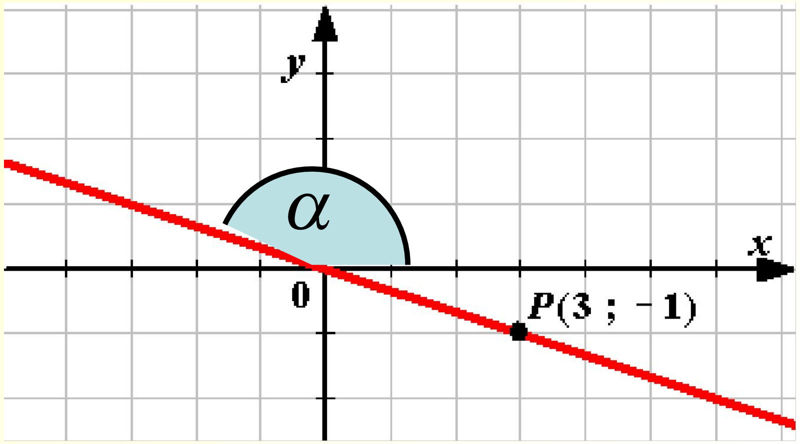
Производная и ее применение

Угловой коэффициент прямой.



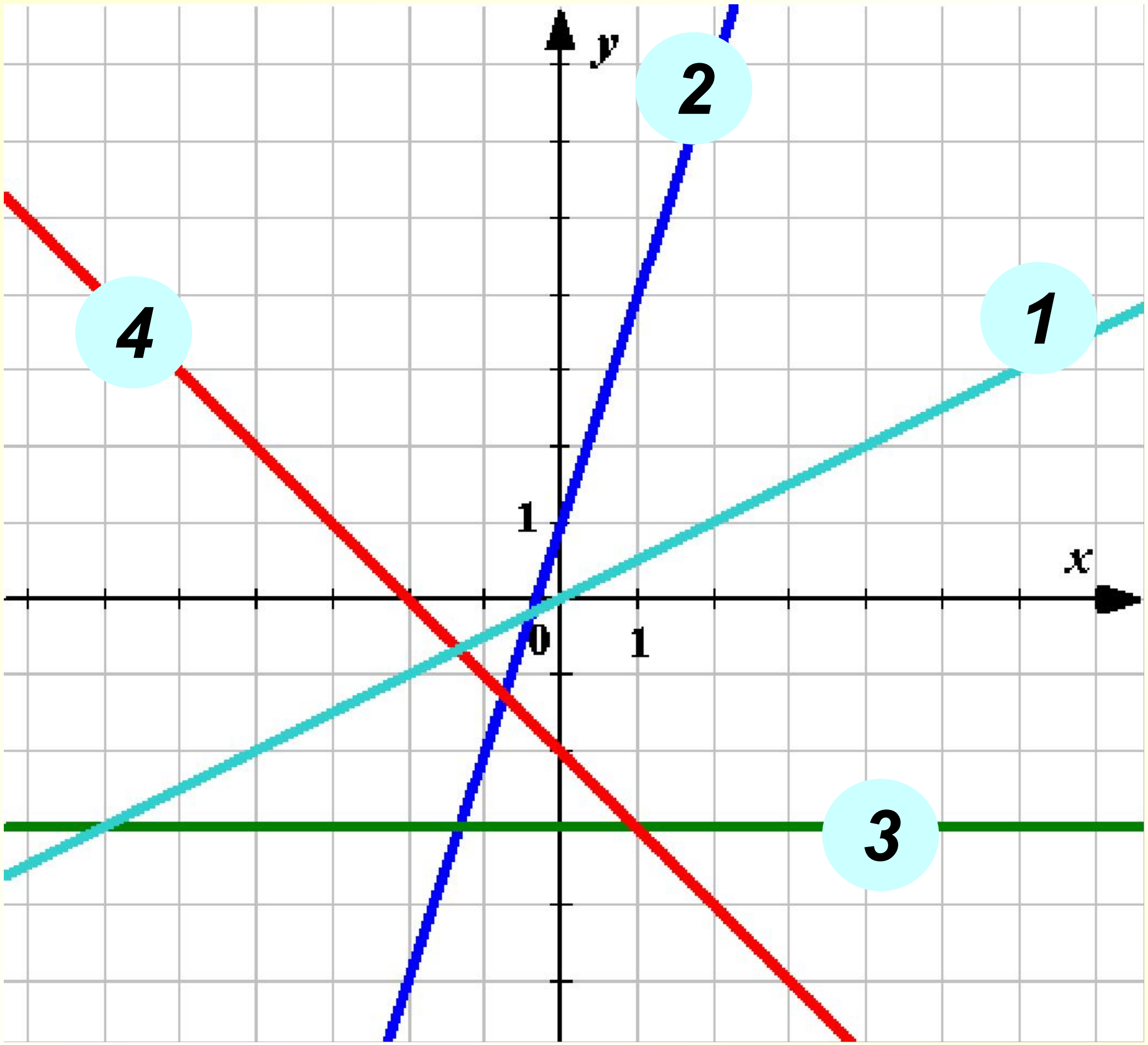
Прямая проходит через начало координат и точку P(3; -1).
Чему равен ее угловой коэффициент?

$$y = kx + b \qquad y = kx$$

$$-1 = 3k \Rightarrow k = -\frac{1}{3}$$

$$\boxed{k = tg\alpha}$$

Найдите угловые коэффициенты прямых:



$$k = tg\alpha$$

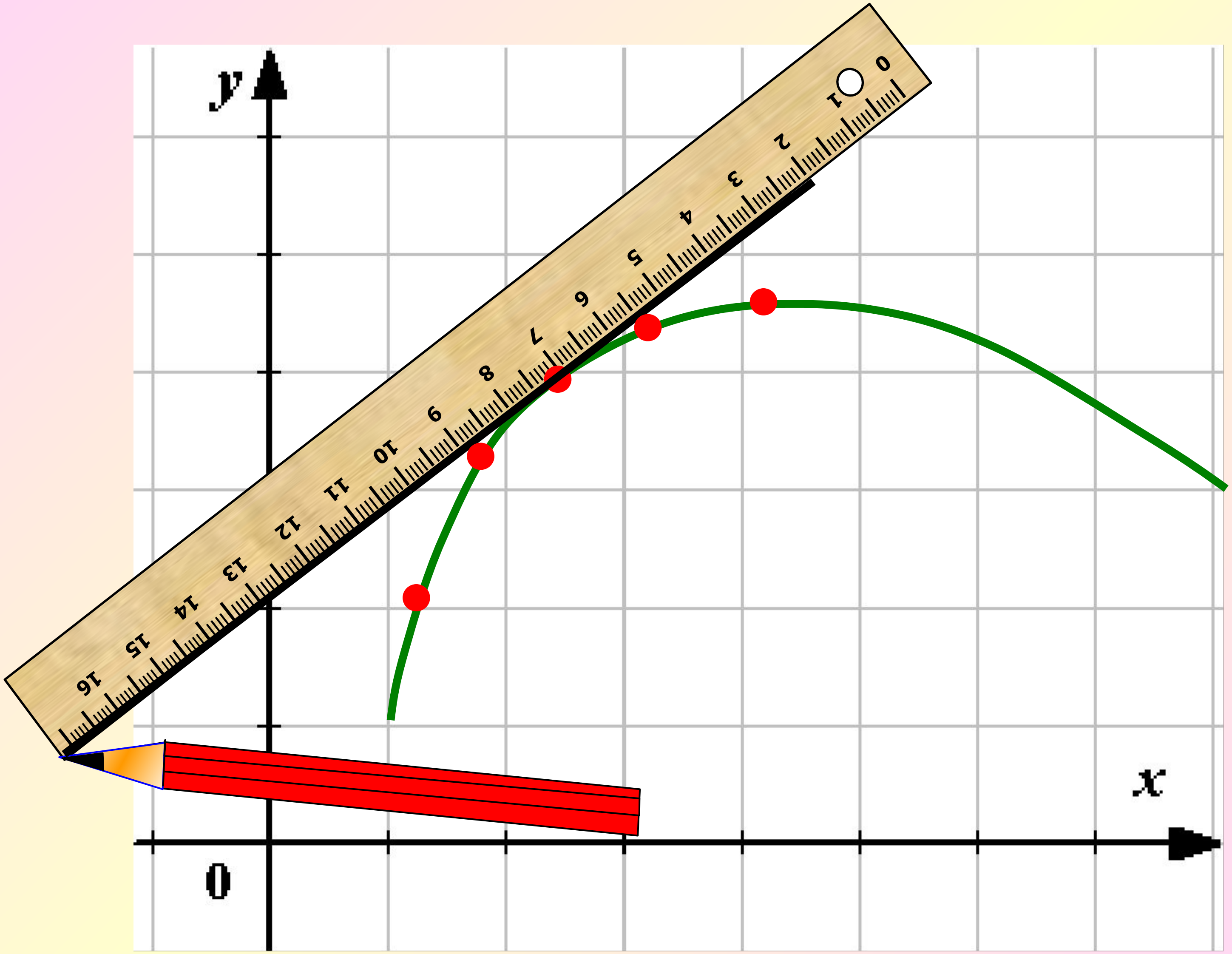
1 $k = 0{,}5$

2 $k = 3$

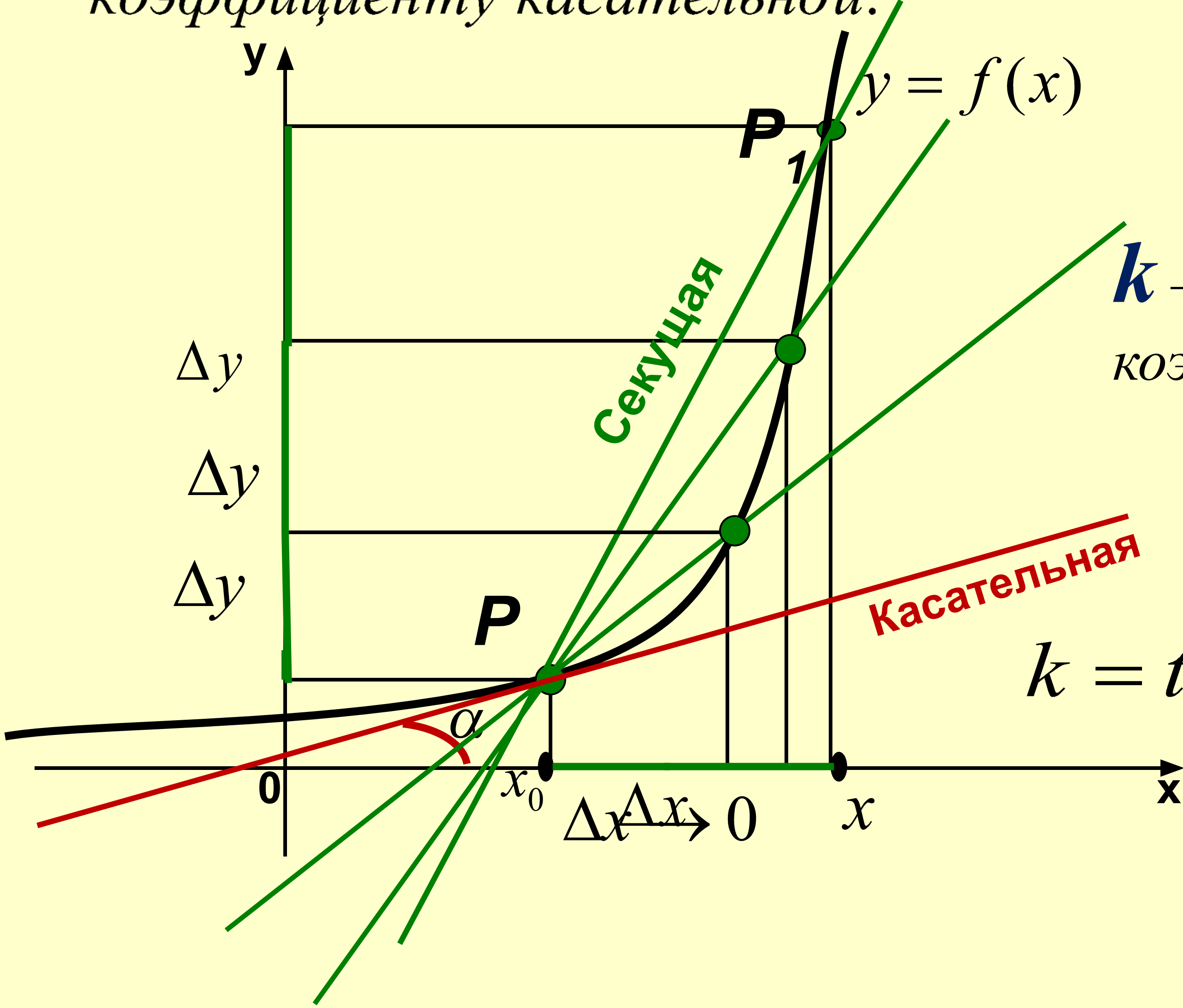
3 $k = 0$

4 $k = -1$

Касательная к кривой.



При $\Delta x \to 0$ угловой коэффициент секущей $\to$ к угловому коэффициенту касательной.



$$y = kx + b$$

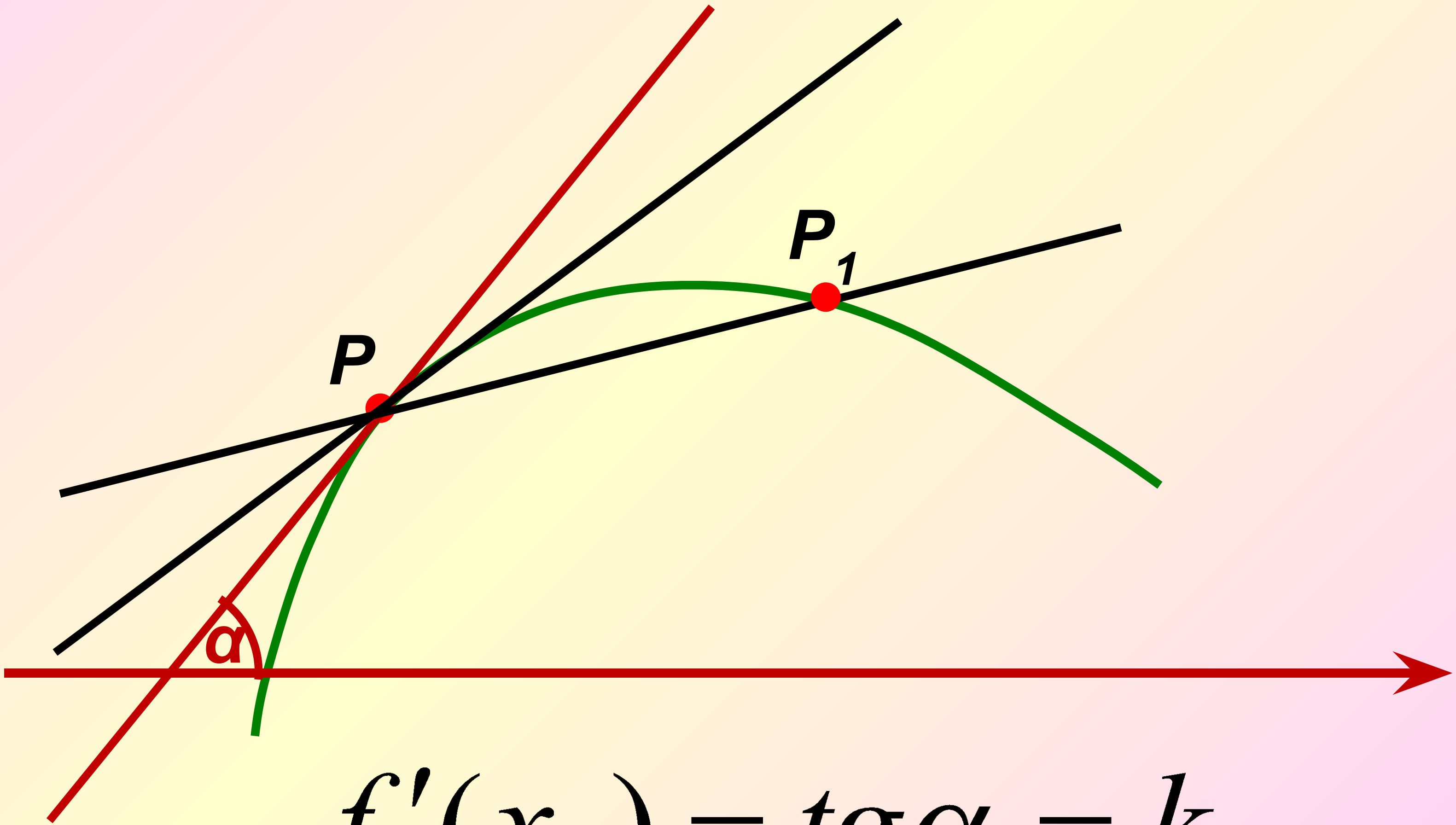
k – угловой коэффициент прямой

$$k = tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

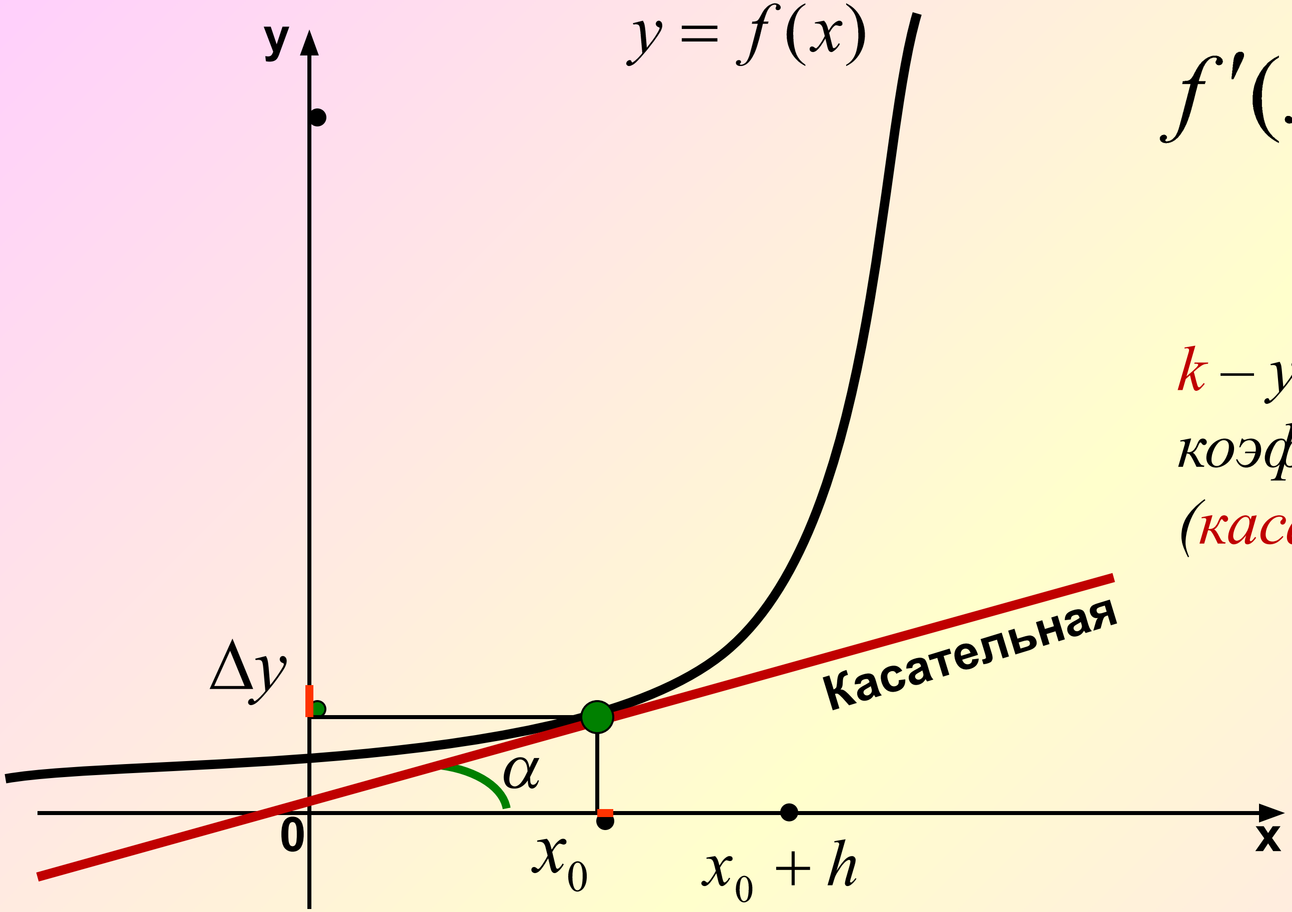
$$\boxed{k = f'(x_0)}$$

Касательная есть предельное положение секущей.

Касательная к кривой.



$$f'(x_0) = tg\alpha = k$$



$$f'(x_0) = tg\alpha = k$$

$$y = kx + b$$

k – угловой коэффициент прямой (касательной)

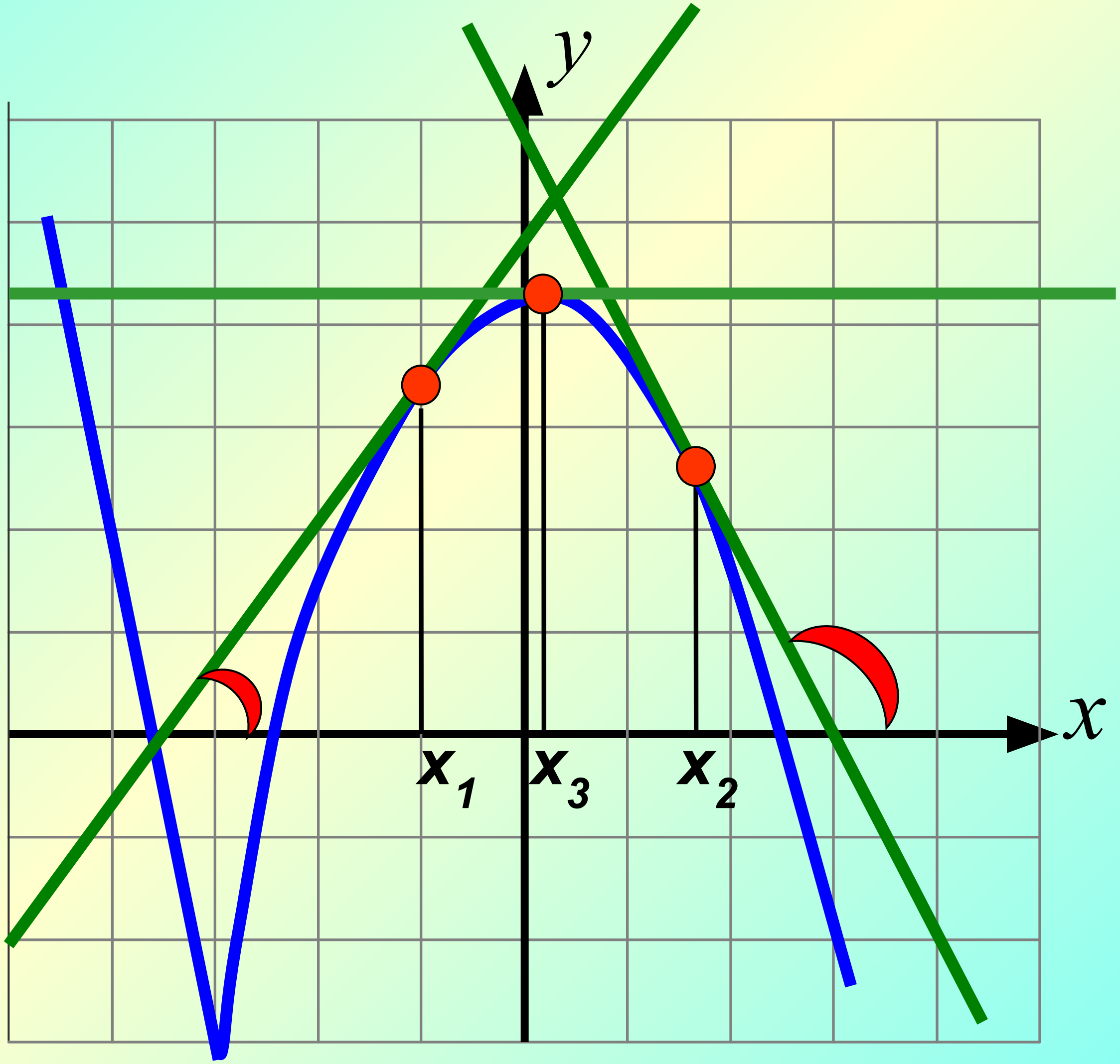
Геометрический смысл производной

Значение производной функции в данной точке равно угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции в этой точке.

$\alpha < 90^o \Rightarrow k > 0$

$\alpha > 90^o \Rightarrow k < 0$

$\alpha = 0^o \Rightarrow k = 0,$ *касательная параллельна OX*



Нахождение производной.

$$\boxed{f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

$$\boxed{\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)}$$

$$f(x) = C$$

$$f(x+\Delta x) = C$$

$$\Delta y = C - C = 0$$

$$C' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0$$

$$C' = 0$$

$$3' = 0$$

$$(-1{,}8)' = 0$$

Нахождение производной.

$$\boxed{f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

$$\boxed{\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)}$$

$$f(x) = x$$

$$f(x + \Delta x) = x + \Delta x$$

$$\Delta y = x + \Delta x - x = \Delta x$$

$$x' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

$$x' = 1$$

Нахождение производной.

$$\boxed{f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

$$\boxed{\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)}$$

$$f(x)=kx+b$$

$$f(x+\Delta x)=k(x+\Delta x)+b=kx+k\Delta x+b$$

$$\Delta y=\underline{kx+k\Delta x+b}-\underline{kx-b}=k\Delta x$$

$$(kx+b)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{k\Delta x}{\Delta x}=k$$

$$\left(kx+b\right)'=k$$

$$\left(-\frac{3}{4}x-7\right)'=-\frac{3}{4}$$

$$\left(5x\right)'=5$$

Нахождение производной.

$$\boxed{f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} \qquad \boxed{\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)}$$

$$f(x) = x^2$$

$$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2$$

$$\Delta y = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2 =$$

$$= \Delta x(2x + \Delta x)$$

$$(x^2)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(2x + \Delta x\right) = 2x$$

$$(x^2)' = 2x$$

Нахождение производной.

$$\boxed{f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

$$\boxed{\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)}$$

$$f(x) = x^3$$

$$f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

$$\Delta y = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3 =$$

$$= 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 = \Delta x\left(3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2\right)$$

$$(x^3)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x\left(3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2\right)}{\Delta x} = 3x^2$$

$$(x^3)' = 3x^2$$

$$C' = 0$$

$$(kx+b)' = k$$

$$x' = 1$$

$$(x^2)' = 2x$$

$$(x^3)' = 3x^2$$

$$\boxed{(x^n)' = nx^{n-1}}$$

$$(x^4)' =$$

$$(x^5)' =$$

Найти производную функции $y = \frac{1}{x}$.

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

$$f(x + \Delta x) = \frac{1}{x + \Delta x}$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{x - (x + \Delta x)}{x(x + \Delta x)} = \frac{-\Delta x}{x(x + \Delta x)}.$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\Delta x}{x(x + \Delta x)\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{x(x + \Delta x)} = -\frac{1}{x^2}.$$

Ответ: $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$(\sin x)' = \cos x;$$

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

$ДЗ: \xi 40, \mathrm{N}\ 5, 6;$

$\xi 41, \mathrm{N}\ 1-3, \ 5-11$

За урок!

$$C' = 0$$

$$(kx+b)' = k$$

$$x' = 1$$

$$(x^2)' = 2x$$

$$(x^3)' = 3x^2$$

$$\boxed{(x^n)' = nx^{n-1}}$$

$$(x^4)' =$$

$$(x^5)' =$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$(\sin x)' = \cos x;$$

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

Пример 1. Найти значение производной данной функции в данной точке:

а) $y = 3x + 5$, $x = 4$;

б) $y = x^2$, $x = -1$;

в) $y = \frac{1}{x}$, $x = \frac{1}{2}$;

г) $y = \sqrt{x}$, $x = 4$;

д) $y = \sin x$, $x = 0$;

е) $y = \cos x$, $x = \frac{\pi}{6}$.

$(3x + 5)' = 3$; $f'(4) = 3$.

$(x^2)' = 2x$, значит, $f'(-1) = 2 \cdot (-1) = -2$.

$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, значит, $f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = -4$.

$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, значит, $f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$.

$(\sin x)' = \cos x$, значит, $f'(0) = \cos 0 = 1$.

$(\cos x)' = -\sin x$, значит, $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$.

Правила дифференцирования

$$\boxed{(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).}$$

$$(3x^2 - 4x + 2)' = 3 \cdot 2x - 4 = 6x - 4.$$

$$(x^2 + \sin x)' = (x^2)' + (\sin x)' = 2x + \cos x.$$

$$\boxed{(kf(x))' = kf'(x).}$$

$$(5x^2)' = 5(x^2)' = 5 \cdot 2x = 10x;$$

$$\left(-\frac{\cos x}{3}\right)' = -\frac{1}{3}(\cos x)' = -\frac{1}{3}(-\sin x) = \frac{1}{3}\sin x.$$

Правила дифференцирования

$$\boxed{(f(x)\,g(x))' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x).}$$

$$((2x+3)\sin x)' = (2x+3)'\sin x + (2x+3)(\sin x)' =$$
$$= 2\sin x + (2x+3)\cos x.$$

$$\boxed{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.}$$

$$\left(\frac{x^2}{5-4x}\right)' = \frac{(x^2)'\cdot(5-4x) - x^2(5-4x)'}{(5-4x)^2} = \frac{2x(5-4x) - x^2(-4)}{(5-4x)^2} = \frac{10x+4x^2}{(5-4x)^2}.$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Понятие и вычисление производной *n*-го порядка

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'.$$

Найти $f'''(1)$, если $f(x) = x^5$.

Найдите $f'''(0)$, если:

а) $y = 2x^3 - x^2$;

б) $y = x + \cos x$;

в) $y = 4\sin x - \cos x$;

г) $y = \sin x + \cos x$.

Проверочная работа

$$y = \operatorname{tg} x + 4;$$

$$y = 10\sqrt{x} + \frac{5}{x};$$

$$y = \frac{1}{3}\sin x - 3\operatorname{ctg} x;$$

$$y = x^6 + 13x^{10} + 12;$$

$$\left(7 - \frac{1}{x}\right)(6x + 1);$$

$$y = \frac{\cos x}{x}.$$

$$y = \operatorname{ctg} x + 8.$$

$$y = -8\sqrt{x} - \frac{1}{x}.$$

$$y = 6\operatorname{tg} x - \sin x.$$

$$y = x^9 - 6x^{21} - 36.$$

$$y = \sqrt{x} \cdot \cos x;$$

$$y = \frac{x^5 + x}{x^5 - 1};$$

Дифференцирование сложной функции.

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

42.1. в) $y = \left(\frac{x}{3} + 2\right)^{12}$;

г) $y = (15 - 9x)^{13}$.

$$(f(kx + m))' = k \cdot f'(kx + m).$$

42.2. в) $y = \sin(5 - 3x)$;

г) $y = \cos(9x - 10)$.

42.3. в) $y = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6} - 4x\right)$;

г) $y = \sqrt{4 - 9x}$.

Дифференцирование обратной функции

$$\boxed{x'_y = \frac{1}{y'_x}}$$

$$(\arcsin x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

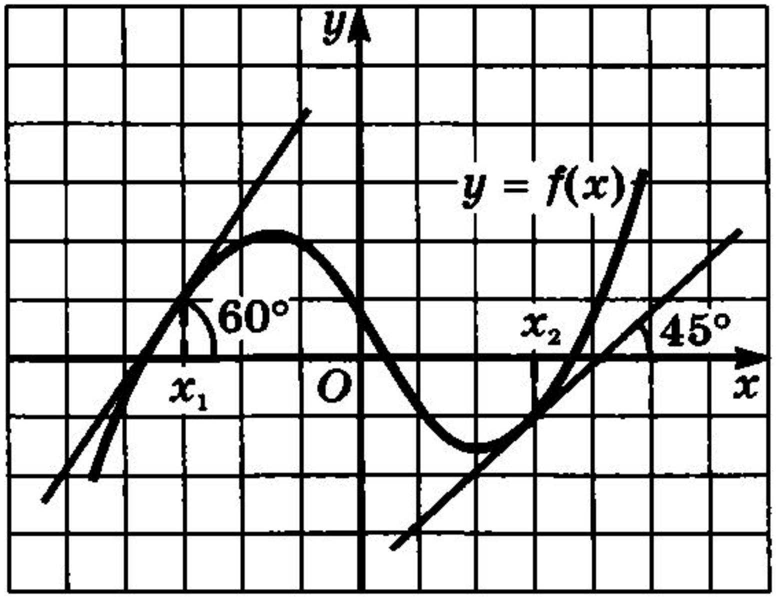
$$(\arccos x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{1}{-\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

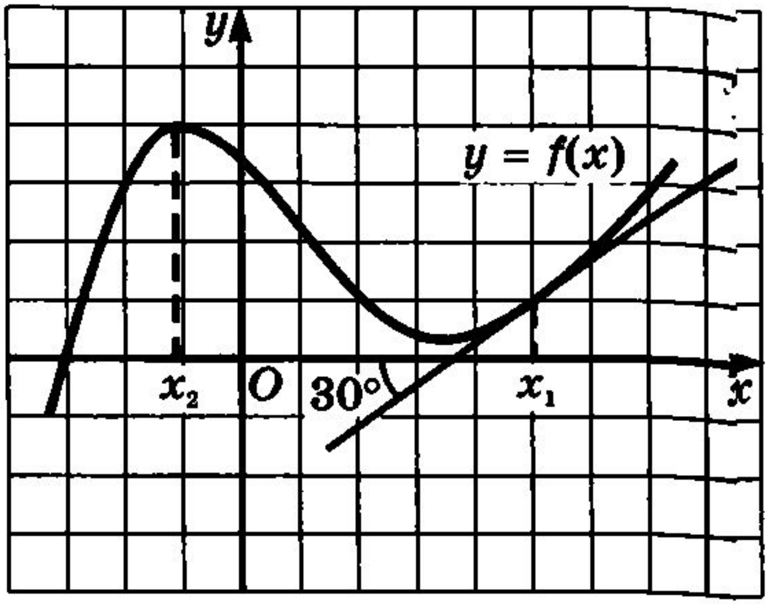
$$(\operatorname{arctg} x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

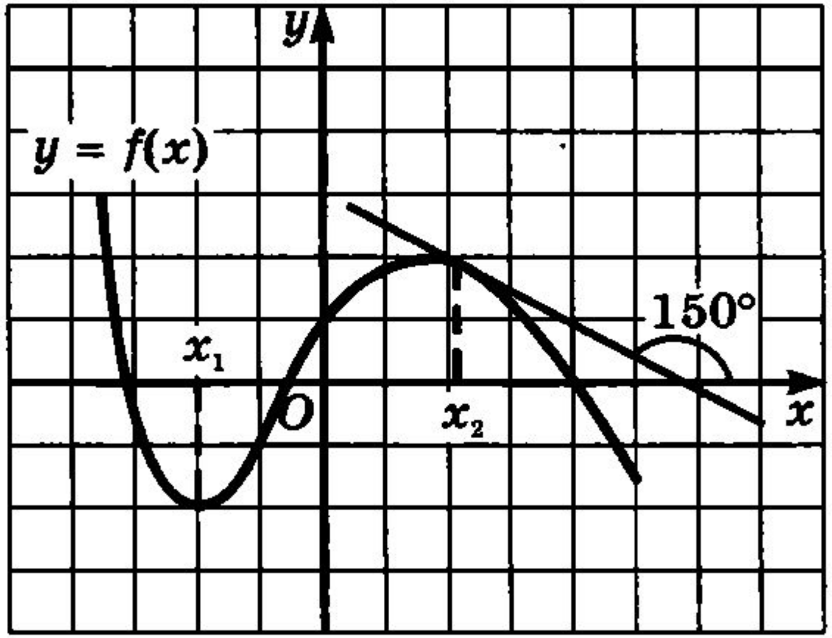
Решение задач на касательную

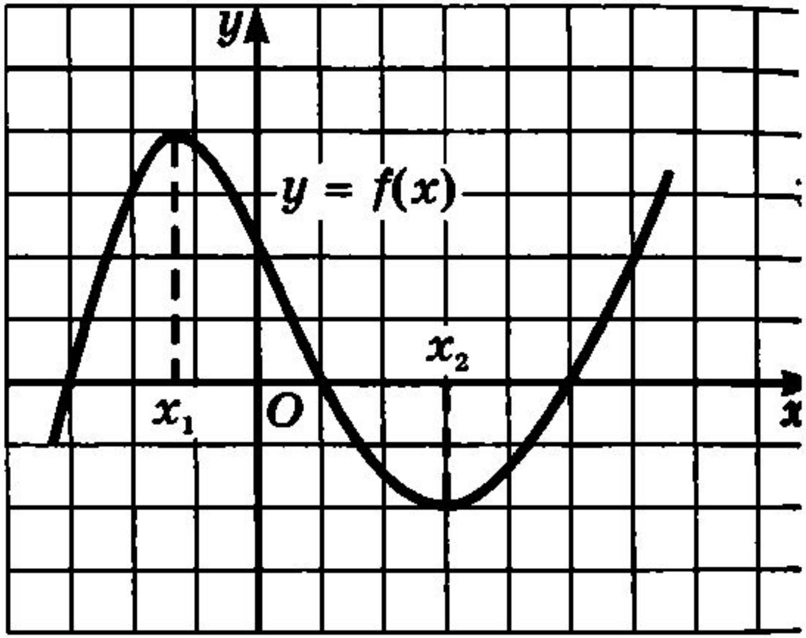
Функция $y = f(x)$ задана своим графиком. Определите зна чения $f'(x_1)$ и $f'(x_2)$, если график функции изображен:



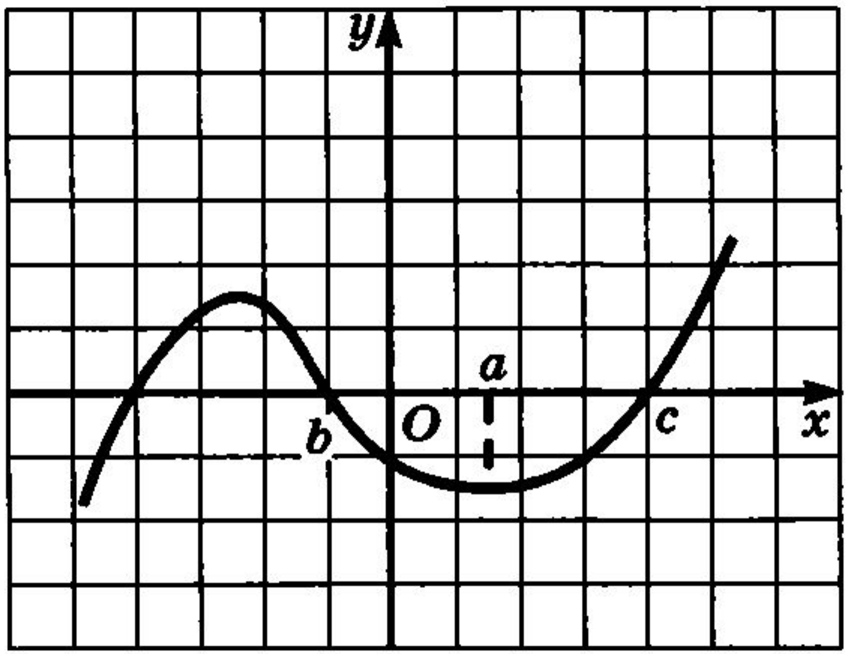


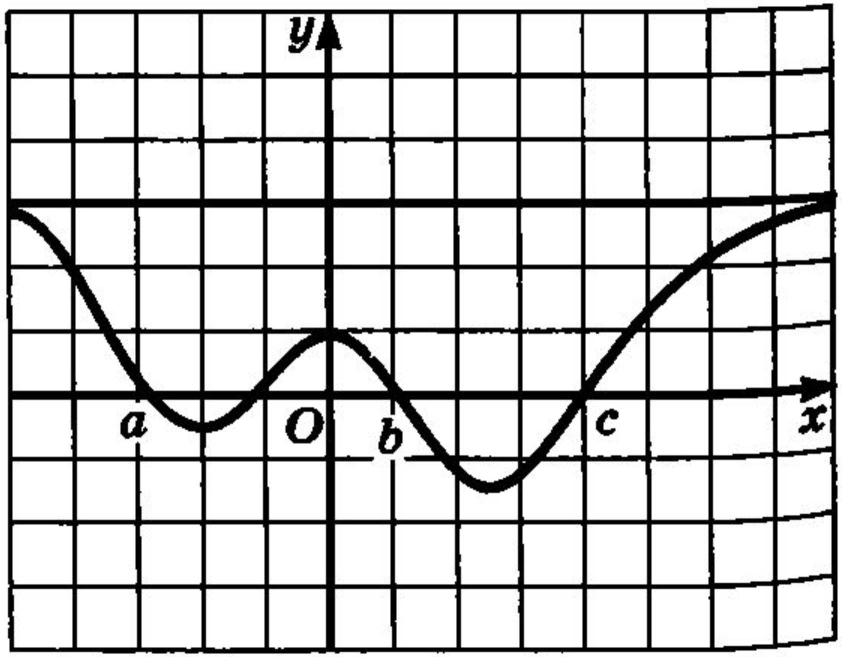
Функция $y = f(x)$ задана своим графиком. Определите зна чения $f'(x_1)$ и $f'(x_2)$, если график функции изображен:



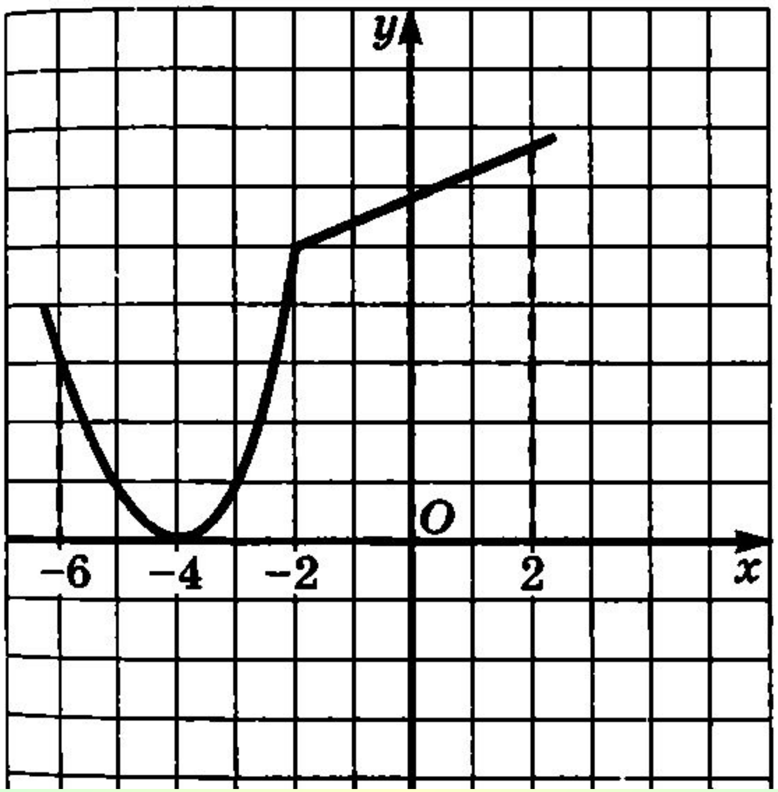


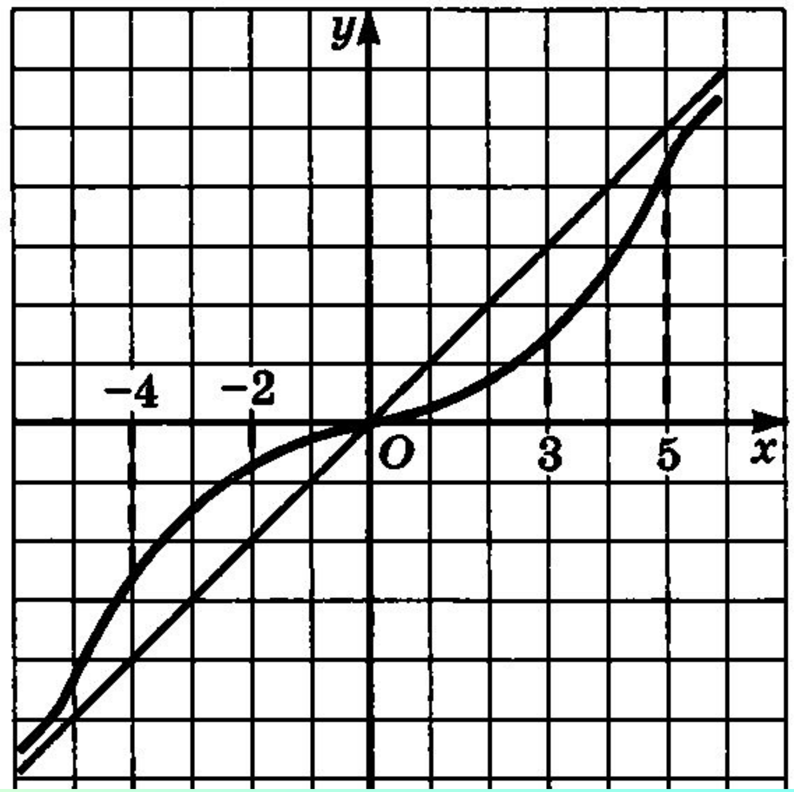
Определите знак углового коэффициента касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$, в точках с абсциссами a, b, c:



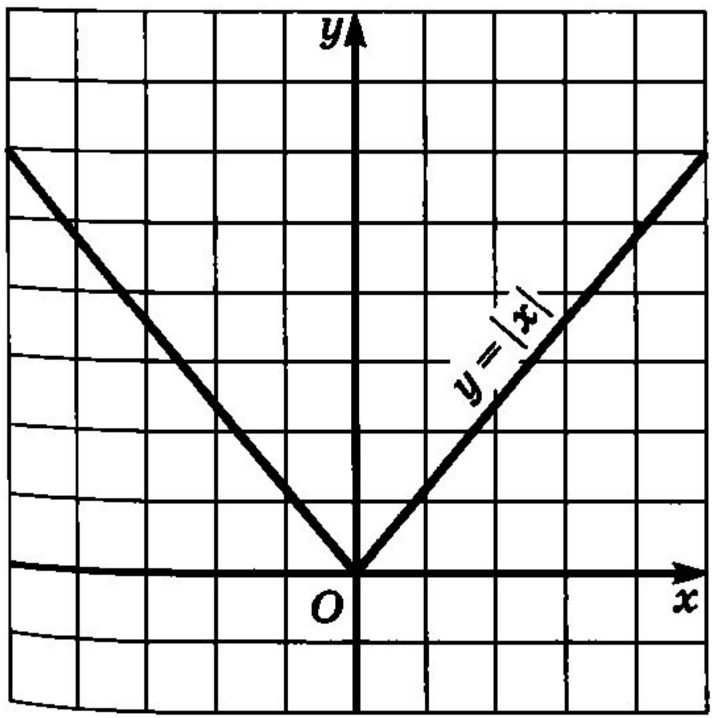


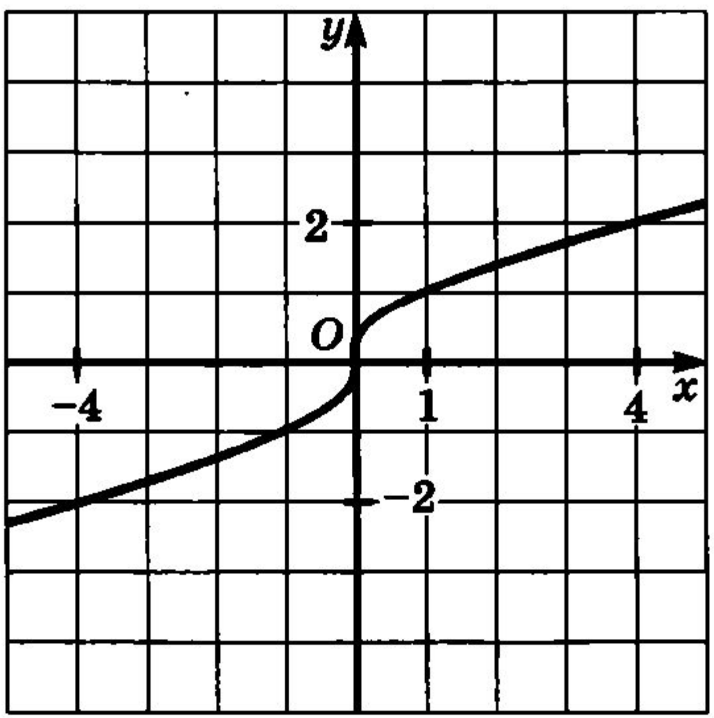
Укажите точки, в которых производная равна нулю и точки, в которых производная не существует, если график функции изображен на заданном рисунке:



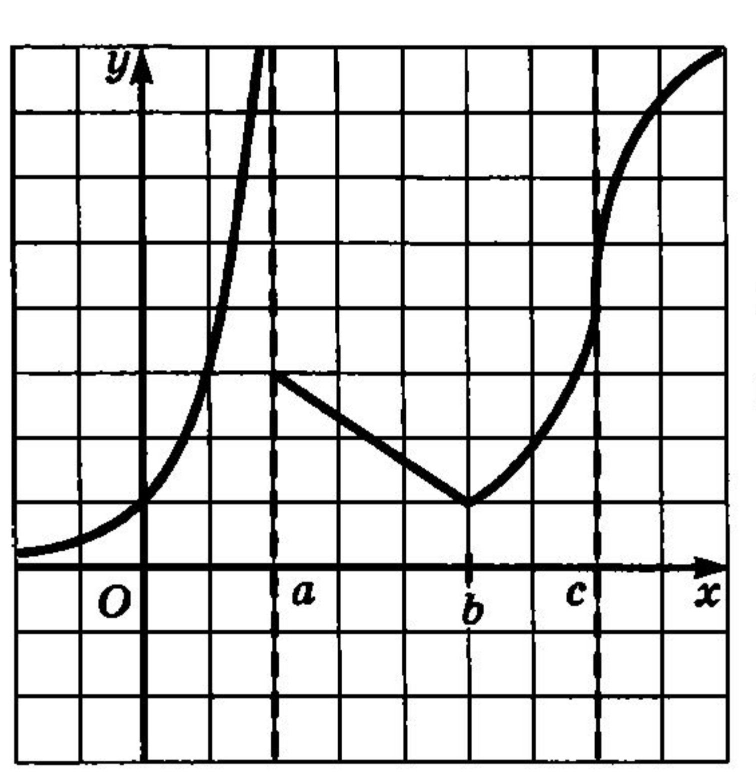


Если в некоторой точке касательная к графику функции не существует или она перпендикулярна оси абсцисс, то в этой точке функция недифференцируема.





Если в некоторой точке касательная к графику функции не существует или она перпендикулярна оси абсцисс, то в этой точке функция недифференцируема.



функция дифференцируема всюду, кроме точек $x = a$, $x = b$, $x = c$;

$x = a$ — точка разрыва функции,

в точке $x = b$ касательная не существует,

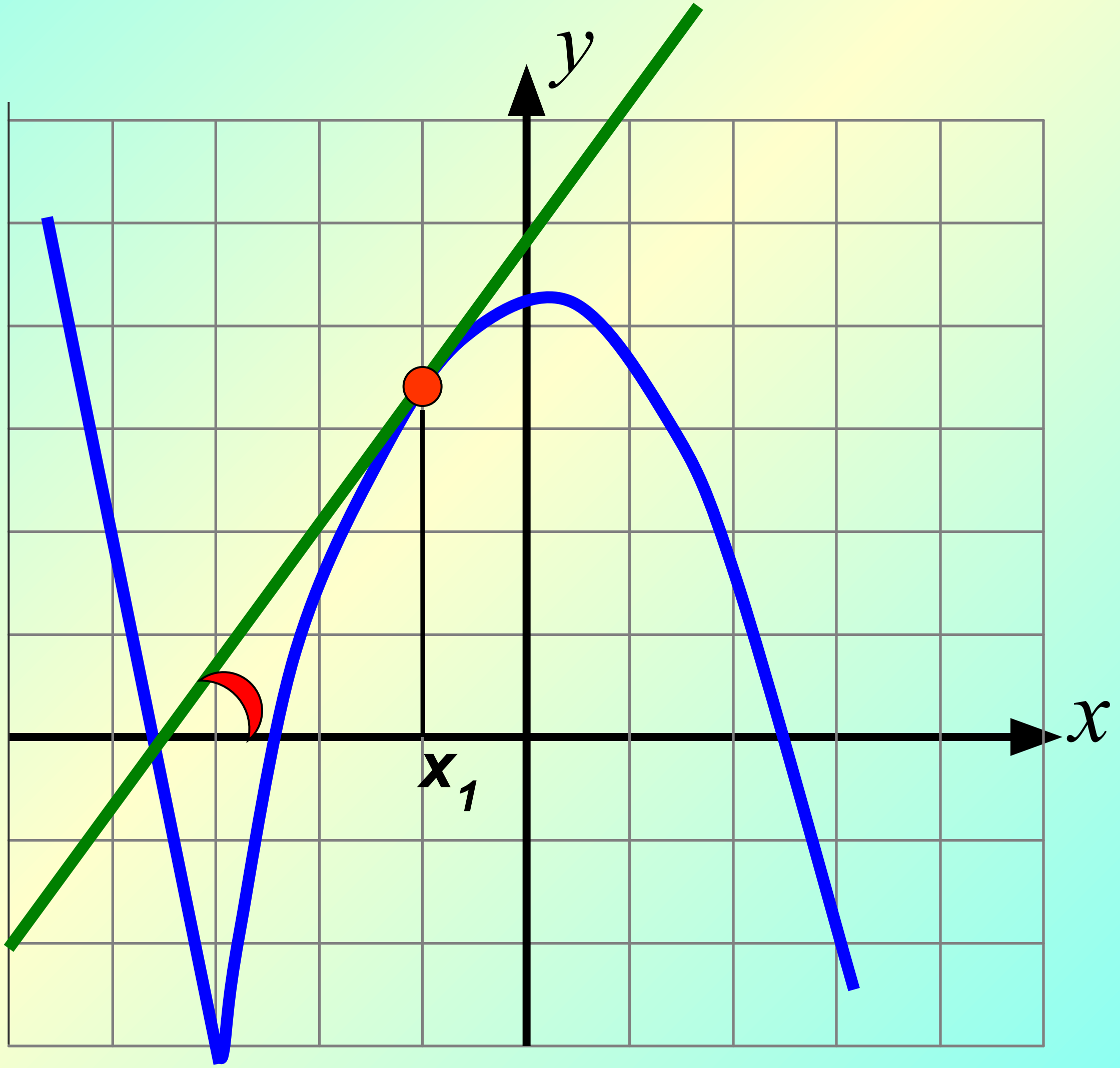
в точке $x = c$ касательная параллельна оси y.

Повторение:

Линейные уравнения	Алгебраическое условие	Геометрический вывод
$y = к_1x+b_1$ $y = к_2x+b_2$	$к_1 = к_2, b_1 \neq b_2$	**Прямые параллельны**
	$к_1 = к_2, b_1 = b_2$	**Прямые совпадают**
	$к_1 \neq к_2$	**Прямые пересекаются**
	$к_1 \cdot к_2 = -1$	**Прямые перпендикулярны**

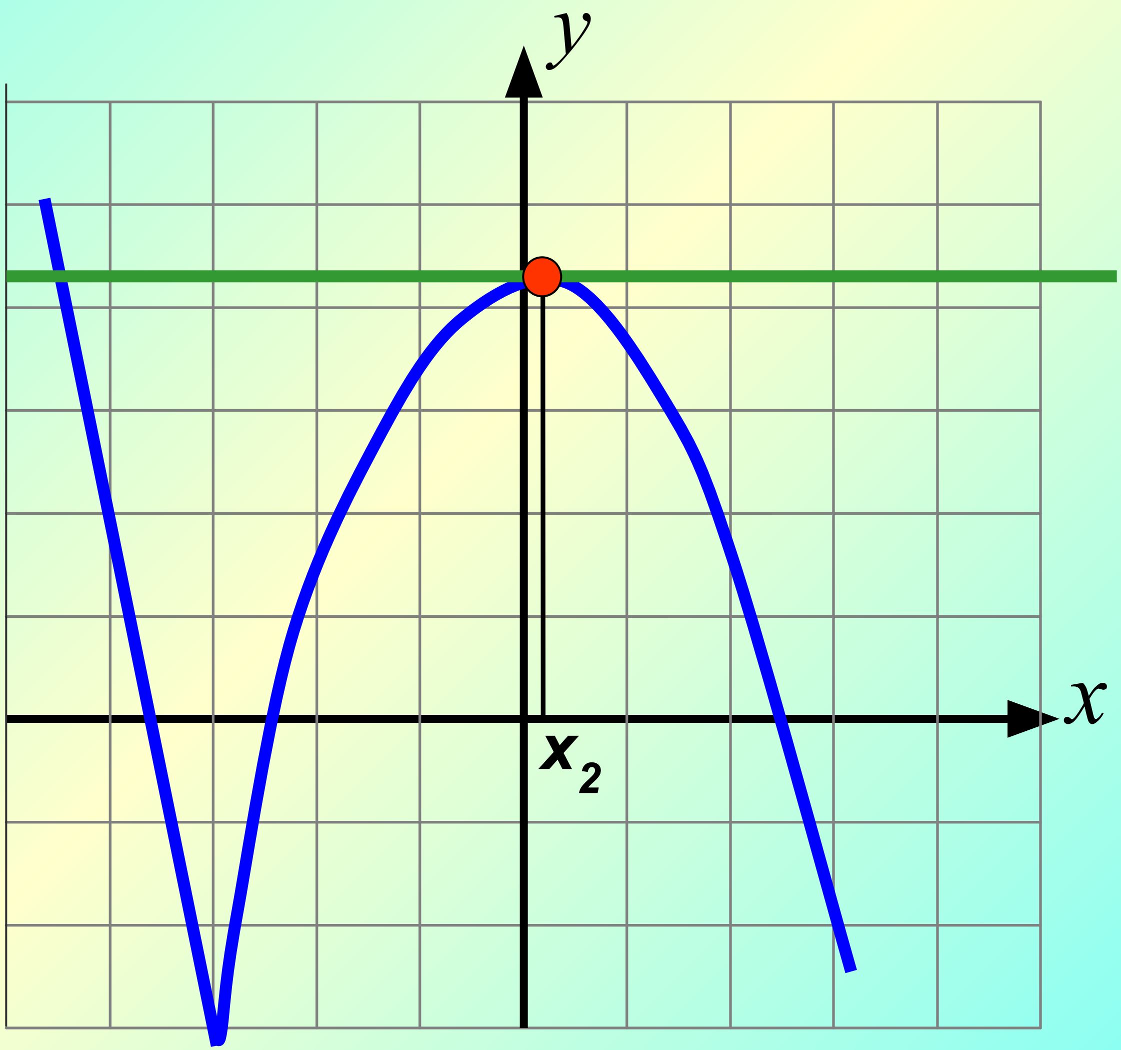
$$f'(x_0) = tg\alpha = k$$

$$\alpha < 90^o \Rightarrow k > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$$



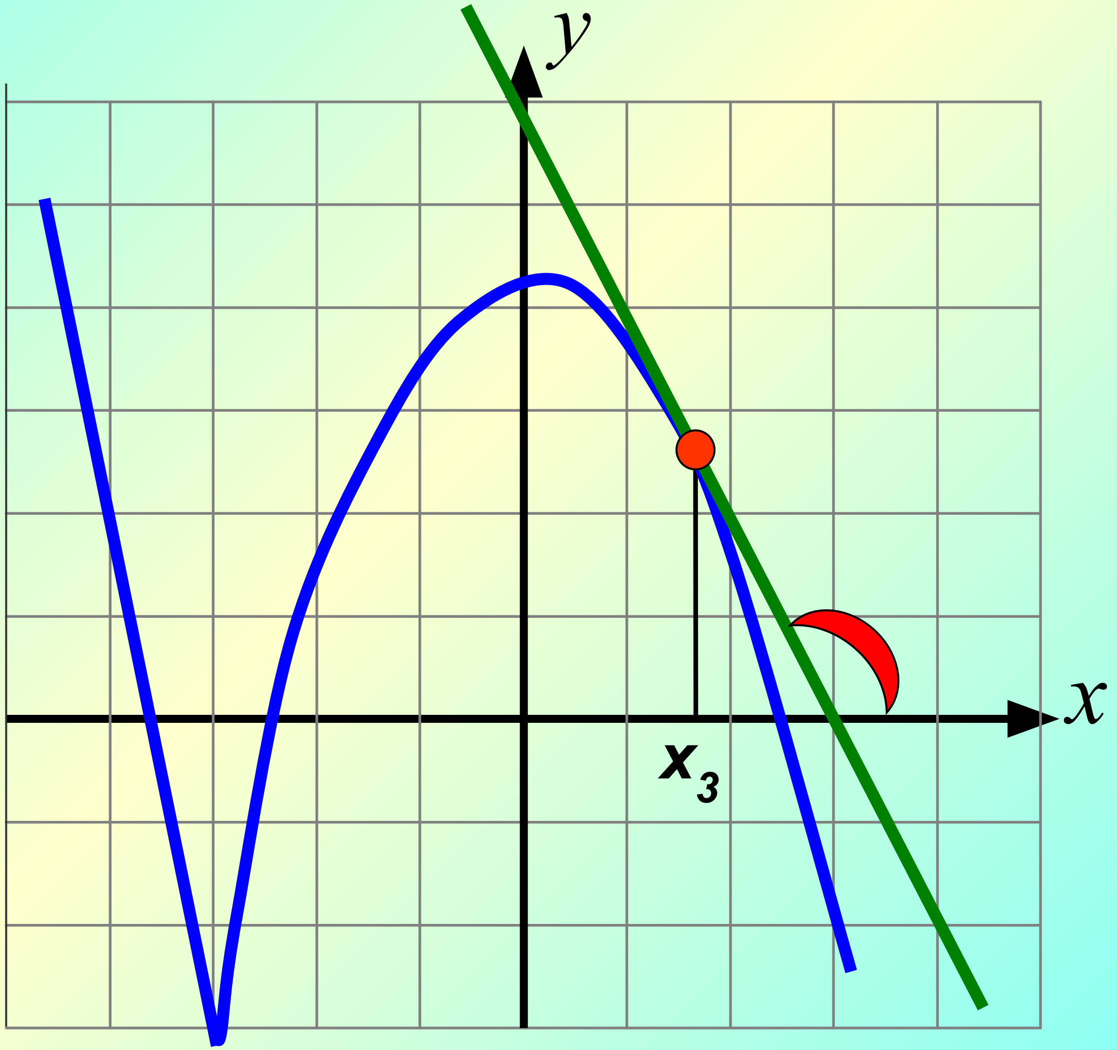
$$f'(x_0) = tg\alpha = k$$

$$\alpha = 0^o \Rightarrow k = 0, \text{ касательная параллельна } OX$$

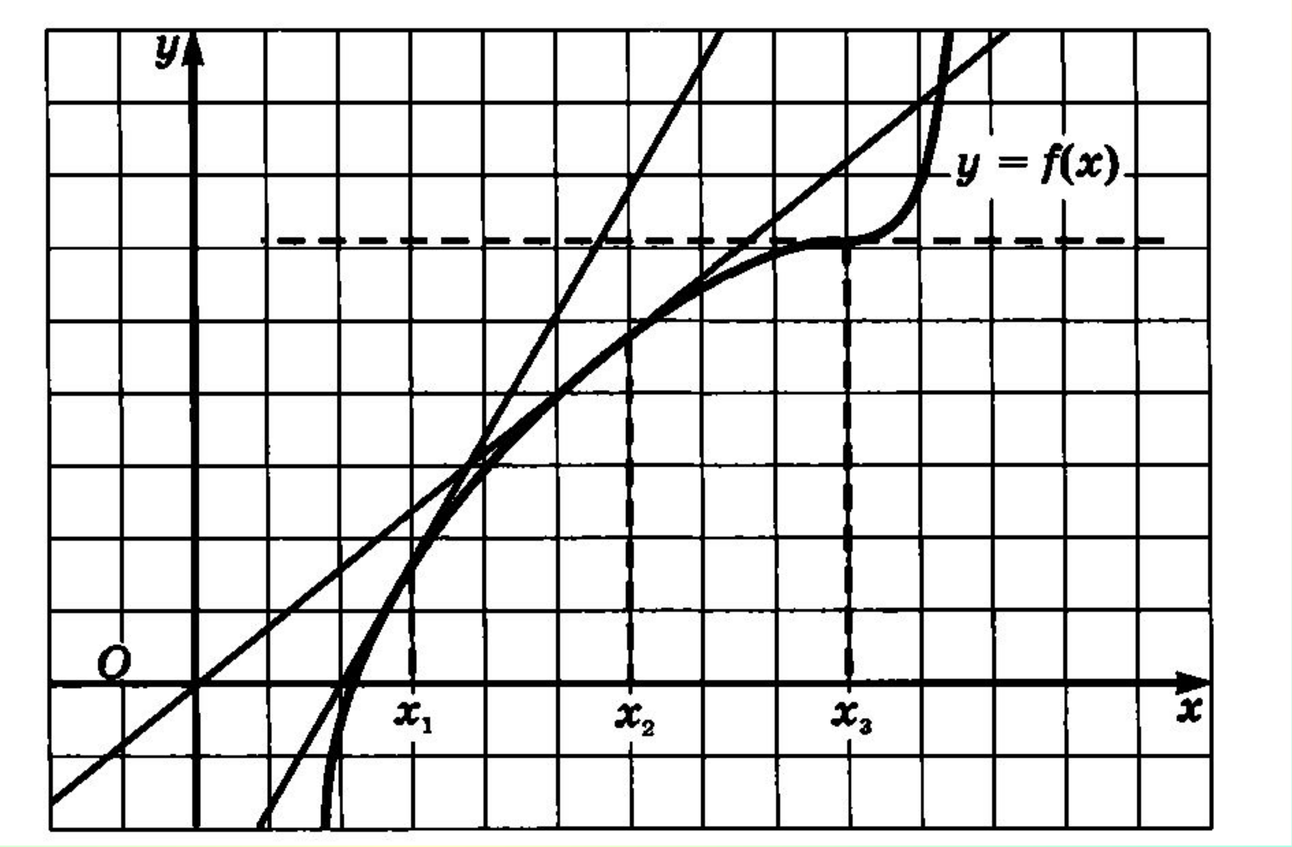


$$f'(x_0) = tg\alpha = k$$

$$\alpha > 90^o \Rightarrow k < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$$

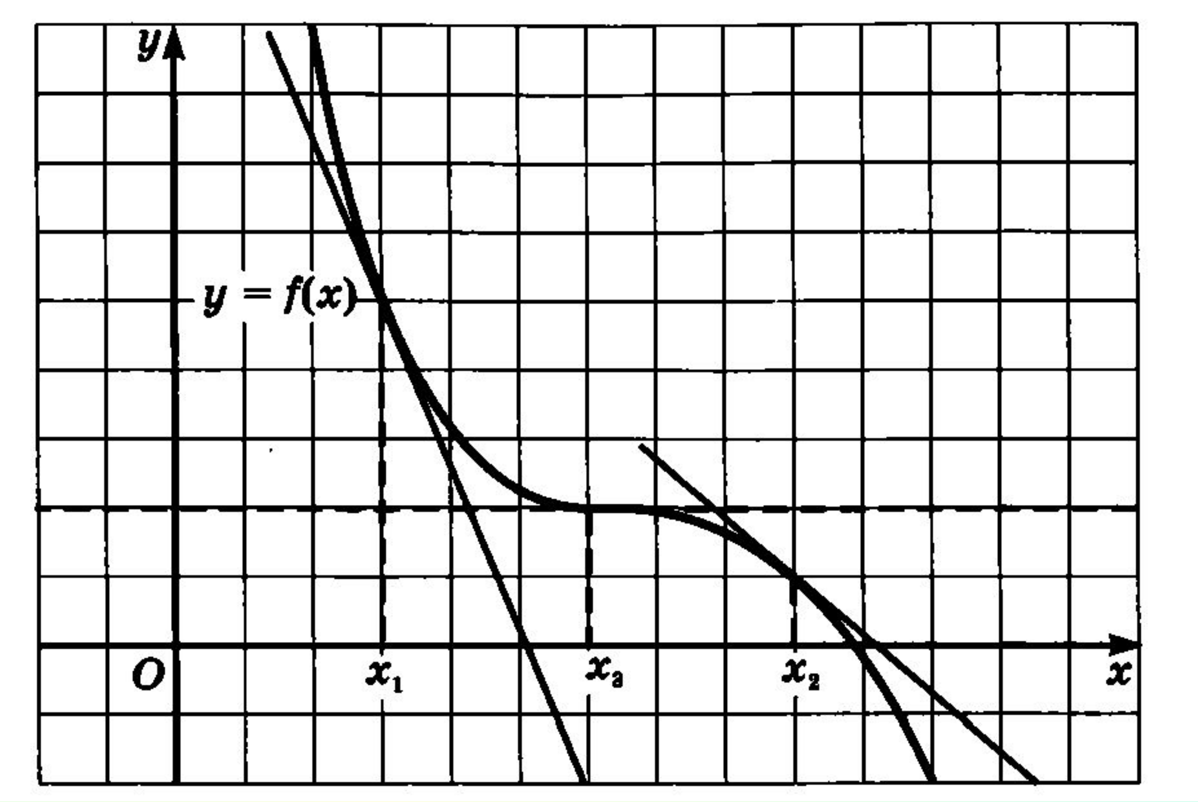


$$f'(x_0) = tg\alpha = k$$



$$f'(x) \geqslant 0.$$

$$f'(x_0) = tg\alpha = k$$



$f'(x) \leqslant 0.$

Теорема 1

Пусть $f(x)$ *дифференцируема на* $(a;b)$.

Если $f'(x) \geq 0$ *на* $(a;b)$, *то* $f(x)$ *возрастает на* $(a;b)$.

Если $f'(x) \leq 0$ *на* $(a;b)$, *то* $f(x)$ *убывает на* $(a;b)$.

Пример 1. Доказать, что функция $y = x^5 + 2x^3 - 4$ возрастает на всей числовой прямой.

Решение.

$y' = 5x^4 + 6x^2.$

$5x^4 + 6x^2 \geqslant 0,$ при всех x

причем $f'(x) = 0$ лишь в точке $x = 0.$

Значит функция $y = x^5 + 2x^3 - 4$ возрастает при всех x Ч.т.д.

Пример 2.

а) Доказать, что функция $y = 5\cos x + \sin 4x - 10x$ убывает на всей числовой прямой;

б) решить уравнение $5\cos x + \sin 4x - 10x = x^3 + 5.$

Решение.

а) $y' = -5\sin x + 4\cos 4x - 10.$

$-5\sin x \leqslant 5$

$4\cos 4x \leqslant 4.$

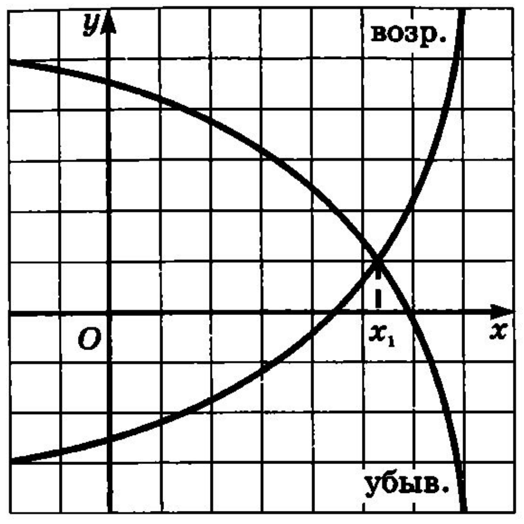
$-5\sin x + 4\cos 4x \leqslant 9.$

Значит, $-5\sin x + 4\cos 4x - 10 \leqslant -1.$

$-5\sin x + 4\cos 4x - 10 < 0$ при всех x

Значит функция убывает на всей числовой прямой Ч.т.д.

б) $5\cos x + \sin 4x - 10x = x^3 + 5.$



$f(x)$ убывает при всех x

$g(x)$ возрастает при всех x

след – но уравнение имеет не более 1 корня

$x = 0$ $\quad 5 = 5$ верно

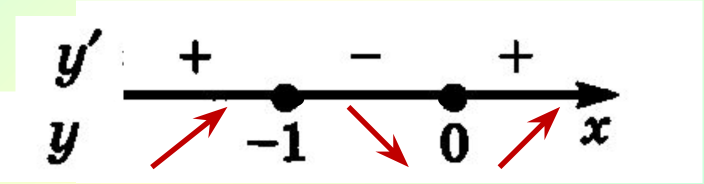
Ответ: 0

Пример 3. а) Исследовать на монотонность функцию

$$y = 2x^3 + 3x^2 - 1;$$

Решение.

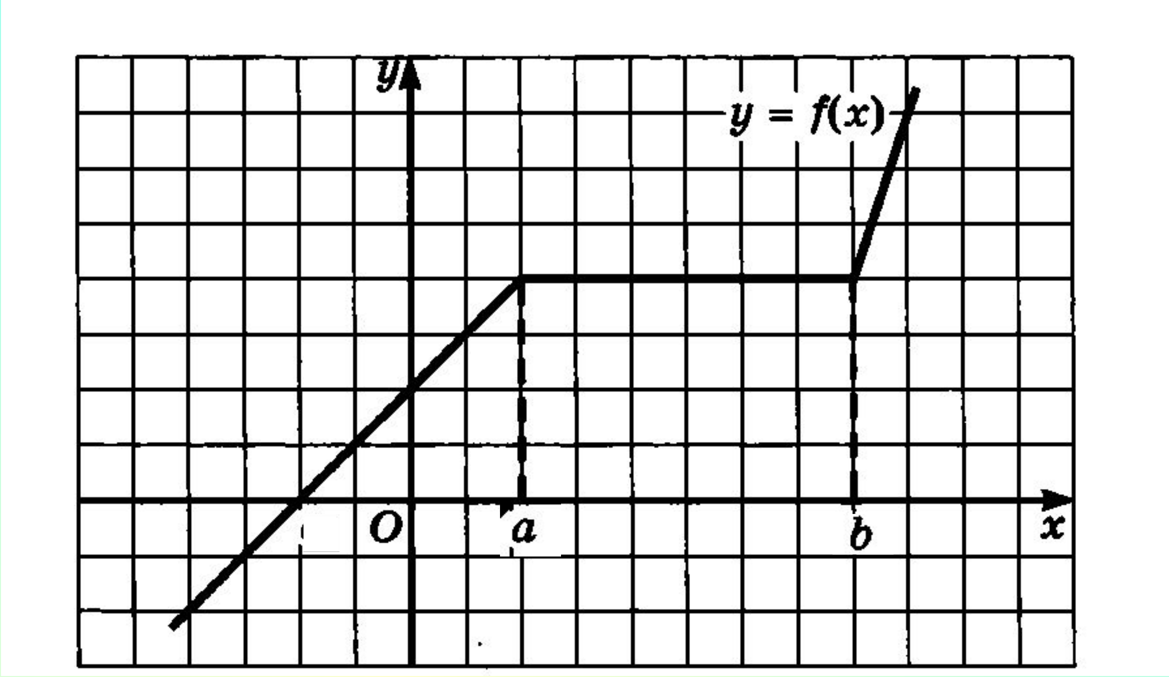
$$y' = 6x^2 + 6x = 6x(x + 1).$$



Ответ: функция возрастает на луче $(-\infty; -1]$, на луче $[0; +\infty)$, убывает на отрезке $[-1; 0]$.

Теорема 2 (условие постоянства функции)

Пусть $f(x)$ дифференцируема на $(a;b)$ и непрерывна на $[a;b]$.
Для того, чтобы непрерывная функция $f(x)$ была постоянна на $[a;b]$ необходимо и достаточно, чтобы $f'(x)=0$ на $(a;b)$.



Отыскание точек экстремума

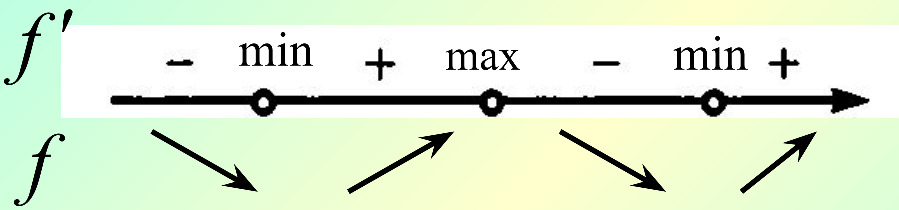
Стационарные точки –

Критические точки –

Точки экстремума –

Максимум функции –

Минимум функции –



Точкой максимума называется точка x_0

с такой окрестностью, в которой при $x < x_0 \quad f'(x) > 0,$

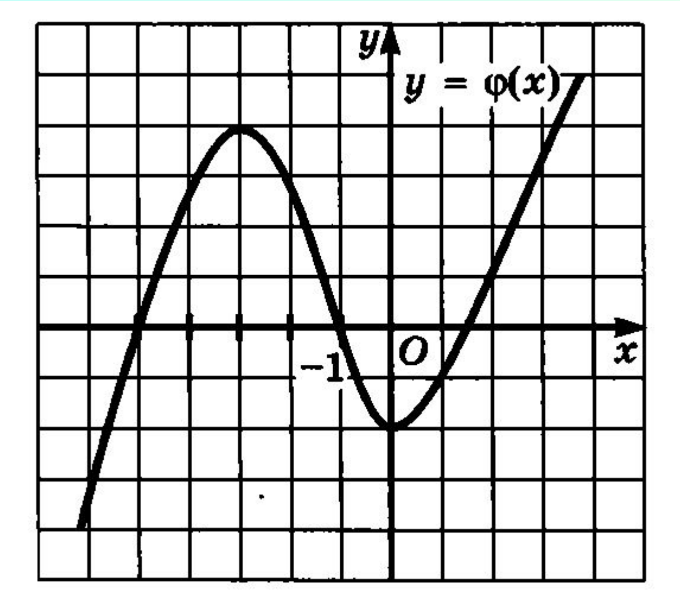
а при $x > x_0 \quad f'(x) < 0$ *(т.е.* $f'(x)$ *меняет знак с* $+$ *на* $-$*).*

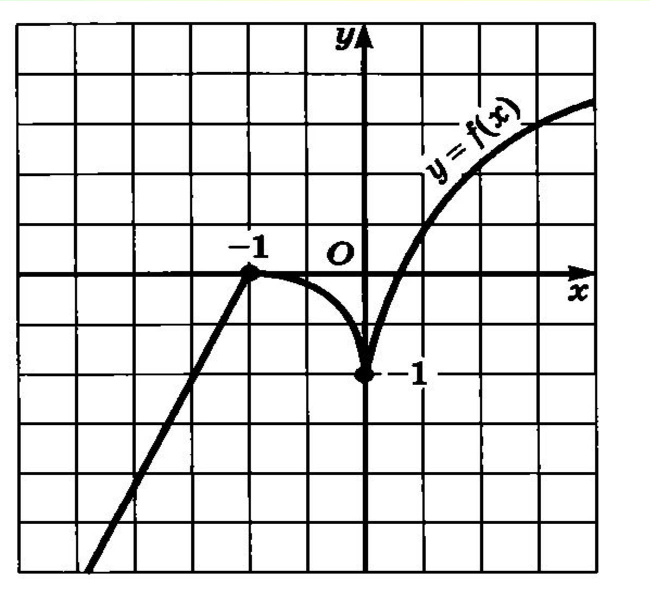
Точкой минимума называется точка x_0

с такой окрестностью, в которой при $x < x_0 \quad f'(x) > 0,$

а при $x < x_0 \quad f'(x) < 0,$ *а при* $x > x_0 \quad f'(x) > 0.$

Теорема 3. *Если функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке $x = x_0$, то в этой точке производная функции либо равна нулю, либо не существует.*





$x_{max} = -3 \quad y_{max} = 4$

$x_{min} = 0 \quad y_{min} = -2$

$f'(-3) = 0 \quad f'(0) = 0$

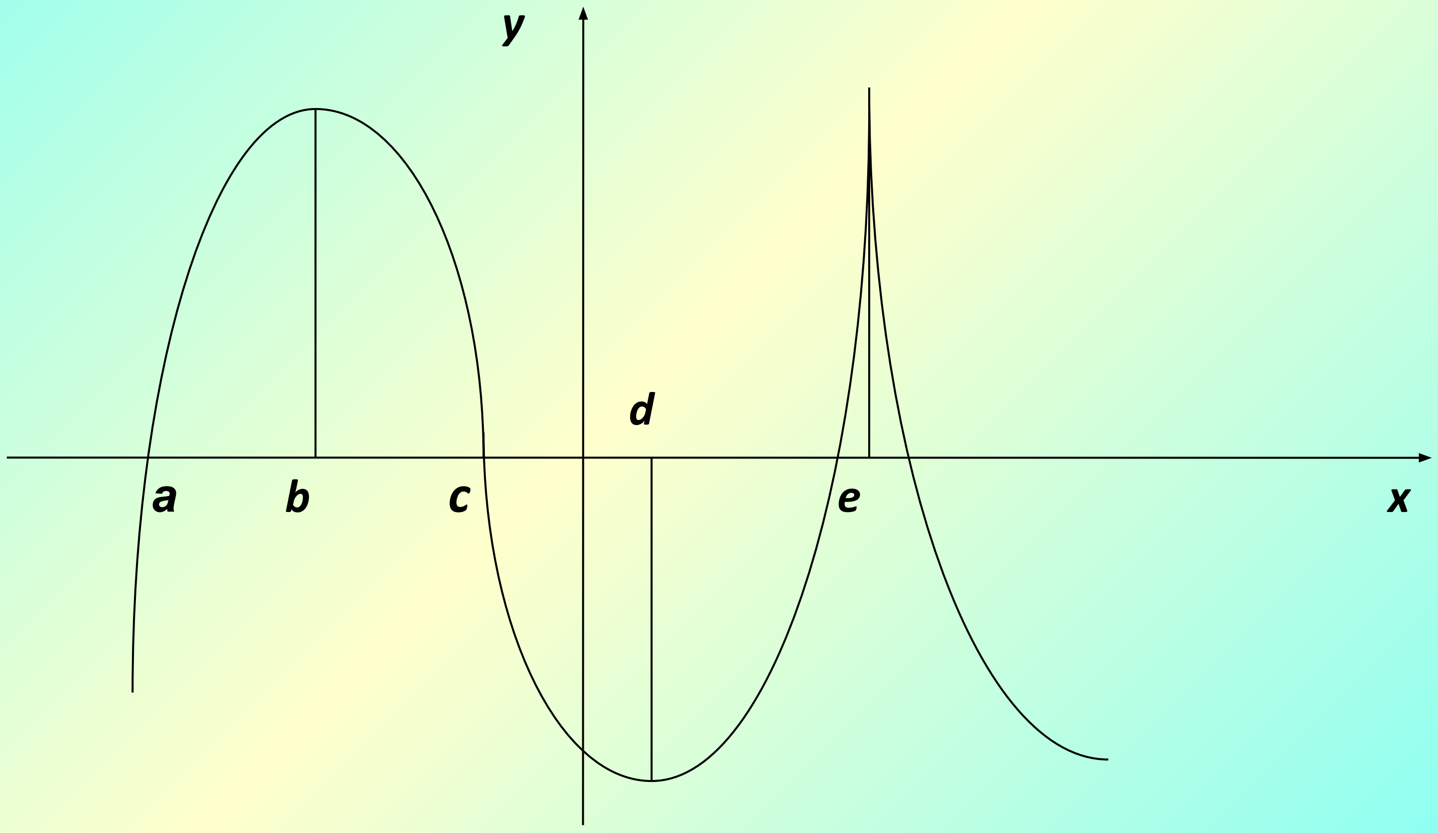
$x_{max} = -1 \quad y_{max} = 0$

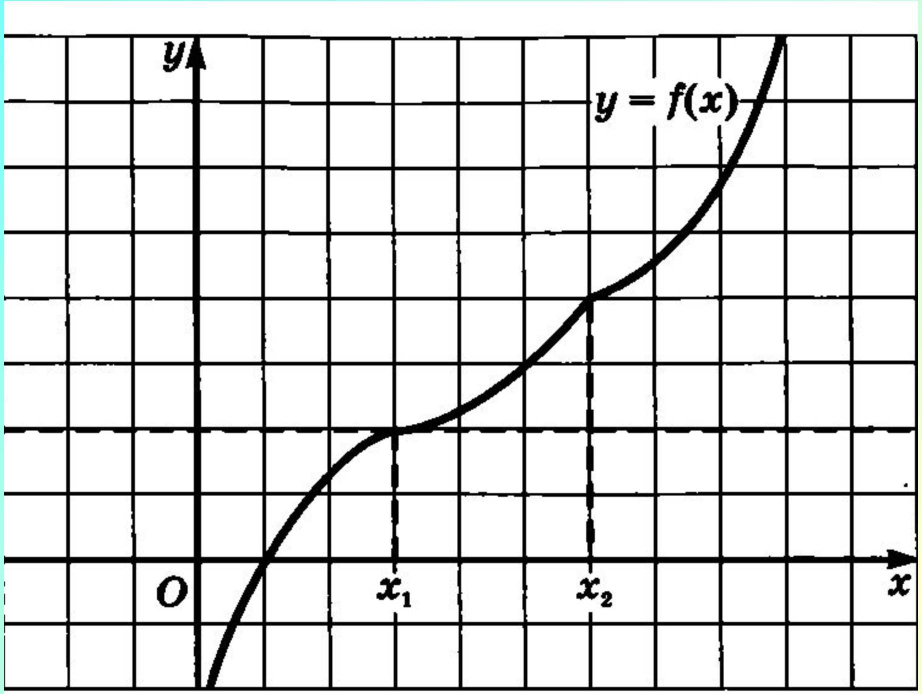
$x_{min} = 0 \quad y_{min} = -1$

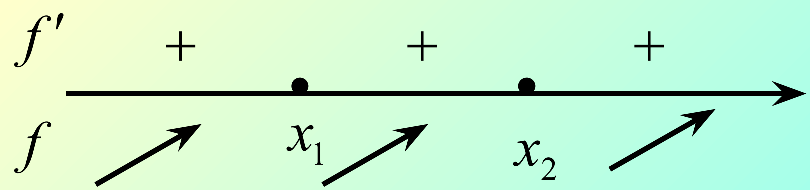
$f'(-1)$ – *не сущ.* $\quad f'(0)$ – *не сущ.*

Устная работа

Задача. По графику функции $y=f(x)$, изображенному на рисунке, определить критические и стационарные точки.







x_1 – *точка перегиба*

x_2 – *точка излома графика*

Теорема 4 (необходимое и достаточное условия экстремума)

Для того, чтобы точка x_0 *была точкой экстремума* $f(x)$:

1) *необходимо, чтобы* x_0 *была стационарной или критической*;

2) *достаточно, чтобы при переходе через* x_0 $f'(x)$ *меняла знак*.

Замечание

Если в точке x_0, *где* $f'(x_0)=0$ *не происходит смены знака*,

то точка x_0 *называется точкой перегиба*.

Алгоритм отыскания точек экстремума

1) *найти* $f'(x_0)$;

2) *найти стационарные и критические точки*;

3) *определить знаки* $f'(x)$ *на интервалах*;

4) *определить промежутки монотонности функции*;

5) *определить точки экстремума, перегиба*.

Пример 5. а) Найти точки экстремума функции

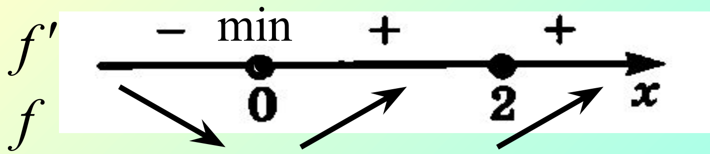
$$y = 3x^4 - 16x^3 + 24x^2 - 11;$$

Решение. а) Найдем производную данной функции:

$$y' = 12x^3 - 48x^2 + 48x;$$
$$y' = 12x(x^2 - 4x + 4);$$
$$y' = 12x(x - 2)^2.$$

$$12x(x-2)^2 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$$



$x_{min} = 0, x = 2 -$ *точка перегиба*
(*не является экстремумом*)

Ответ: $x_{min} = 0$

Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке

1) *найти* $f'(x_0)$;

2) *найти стационарные и критические точки, лежащие внутри отрезка;*

3) *вычислить значения* $f(x)$ *на концах отрезка и в точках п.2);*

4) *выбрать среди этих значений* $y_{наиб}$ *или* $y_{наим}$.

Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = x^3 - 3x^2 - 45x + 1$: **а) на отрезке** $[-4; 6]$;

1) $y' = 3x^2 - 6x - 45.$

$$3x^2 - 6x - 45 = 0;$$
$$x^2 - 2x - 15 = 0;$$
$$x_1 = -3, \quad x_2 = 5.$$

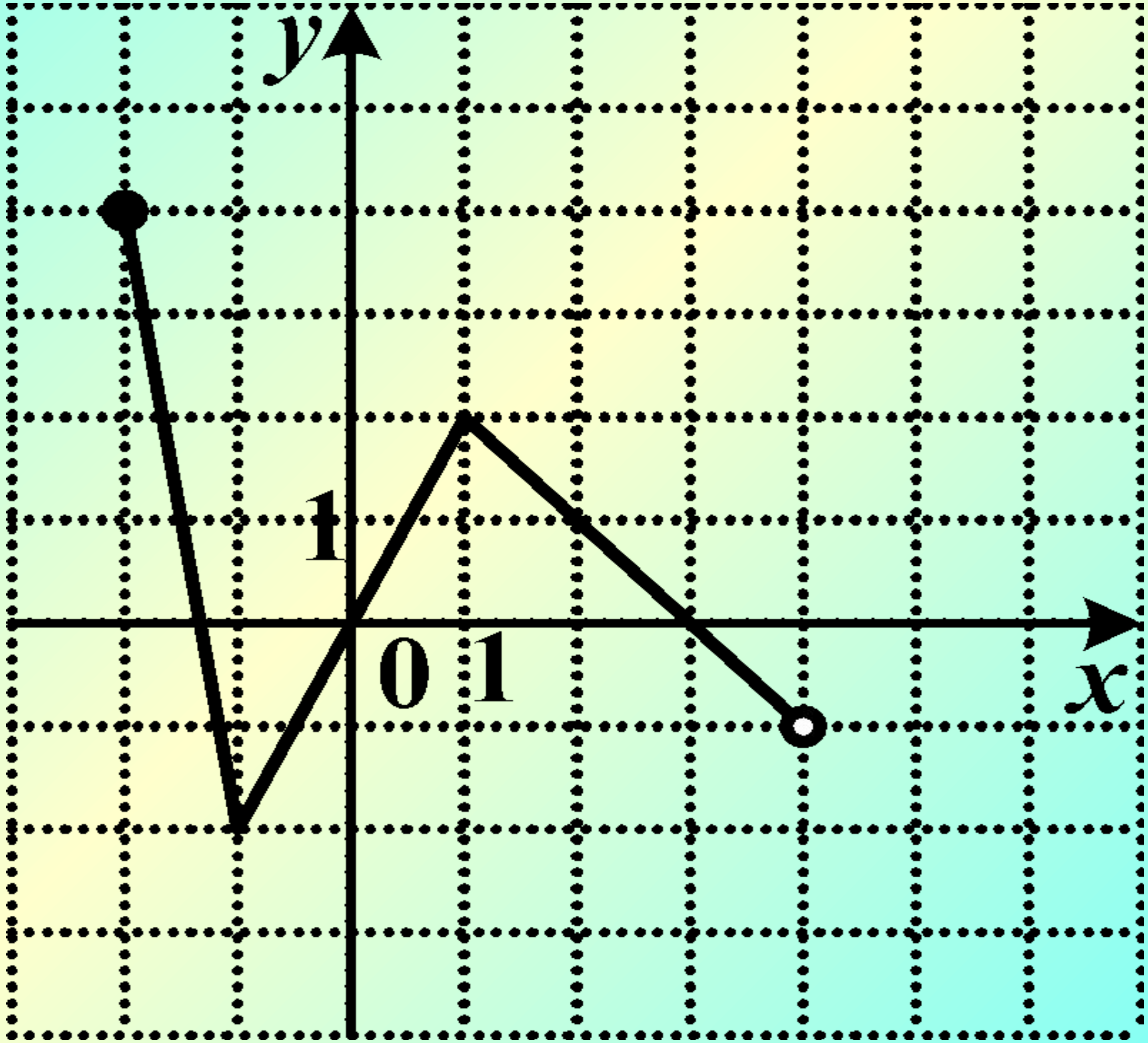
2)

x	-4	-3	5	6
y	69	82	-174	-161

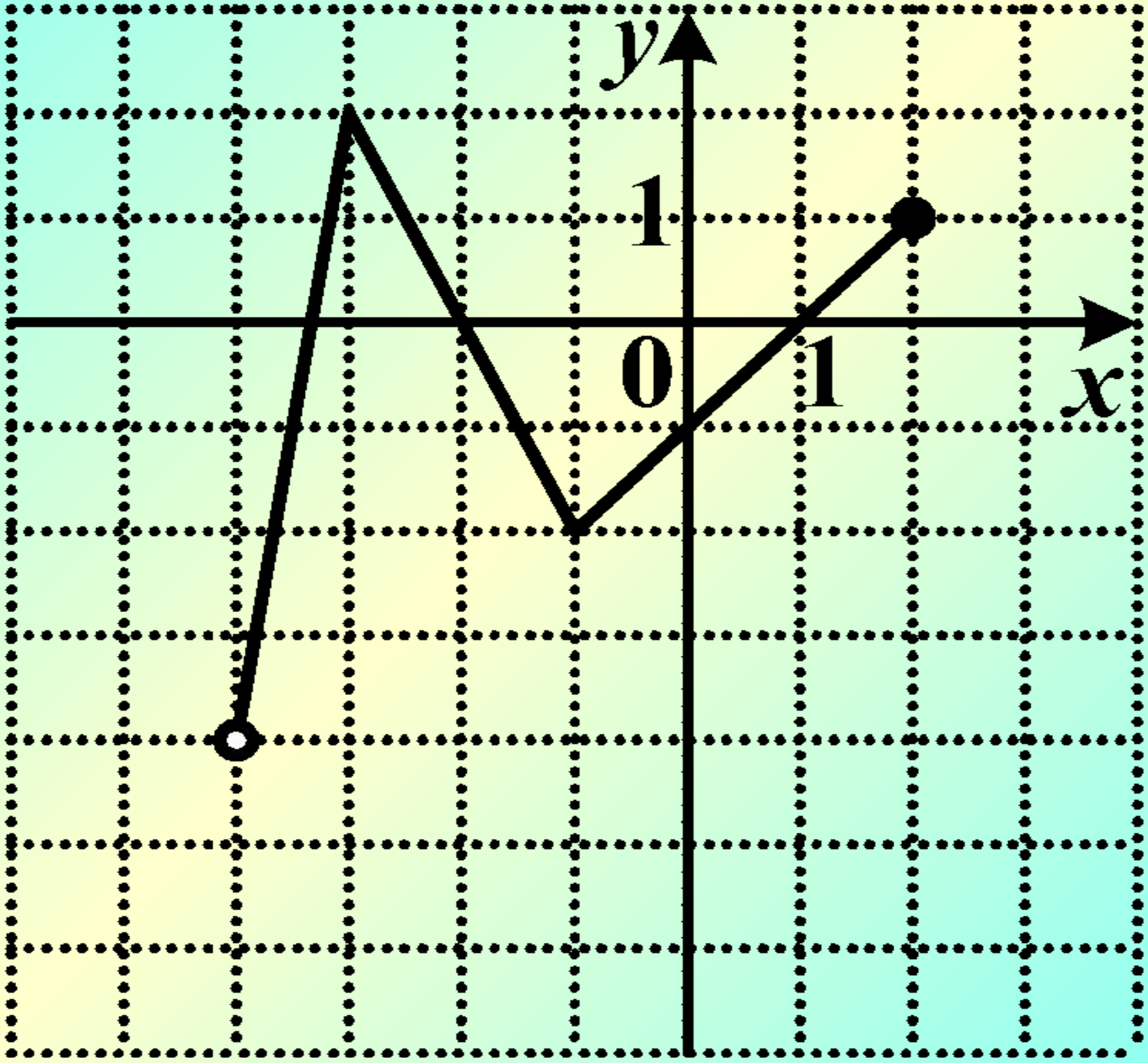
$y_{наим} = -174$ $\quad$ $y_{наиб} = 82$

Ответ: $y_{наим} = -174$ $\quad$ $y_{наиб} = 82$

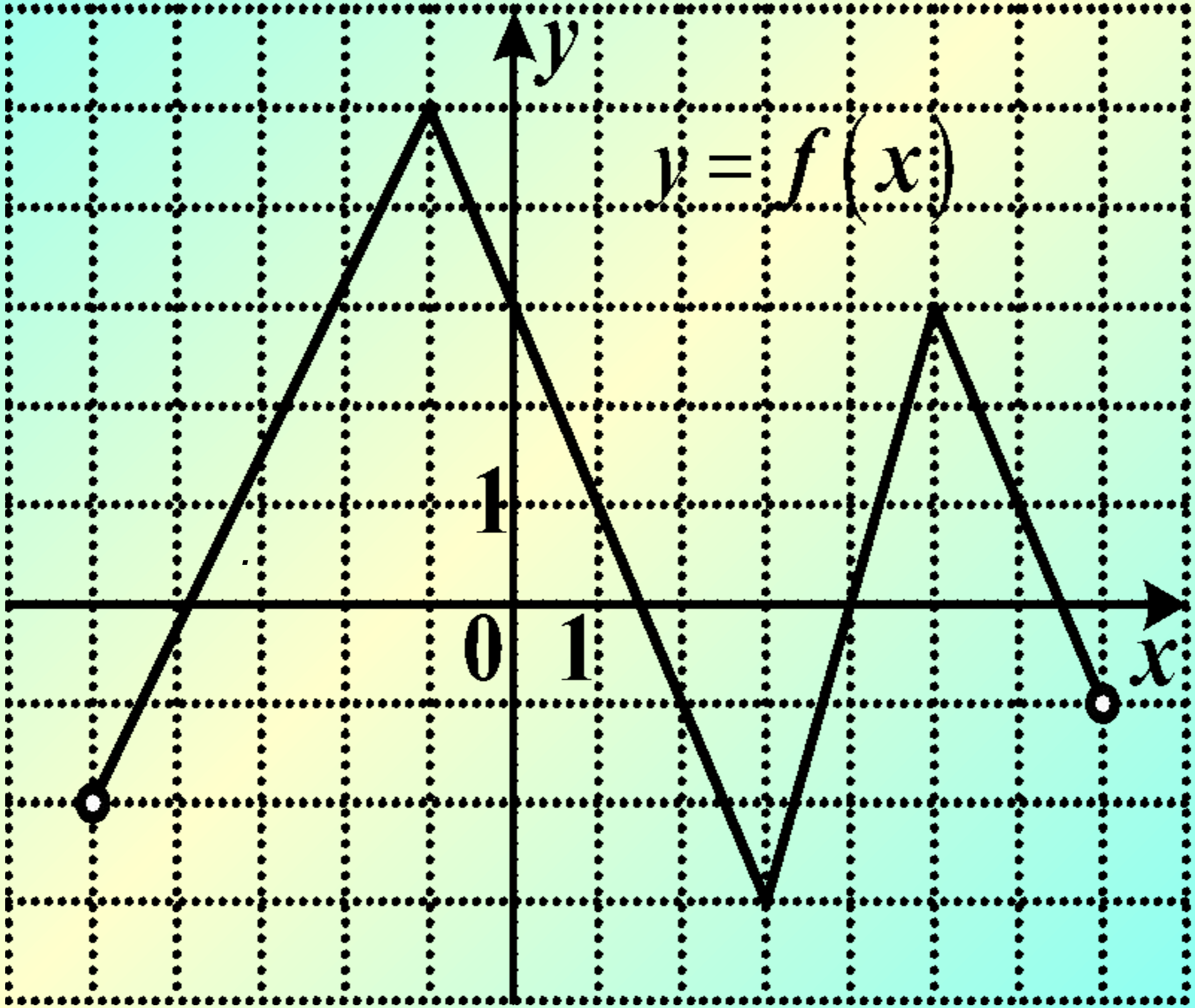
Укажите наиб. и наим. значение функции.



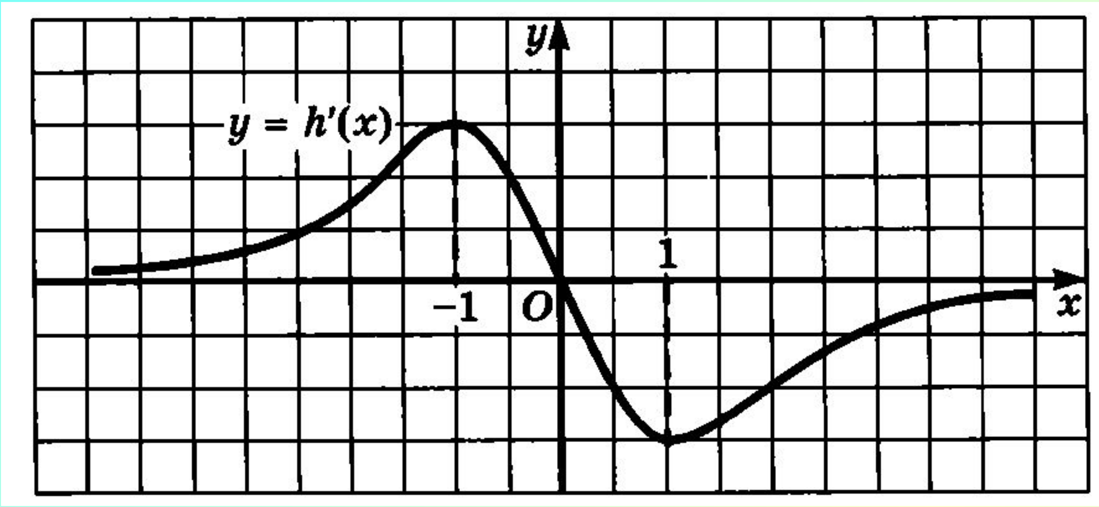
Укажите наиб. и наим. значение функции.

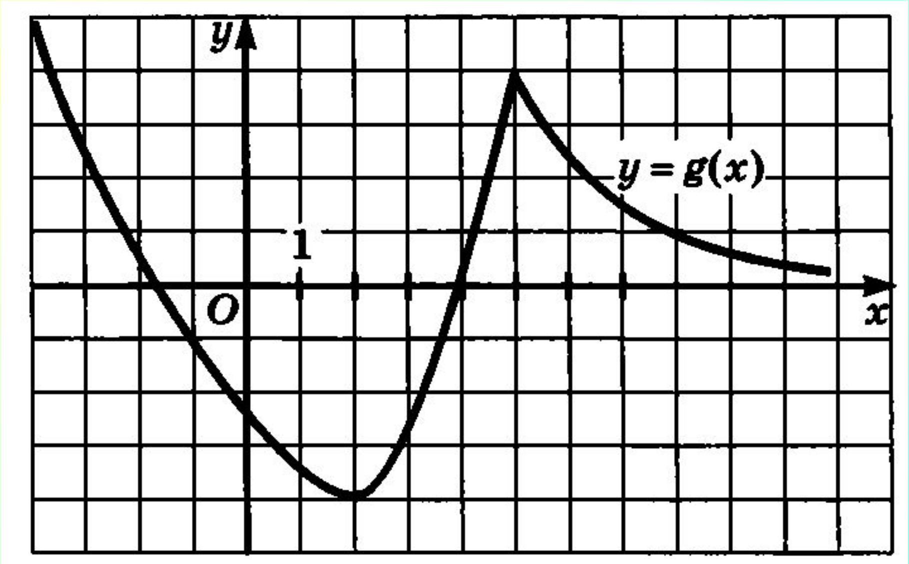


Укажите наиб. и наим. значение функции.



Укажите наиб. и наим. значение функции.





Укажите наиб. и наим. значение функции.

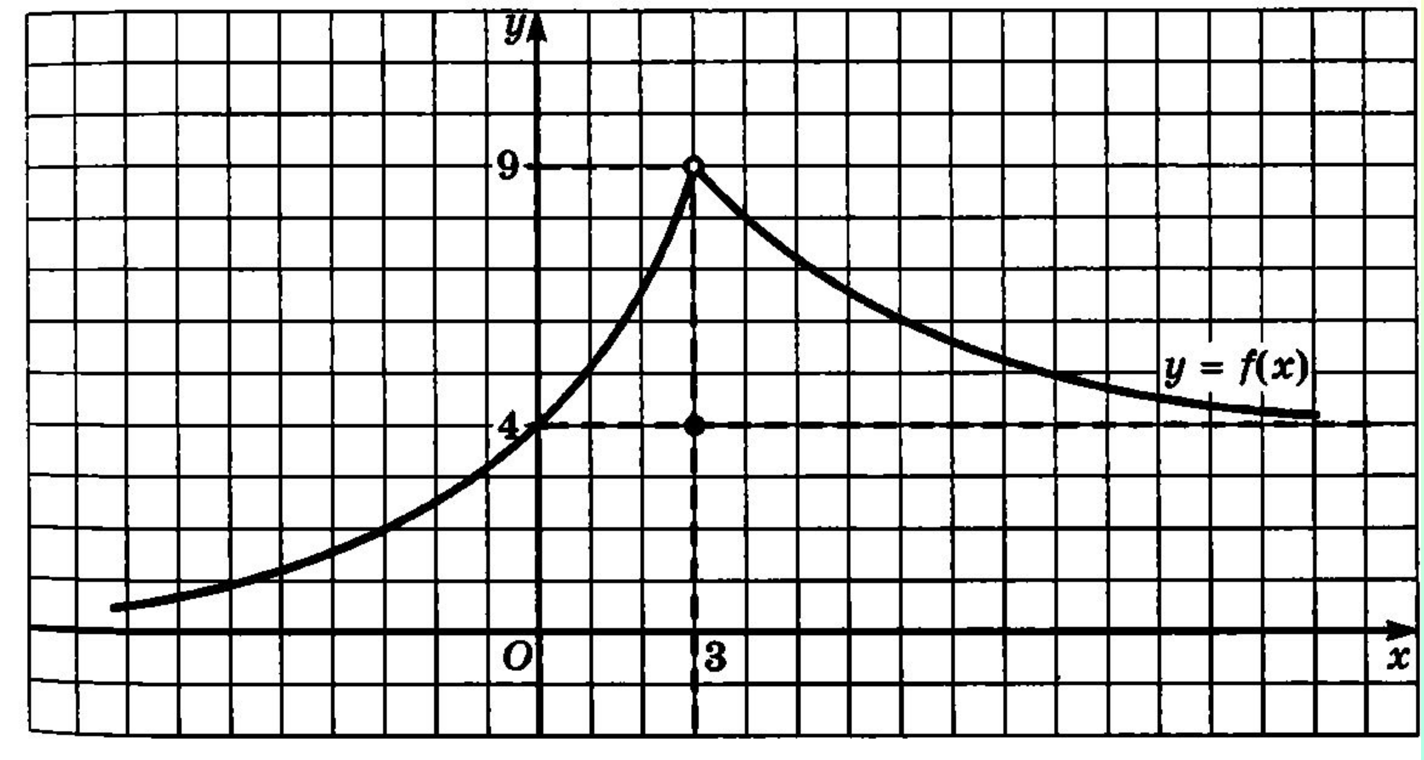
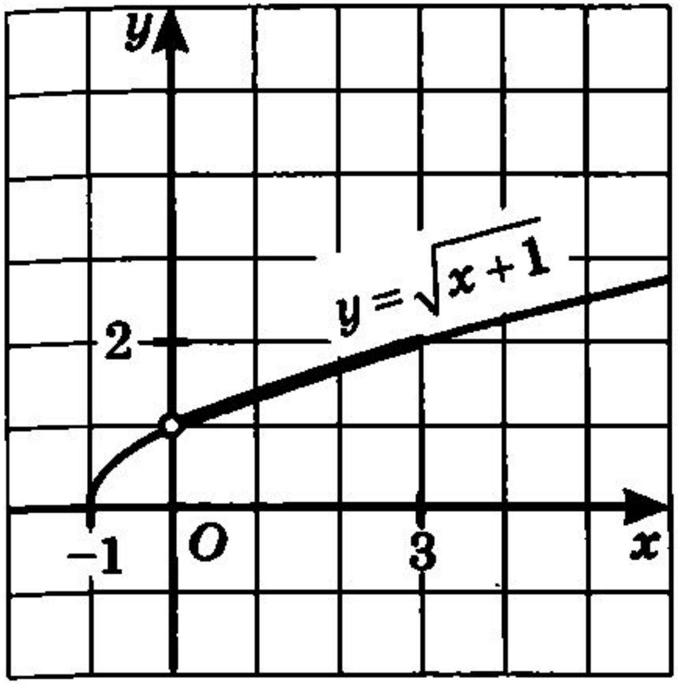
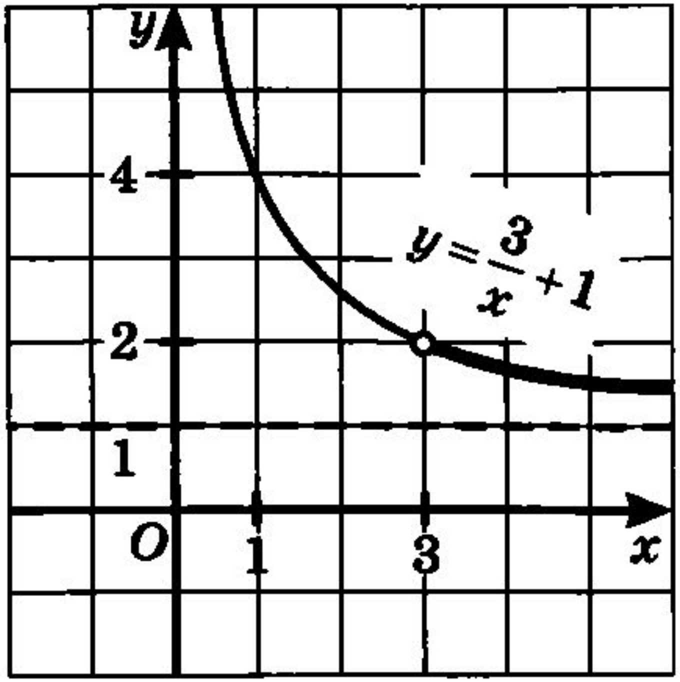


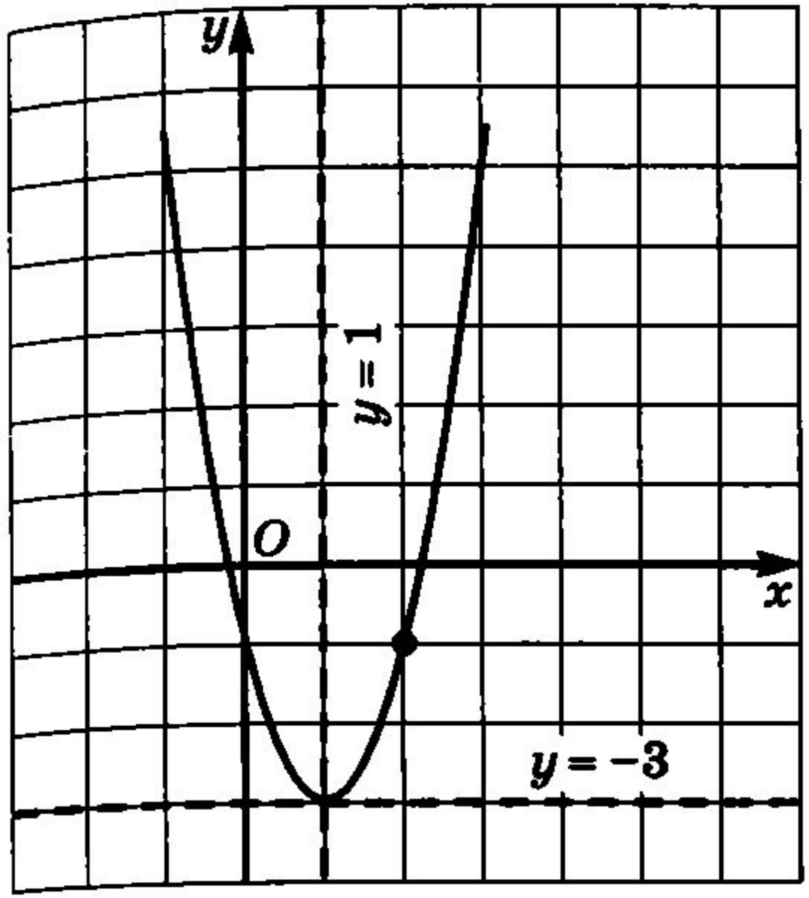
Рис. 82

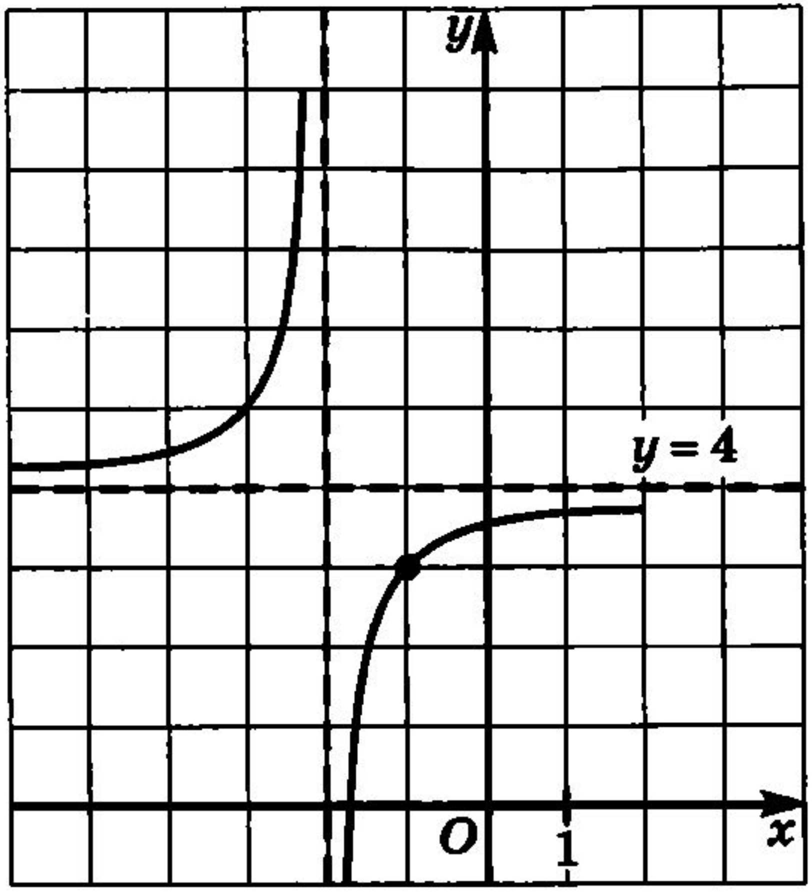
Укажите наиб. и наим. значение функции.





Укажите наиб. и наим. значение функции.





За урок!