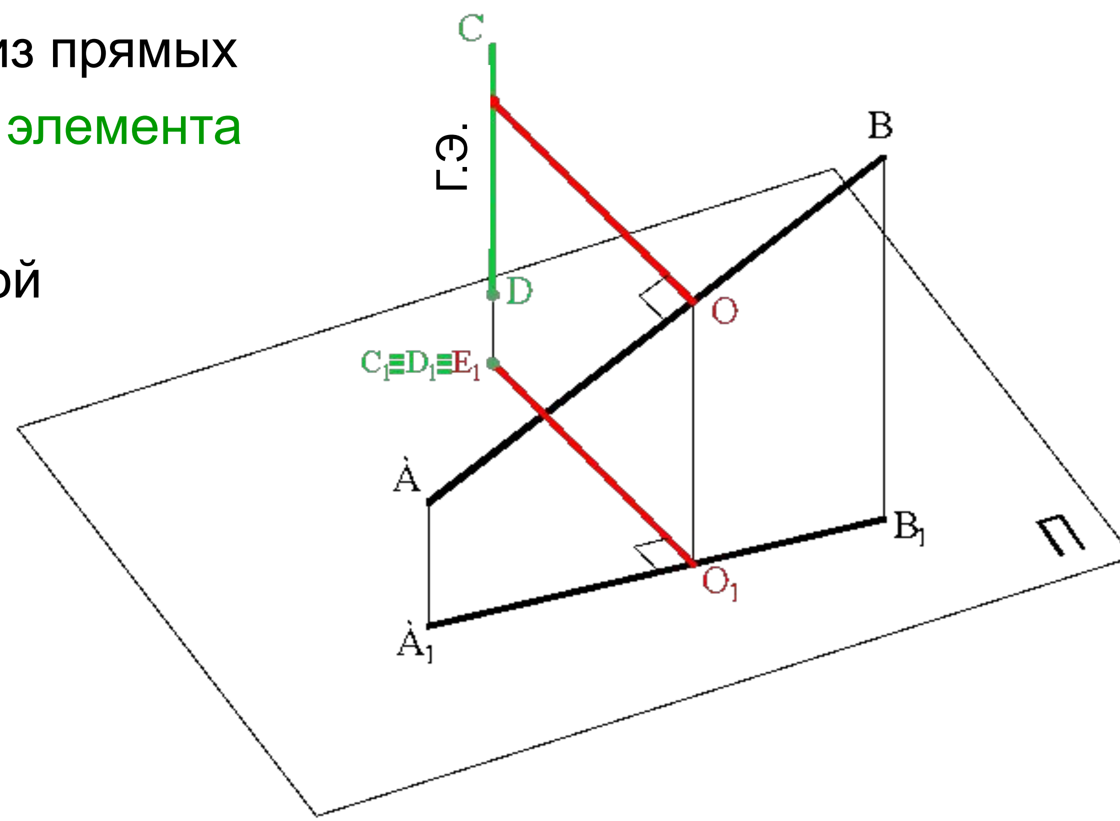


На П2 траектории движения точек параллельны оси X. По линиям связи определяем фронтальные проекции точек A2'' и C2'' . Получим н.в. угла

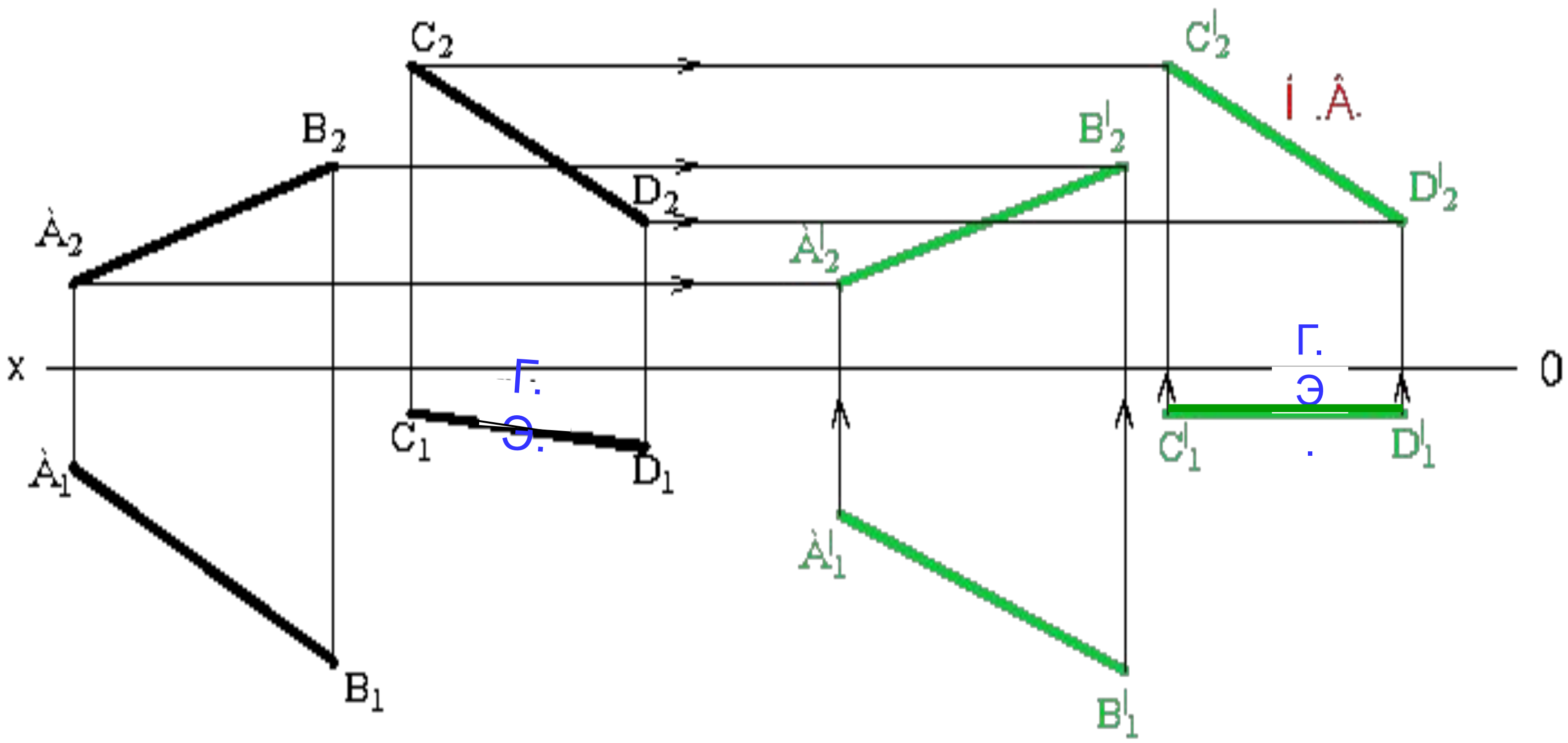


Определение расстояния между двумя скрещивающимися прямыми

Чтобы определить расстояние между двумя скрещивающимися прямыми, необходимо одну из прямых выбрать в качестве главного элемента и преобразовать ее в точку. Расстояние от точки до второй прямой и будет расстоянием между двумя скрещивающимися прямыми.



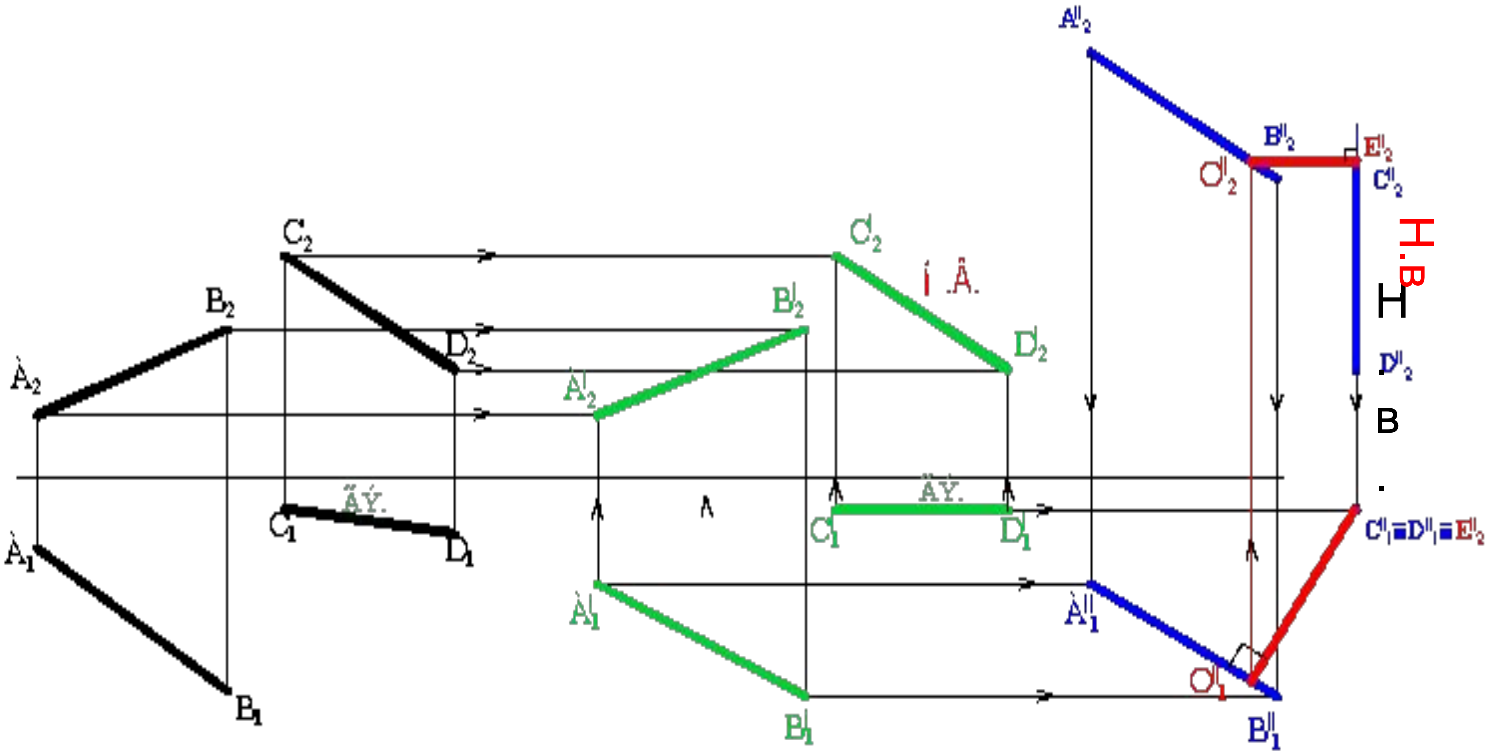
Определение расстояния между двумя скрещивающимися прямыми



Задача решается в два действия.

1. Выбираем одну из прямых в качестве «главного элемента» и располагаем его параллельно плоскости проекций (например, к П2), чтобы прямая - Г.Э. проецировалась в натуральную величину. Вторая прямая является зависимой и преобразуется вместе с Г.Э.

Определение расстояния между двумя скрещивающимися прямыми



2. Располагаем Г.Э.(CD) перпендикулярно плоскости П1(C_2'' D_2''= н.в. ⊥OX).

На П1 прямая CD проецируется в точку ($C_1 \equiv D_1$). Вторая прямая строится вслед за первой. EO - расстояние между двумя скрещивающимися прямыми.

Преобразование плоскости общего положения в проецирующую и определение угла наклона плоскости к плоскости проекций

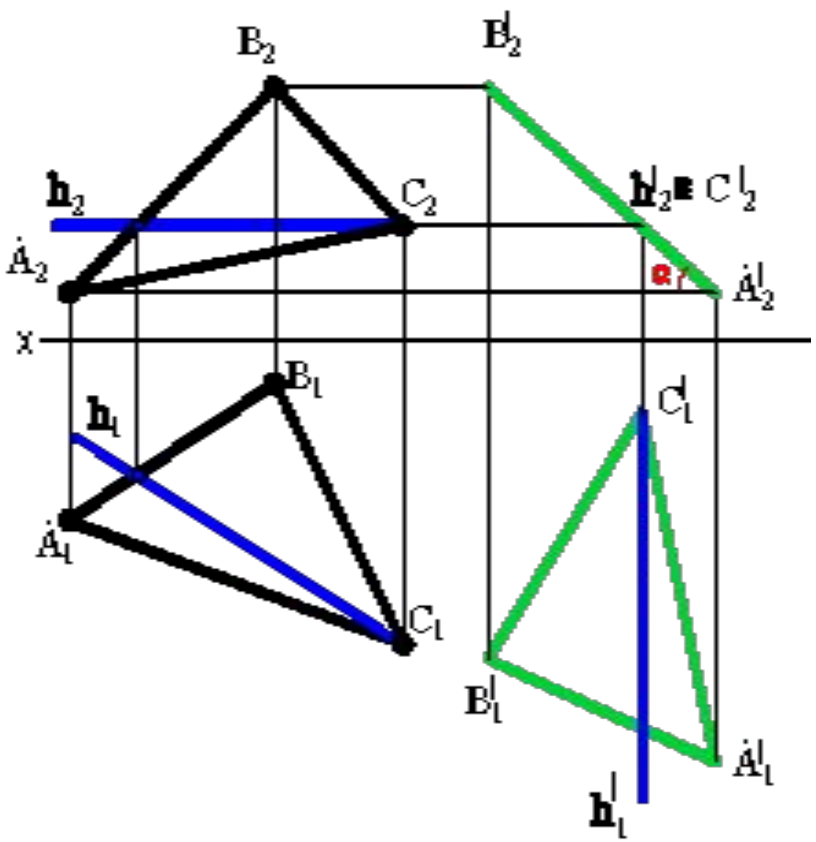
Чтобы определить угол наклона плоскости общего положения к какой-либо плоскости проекций, необходимо преобразовать эту плоскость в проецирующую.

Задача: Определить угол наклона плоскости ΔABC к плоскости П1

Решение: 1)Задаем в плоскости ΔABC горизонталь ; 2) Все точки плоскости перемещаются в плоскостях, параллельных плоскости проекций. Переместим плоскость ΔABC так, чтобы лежащая в нем горизонталь проецировалась на П2 в точку

h ⊥ П2 (**h1 ⊥ X1,2**)

α- угол наклона к плоскости П1



Определение натуральной величины плоской фигуры

Задача решается в два действия.

1. Плоскость общего положения преобразовывают в проецирующую.

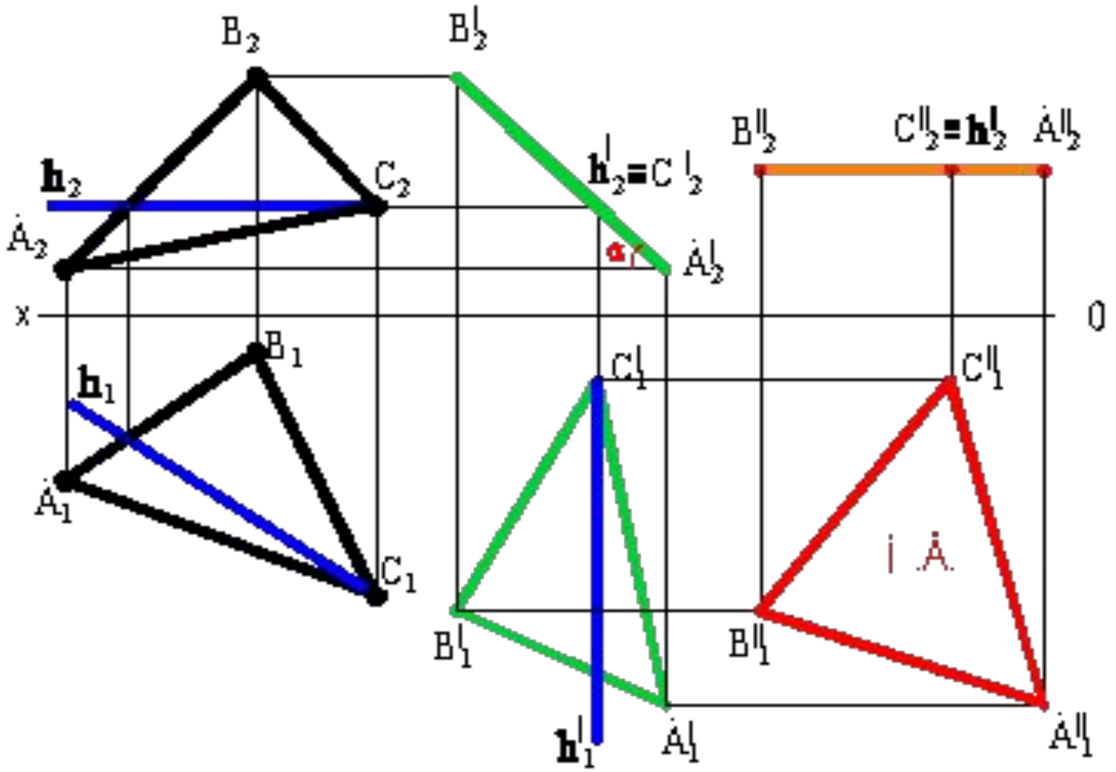
2. Проецирующую плоскость преобразовывают в плоскость уровня.

$\Delta ABC \parallel \Pi_1 \rightarrow$

$A_2''B_2''C_2'' \parallel X_{1,2}$,

$A_2''B_2''C_2'' = A_2'B_2'C_2'$

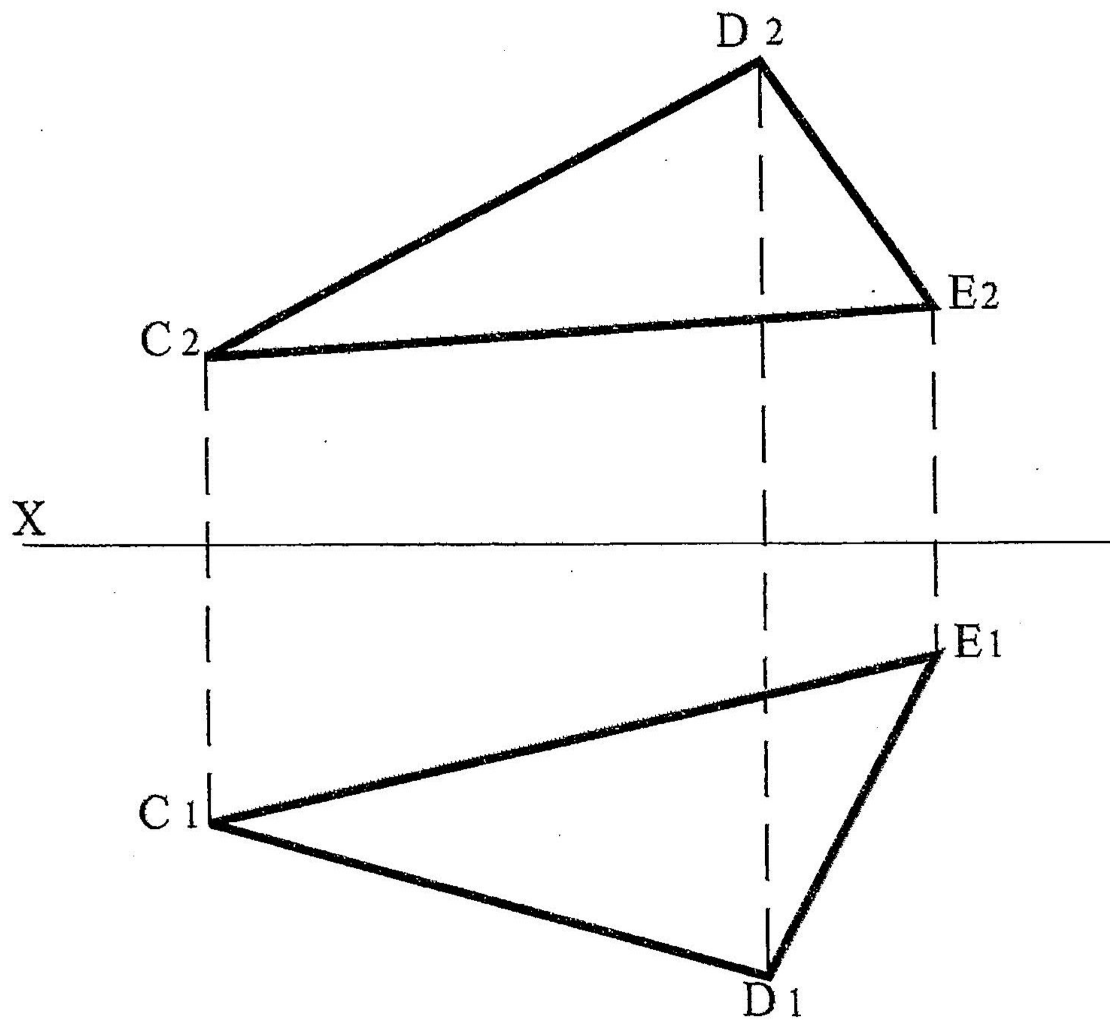
$A_1''B_1''C_1''$ - н.в.ΔABC



Задача 7.5 стр.36 Определить натуральную величину треугольника CDE

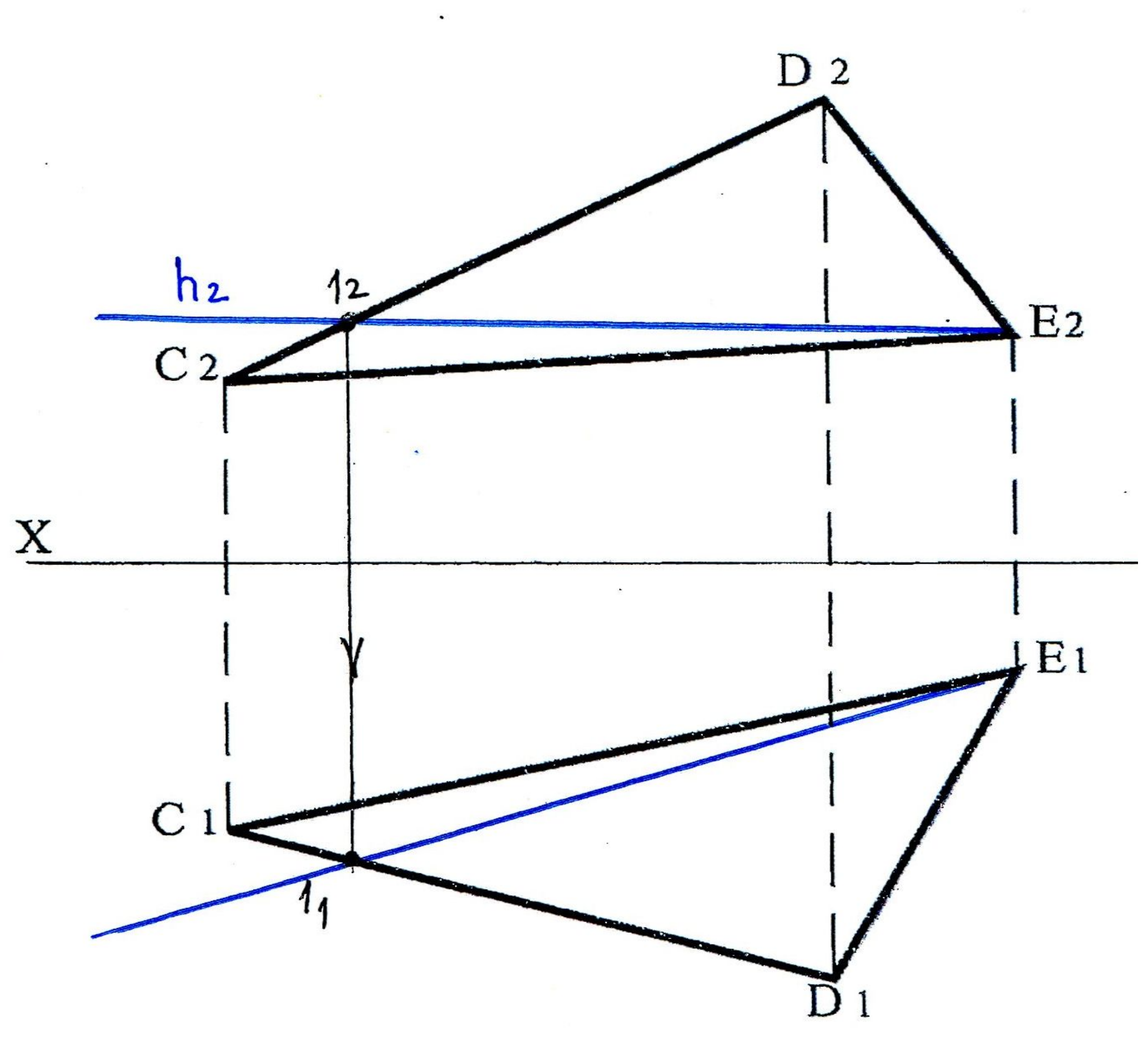
Решение:

Необходимо развернуть плоскость общего положения в новое, параллельное плоскости проекций (4 типовая задача)

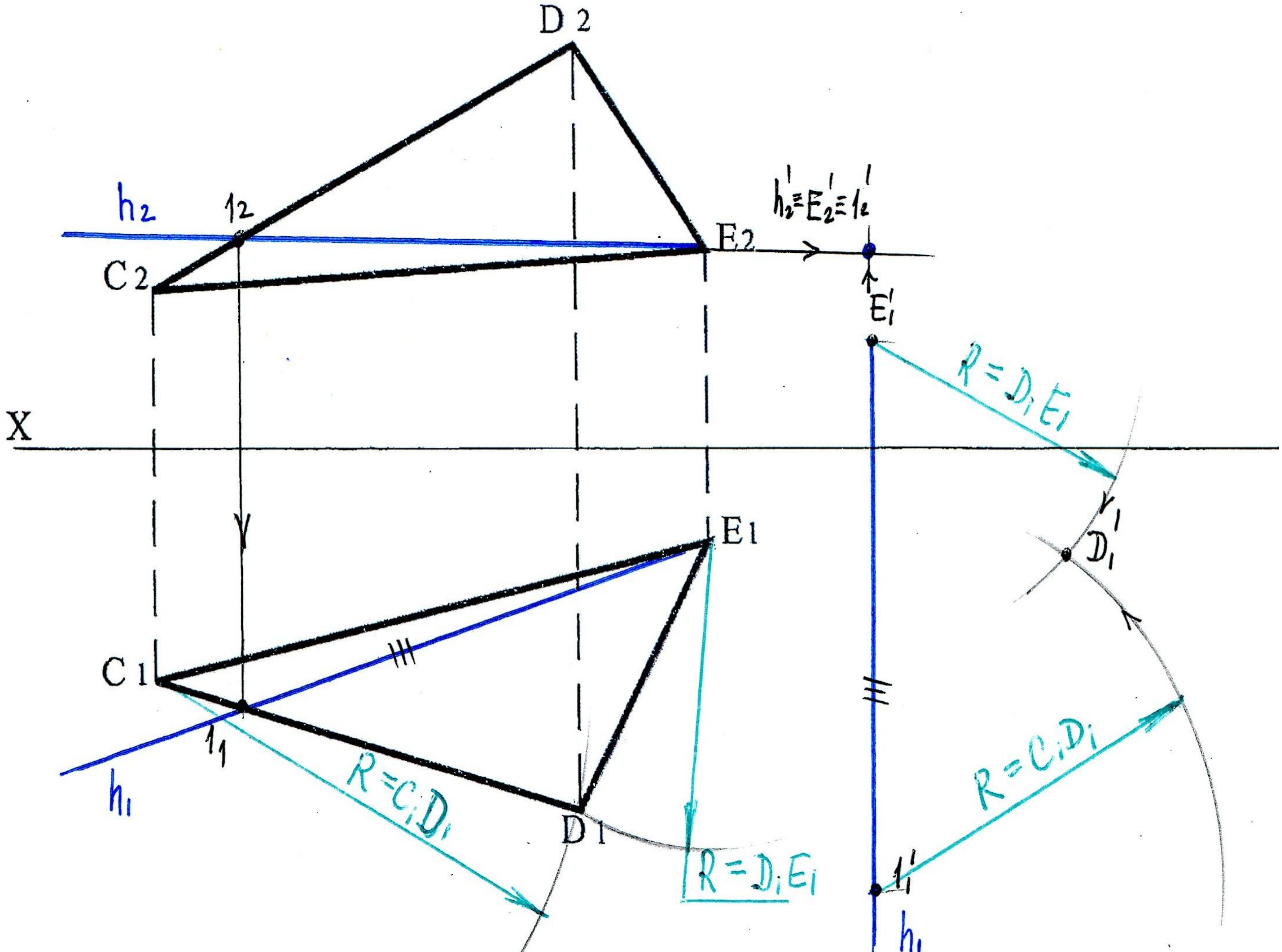


1) Преобразуем плоскость в положение проецирующей

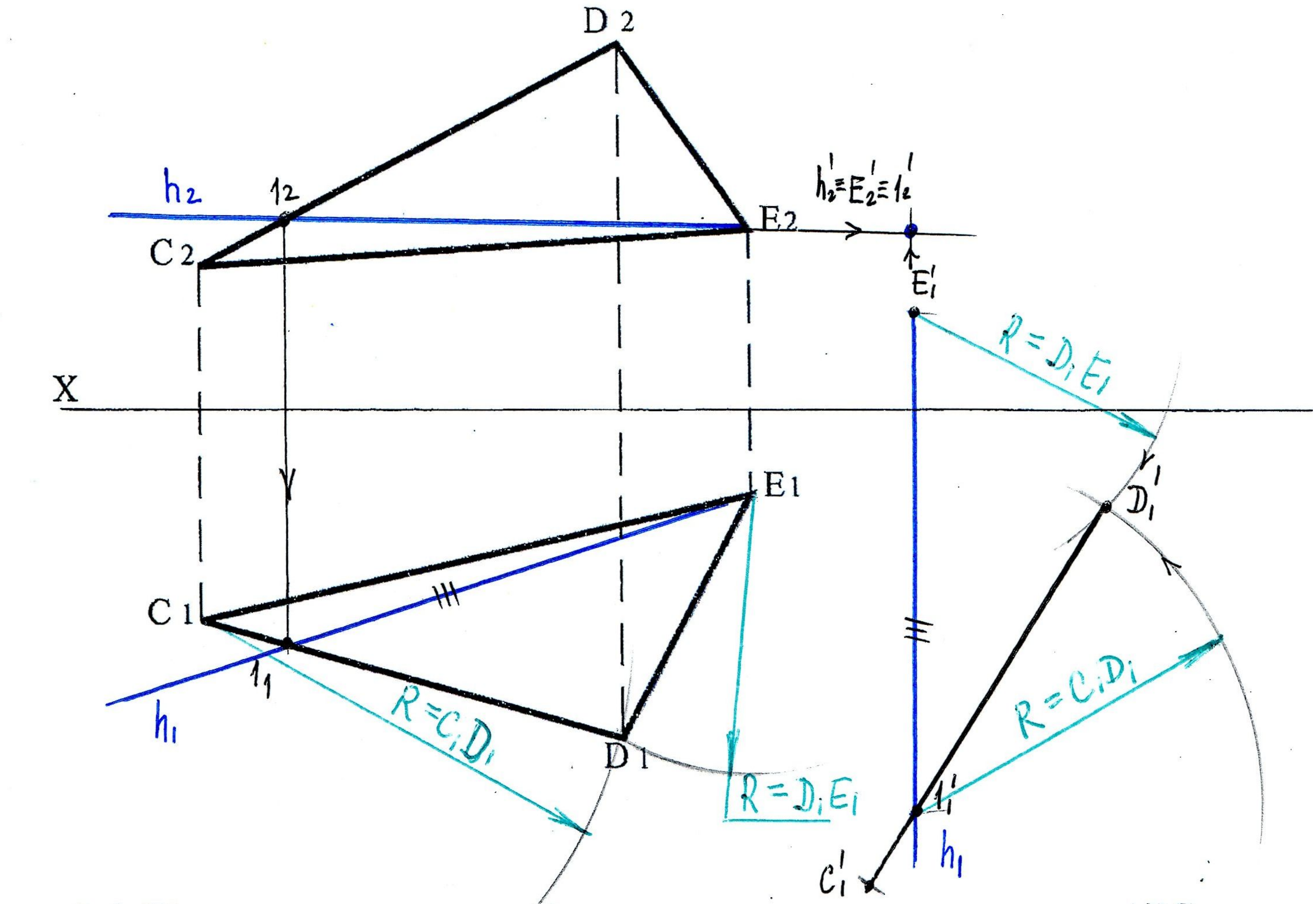
- Для этого зададим в плоскости ΔCDE линию уровня, например горизонталь на любой высоте, например через точку Е
- На П2 проекция h2llоси Х, на П1 строим горизонтальную проекцию горизонтали по признаку принадлежности прямой плоскости



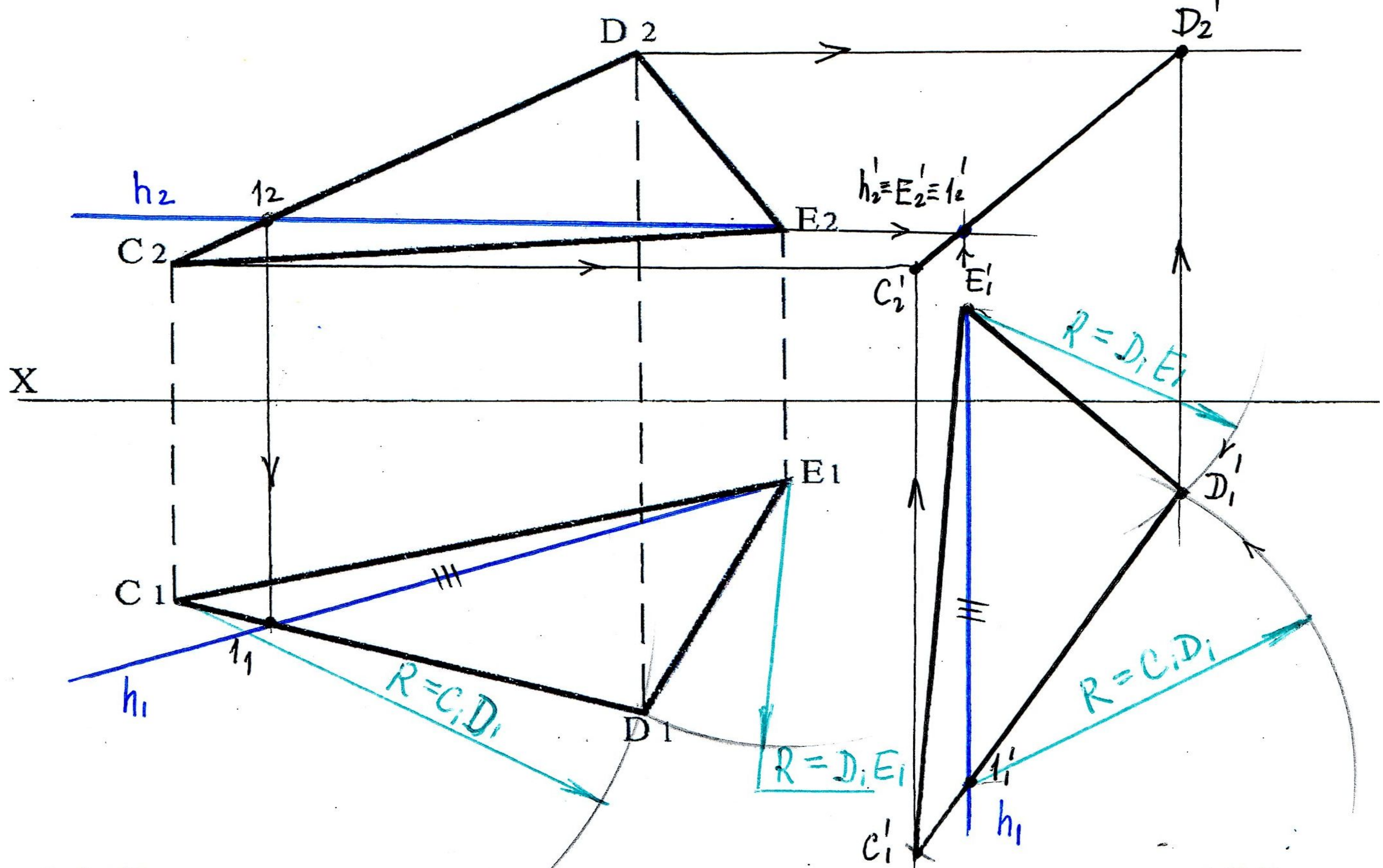
Преобразуем горизонталь в проецирующую прямую. Для этого развернем ее перпендикулярно плоскости П2.Вместе с горизонталью параллельно плоскости П1 перемещается и (.)D



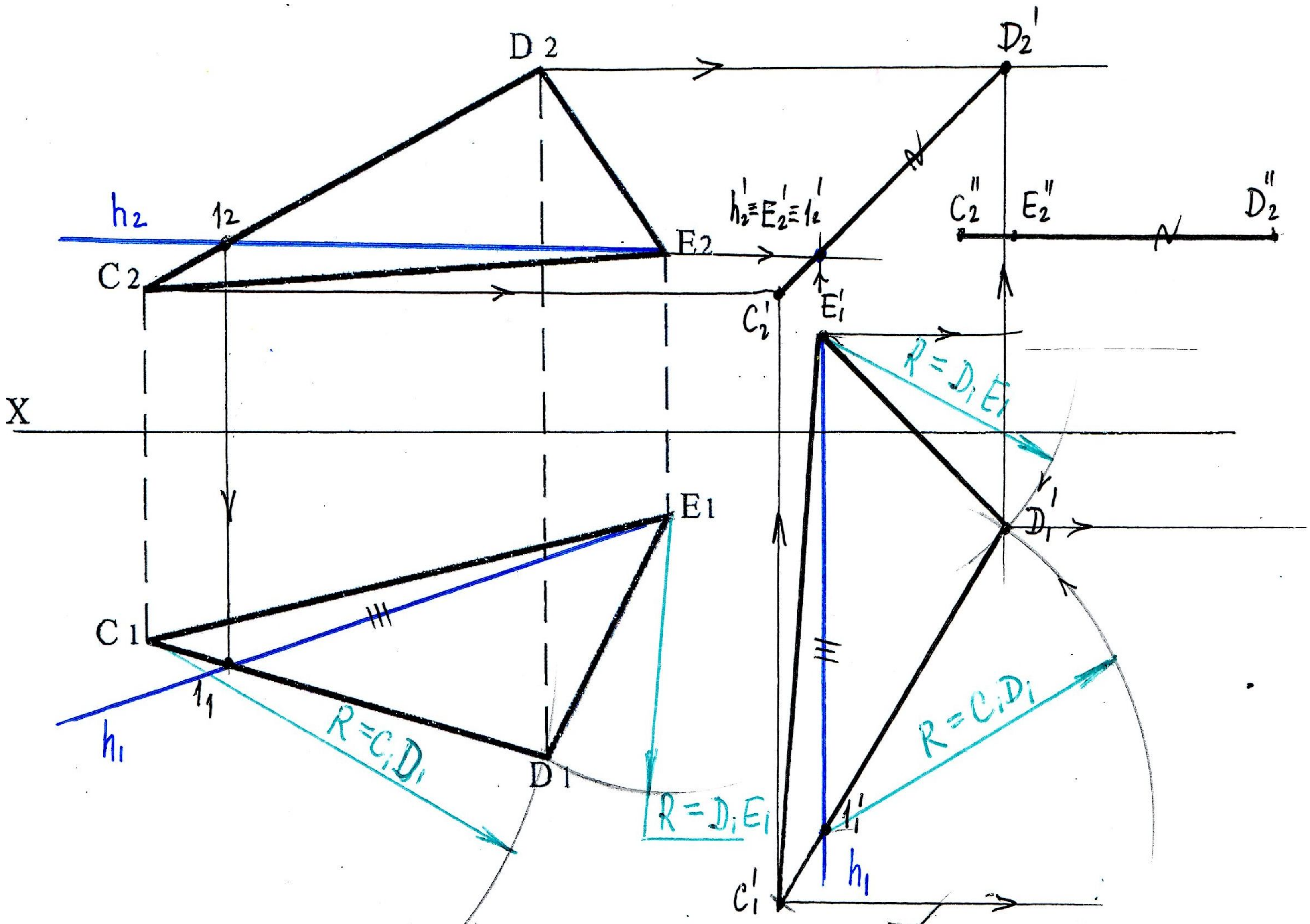
Через точки $1_1'$ и D_1' определяем положение проекции прямой C_1' D_1' после перемещения (C_1 D_1= C_1' D_1')



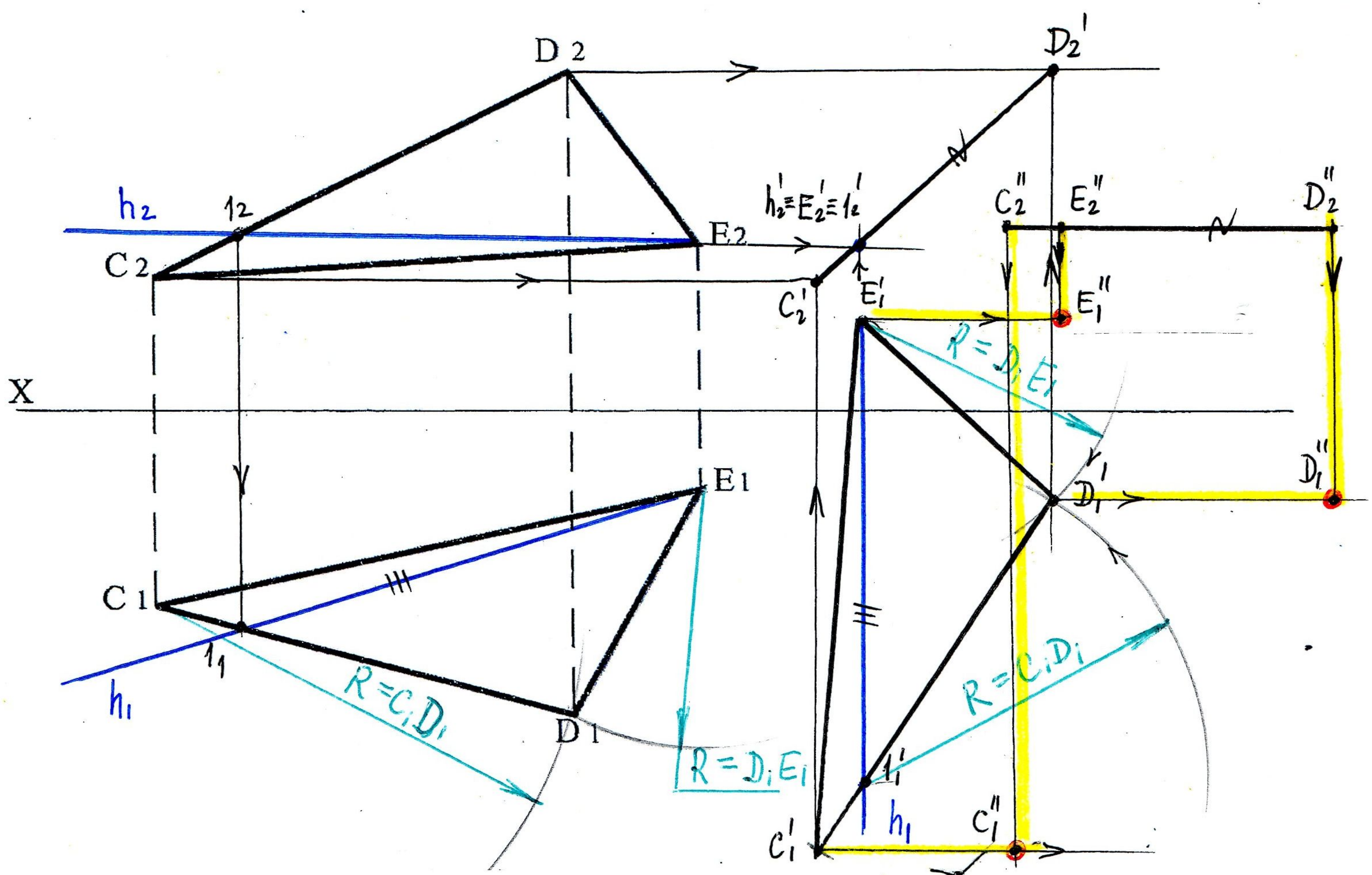
Проекция треугольника на П1 не изменилась, но переместилась т. о., что горизонталь развернулась перпендикулярно к П2. Перемещение происходило параллельно плоскости П1, поэтому на П2 траектории движения проекций точек параллельны оси X. Плоскость на П2 проецируется в линию



2)Преобразуем плоскость ΔCDE в плоскость уровня (4 типовая задача) Перемещаем ее параллельно П2 и разворачиваем параллельно П1 ($C_2'D_2'E_2' = C_2''D_2''E_2''$; $C_2''D_2''E_2'' \parallel$ осиX)



По линиям связи определяем положение точек C1'',D1'',E1 '' на горизонтальной проекции после второго перемещения. Они находятся на пересечении с траекториями движения проекций на П1 (построения выделены желтым цветом)



C1'',D1'',E1 ''- натуральная величина треугольника