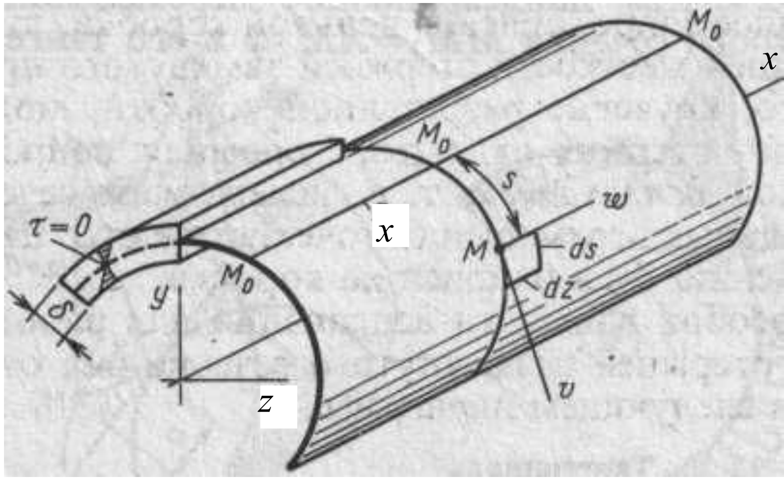
КРУЧЕНИЕ ТОНКОСТЕННЫХ ПРОФИЛЕЙ

Доцент кафедры самолетостроения
к.т.н. Мухин Д.В.

1. Депланация незамкнутого тонкостенного сечения

Рассмотрим тонкостенный стержень открытого профиля с произвольной формой сечения. При свободном кручении касательные напряжения изменяются по толщине стенки δ по линейному закону так, что в точках срединной поверхности $\tau=0$. Поэтому депланация средней линии каждого поперечного сечения при свободном кручении возникает *без деформаций в срединной поверхности стержня.*

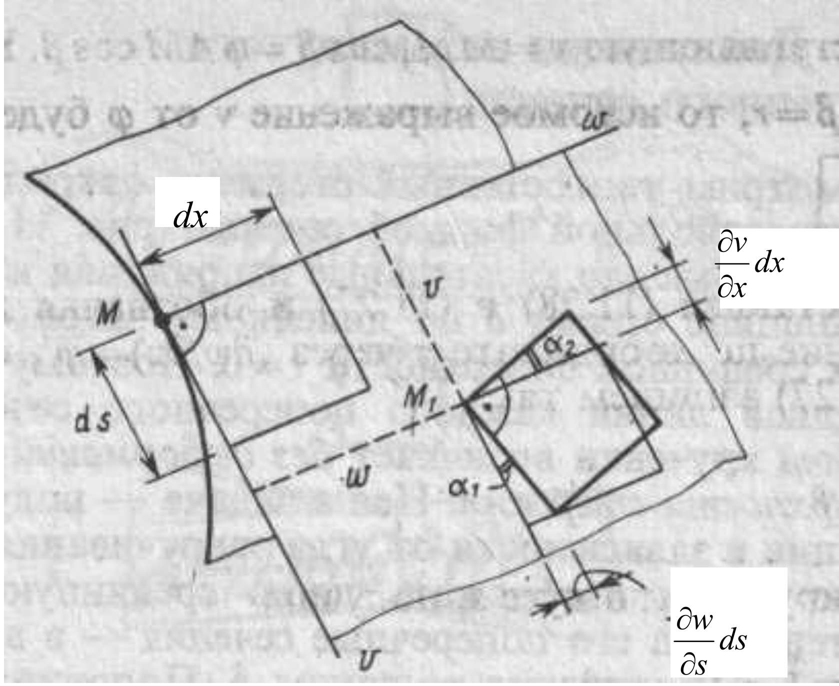


Наша задача — получить эти депланации в зависимости от угла закручивания $\varphi(x)$.

Далее будем изображать лишь срединную поверхность стержня, а его поперечные сечения — в виде средних линий, без указания толщины δ. Положение произвольной точки $M(x,s)$ в срединной поверхности зададим двумя координатами x и s, причем дуга s отсчитывается от некоторой начальной точки M_0, подлежащей далее определению.

В точке M проведем плоскость, касательную к срединной поверхности, и обозначим перемещения точки в этой плоскости w и v, где v — перемещение в тангенциальном к контуру сечения направлении.

На рис. показано, что в результате поворота сечения и его депланации точка *M* переместилась в положение M_1 вместе с элементом срединной поверхности dxxds. Получим связь между перемещениями w и v, для чего напишем условие отсутствия угла сдвига элемента срединной поверхности, выделенного в точке *M:*



$$tg\alpha_1 = tg\alpha_2 \quad \text{или} \quad \frac{\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)ds}{ds} = -\frac{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx}{dx}$$

Знак минус поставлен потому, что приращение перемещения $(dv/dz)dz$ направлено в сторону, противоположную направлению отсчета координаты s.

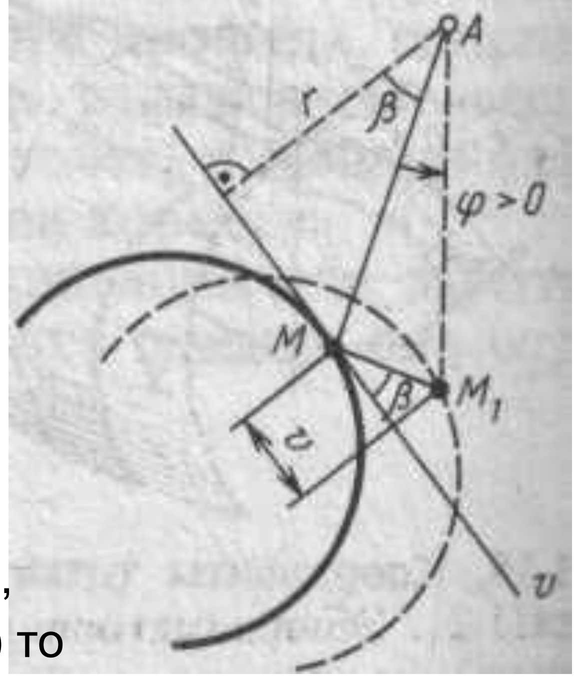
После сокращения на ds и dx получим искомое соотношение:

$$\frac{\partial w}{\partial s} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Условие отсутствия сдвигов в срединной поверхности

Примем гипотезу о том, что вдоль всего стержня установлены диафрагмы, которые, не сопротивляясь депланации, обеспечивают при закручивании стержня поворот каждого поперечного сечения как жесткого диска.
(***гипотеза неизгибаемости контура поперечного сечения***)

На рисунке изображен поворот сечения на угол φ относительно полюса или центра кручения A (он также подлежит определению).Угол φ будем считать положительным, если он направлен против хода часовой стрелки при взгляде на сечение в положительном направлении оси x.



Из рис. найдем полное перемещение точки M в плоскости сечения $MM_1=AM\cdot\varphi$ и его тангенциальную составляющую $v=MM_1\cdot\cos\beta=\varphi\cdot AM\cdot\cos\beta$. Но так как $AM\cdot\cos\beta=r$ (высота, опущенная из центра кручения на касательную к контуру v) то искомое выражение v от φ будет иметь вид:

$$v = r\varphi$$

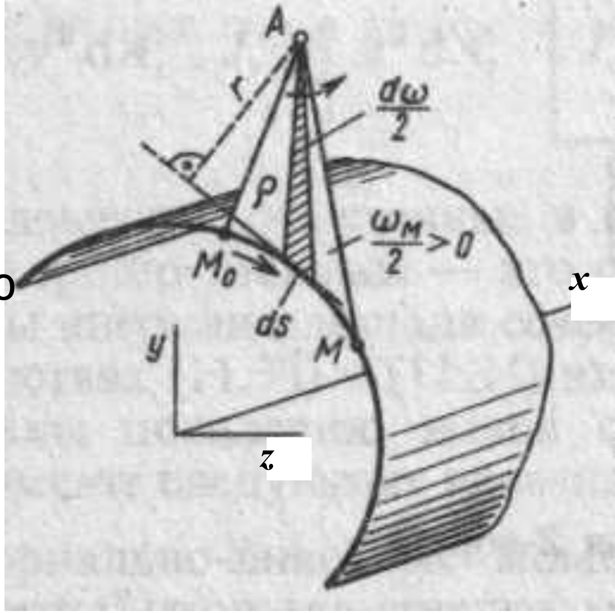
Подставляя в условие отсутствия сдвигов в срединной поверхности и обозначая дифференцирование по координате x через $(d\varphi/dx)=\varphi'$, получаем

$$\frac{\partial w}{\partial s} = -r\varphi'$$

Интегрируя данное выражение по дуге *s*, получим: $w = -\varphi'\int_{M_0}^{M} r\,ds + w_0$

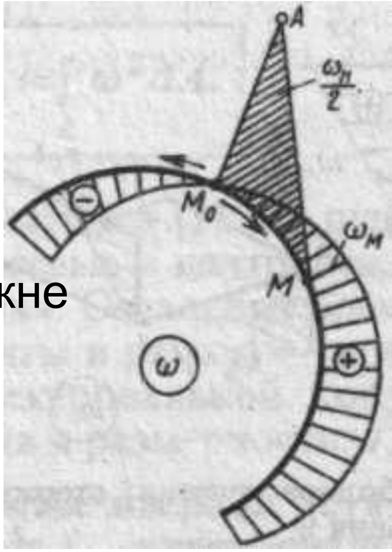
где w_0 — перемещение начальной точки M_0.

Произведение $r \cdot ds = d\omega$ стоящее под знаком интеграла геометрически представляет собой удвоенную площадь элементарного треугольника с основанием ds, а весь интеграл вдоль дуги s от M_0 до M дает так называемую **секториальную площадь** ω, т. е. площадь, покрываемую радиусом точки при ее движении вдоль контура из начальной точки M_0 в рассматриваемую точку M. *Секториальная площадь $\omega > 0$, если радиус ρ вращается против хода часовой стрелки (при взгляде на сечение в положительном направлении оси x).* В дальнейшем примем, что $w_0 = 0$, тогда формула окончательно примет вид



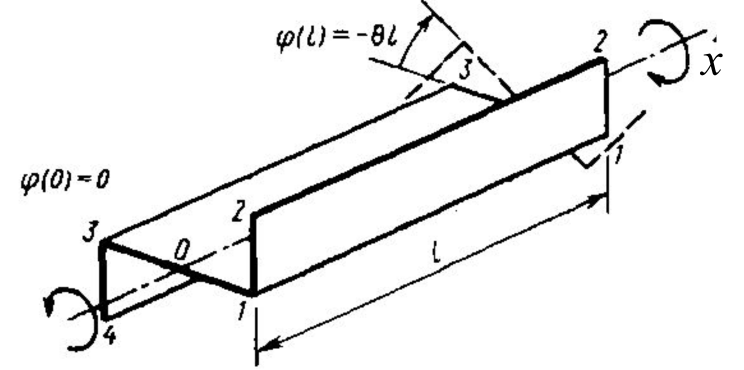
$$w = -\varphi' \cdot \omega$$

закон изменения перемещения w вдоль контура сечения вследствие депланации сечения в срединной поверхности.

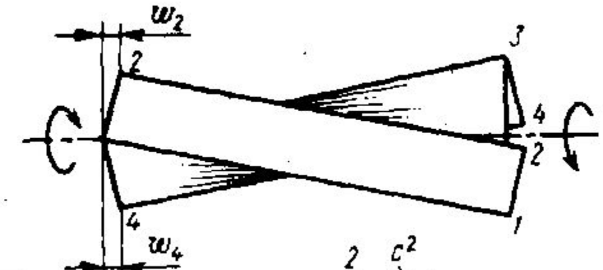


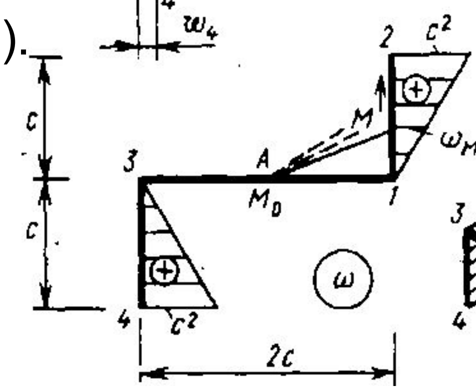
Так как w пропорционально ω, то говорят, что в тонкостенном стержне открытого профиля *депланация происходит по закону секториальных площадей.* Степень развития депланаций сечения зависит от относительного угла закручивания φ'. С крутящим моментом φ' связан соотношением изученным ранее. Между положением точки на дуге s и площадью ω существует однозначное соответствие. Поэтому секториальную площадь ω называют ***секториальной координатой точки.*** Если ее линейные координаты x и y имеют размерность [$м$], то размерность ω будет [$м^2$].

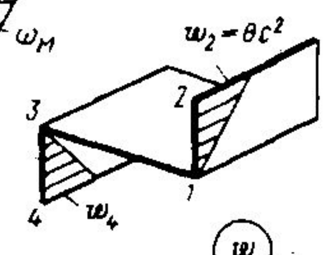
Пример 1: Построить эпюру ω и найти депланацию для Z-образного сечения, если углы закручивания *стержня* изменяются по закону $\varphi = -\theta \cdot x$.



Решение. Так как профиль симметричен, то центр кручения будет располагаться по оси симметрии. Проведем ось кручения x через точку A. Из соображений симметрии так же будем считать, что точки продольного волокна, совпадающего с осью x, закреплены от продольных смещений ($w=0$). Следовательно, точка M_0 совпадает с точкой A и располагается на оси x (в центре тяжести сечения). При движении из M_0 в точку *1* радиус AM лишь удлиняется, не покрывая никакой площади. Поэтому на участке $M_0 — 1$ имеем $\omega=0$. При движении из точки *1* в точку 2 радиус AM вращается против хода часовой стрелки, поэтому $\omega>0$. В точке 2 $\omega_2=c^2$, а в промежуточных точках она изменяется по линейному закону. То же будет для левого участка контура.







Эпюра *ω* изображена на рисунке.

Углы закручивания по длине стержня изменяются по закону $\varphi=-\theta \cdot x$.

Следовательно, относительный угол закручивания $\varphi'=-\theta$. По формуле

$$w = -\varphi' \cdot \omega$$

найдем $w_2=w_4=\theta \cdot c^2$. Эпюра w изображена на рисунке.

Сравнение эпюр *ω и w* подтверждает вывод о том, что в стержнях открытого профиля депланация совершается по закону секториальных площадей.

2.Главные секториальные координаты

Из теории изгиба стержней известно, что использование в поперечном сечении специально выбранной системы осей координат (y,z), которую мы назвали главными центральными осями, существенно упрощает расчетные формулы и создает большие удобства в изучении деформаций. Как мы увидим далее, то же самое имеет место для стесненного кручения. Поэтому удобно здесь распространить уже известные для координат x и y понятия и на новую секториальную координату ω.

Составим таблицу, симметричную относительно главной диагонали, которую назовем «матрицей моментов инерции»:

$$J = \begin{bmatrix} J_z & J_{yz} & J_{\omega z} \\ J_{zy} & J_y & J_{\omega y} \\ J_{z\omega} & J_{y\omega} & J_\omega \end{bmatrix}$$

Здесь внедиагональные элементы матрицы J представляют интегралы от произведения координат, а элементы на главной диагонали — интегралы от их квадратов:

$$J_{zy} = \int_A zy dA; \quad J_{z\omega} = \int_A z\omega dA; \quad J_{y\omega} = \int_A y\omega dA;$$

$$J_z = \int_A z^2 dA; \quad J_y = \int_A y^2 dA; \quad J_\omega = \int_A \omega^2 dA;$$

Новые моменты инерции включающие новую секториальную координату ω и имеют следующие названия и размерность:

$J_{z\omega}$ —секториально-линейные моменты инерции площади сечения, $м^5$;

J_{ω} — секториальный момент инерции сечения, $м^6$.

Координаты называются **главными**, если в матрице моментов инерции J все внедиагональные элементы равны нулю.

Следовательно, главные секториальные координаты должны быть подчинены условиям:

$$J_{z\omega} = \int_A z \cdot \omega \cdot dA = 0; \quad J_{y\omega} = \int_A y \cdot \omega \cdot dA = 0;$$

Кроме того, по аналогии с понятием центральных осей, которые проходят через центр масс, в котором, в свою очередь, статические моменты равны нулю, потребуем, чтобы эпюра ω обращала аналогичный интеграл в ноль:

$$S_{\omega} = \int_A \omega \cdot dA = 0$$

Координаты ω, удовлетворяющие данным равенствам, называют *главными секториальными координатами сечения.*

Механический смысл равенств, входящих в определение главных секториальных координат сечения легко понять, если условно принять, что эпюра ω — это эпюра нормальных напряжений ($\sigma_x = c_1 \cdot \omega$). Тогда ясно, что два первых равенства выражают условие того, что при кручении в сечении отсутствуют изгибающие моменты $M_y=0$, $M_z=0$, а последнее равенство — того, что отсутствует продольная сила $N=0$. Можно сказать, что эпюра главных секториальных координат в статическом отношении — это *самоуравновешенная* эпюра ω.

3. Техника определения главных секториальных координат

Преобразование секториальной координаты при изменении положения полюса.

На рисунке изображены приращения секториальной площади $d\omega_B>0$ и $d\omega_A>0$ получаемые при переходе из точки M контура в точку M_1 на длину пути ds. При этом координаты точки M изменяются на dy и $-dz$. Из чертежа имеем $d\omega_B=r_B{\cdot}ds$ и $d\omega_A = r_A{\cdot}ds$, а их разность

$$d(\omega_B-\omega_A)=(r_B-r_A)ds=\Delta r ds$$

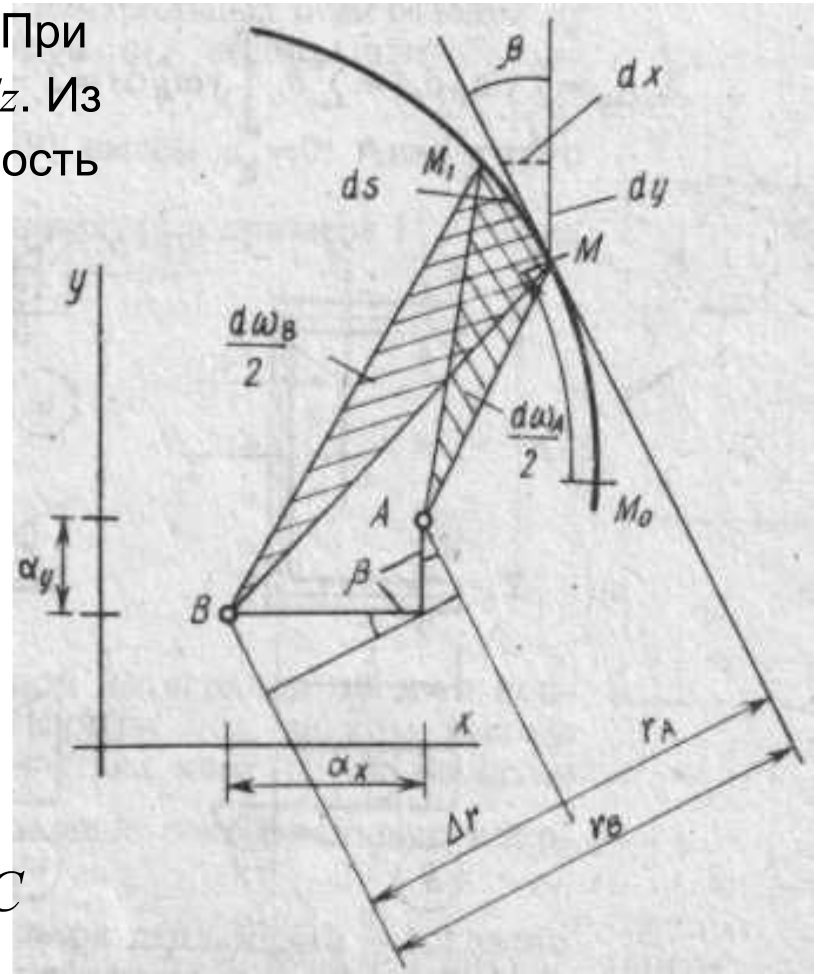
Так как $\Delta r=\alpha_z\cos\beta+\alpha_y\sin\beta$, а и $\cos\beta=\frac{dy}{ds}$

$\sin\beta=-\frac{dz}{ds}$ подставляя эти значения получим

$$d(\omega_B-\omega_A)=\left(\alpha_z\cdot\frac{dy}{ds}-\alpha_y dz\right)\cdot ds$$

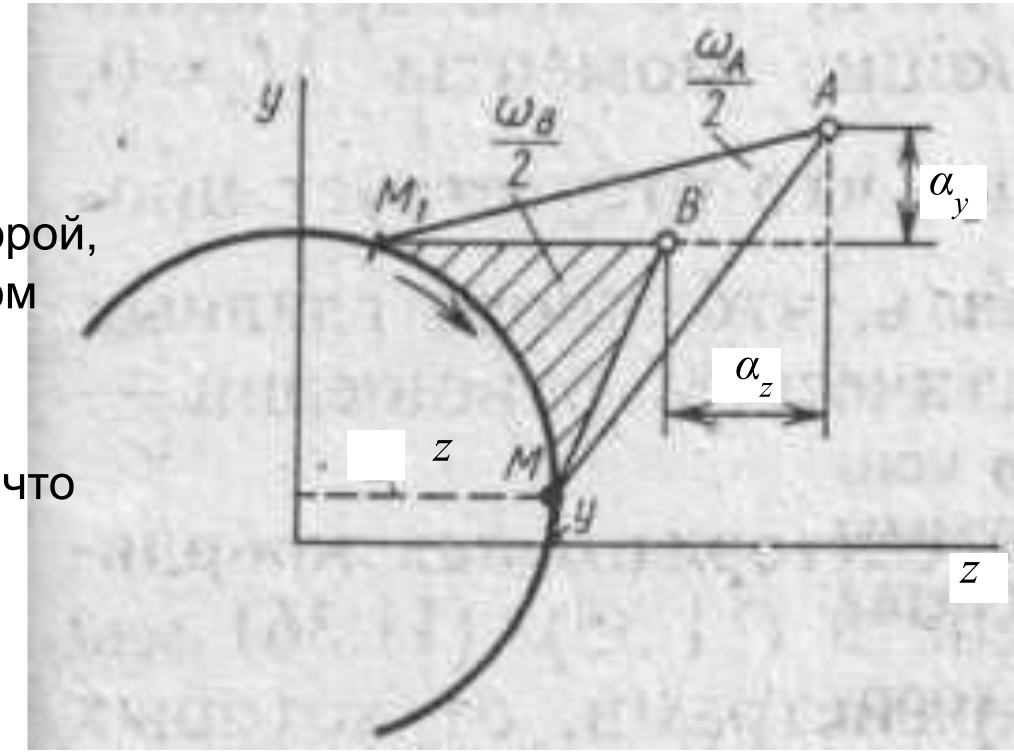
$$d(\omega_B-\omega_A)=\alpha_z dy-\alpha_y dz$$

Интегрируя получаем: $\omega_A=\omega_B-\alpha_z y+\alpha_y z-C$



Техника определения главных секториальных координат.

Для выполнения трех равенств можно распоряжаться тремя параметрами, от которых зависит ω: две координаты центра кручения и одна координата начальной точки M_0 на дуге контура сечения.



Для определения координат истинного центра кручения A зададимся вначале произвольной точкой B, пользуясь которой, как центром кручения при произвольном начале отсчета M_1 построим эпюру ω_B. Пусть α_y и α_z —координаты точки A по отношению к точке B. Ранее показано, что ω_A и ω_B связаны равенством

$$\omega_A = \omega_B - \alpha_z y + \alpha_y z - C$$

где C — произвольная постоянная.

Подставляя выражения для ω_A в условия равенства линейно-секториальных момента нулю, придем к системе уравнений относительно α_y и α_z:

$$\begin{cases} J_{y\omega_A} = \int\limits_A z \cdot \omega_A \cdot dA = \int\limits_A z \cdot \left(\omega_B - \alpha_z y + \alpha_y z - C\right) \cdot dA = 0 \\ J_{z\omega_A} = \int\limits_A y \cdot \omega_A \cdot dA = \int\limits_A y \cdot \left(\omega_B - \alpha_z y + \alpha_y z - C\right) \cdot dA = 0 \end{cases}$$

Раскрывая скобки и учитывая, что интеграл суммы равен сумме интегралов

$$\begin{cases} \int\limits_A z\omega_B dA - \alpha_z \cdot \int\limits_A z \cdot y \cdot dA + \alpha_y \cdot \int\limits_A z^2 \cdot dA + C \cdot \int\limits_A z \cdot dA = 0 \\ \int\limits_A y\omega_B dA - \alpha_z \cdot \int\limits_A y^2 \cdot dA + \alpha_y \cdot \int\limits_A y \cdot z \cdot dA + C \cdot \int\limits_A y \cdot dA = 0 \end{cases}$$

Интегралы представляют собой рассмотренные ранее моменты

$$\begin{cases} J_{y\omega_B} - \alpha_z J_{zy} + \alpha_y J_y + CS_y = 0 \\ J_{z\omega_B} - \alpha_z J_z + \alpha_y J_{zy} + CS_z = 0 \end{cases}$$

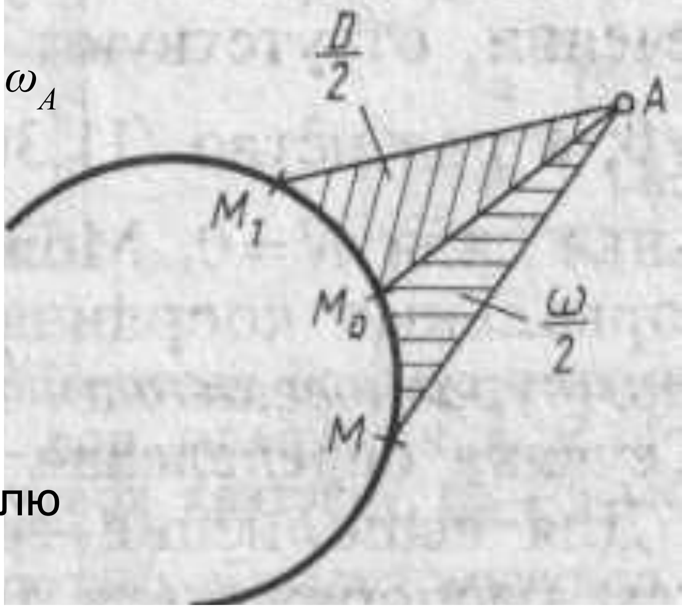
Так как y,z — это *главные центральные оси сечения,* то $J_{yz}=0$, $S_z = 0$, $S_y = 0$.

$$\begin{cases} J_{y\omega_B} + \alpha_y J_y = 0 \\ J_{z\omega_B} - \alpha_z J_z = 0 \end{cases}$$

Решая имеем формулы для координат точки *A:*

$$\alpha_y = -\frac{J_{y\omega_B}}{J_y} = -\frac{\int\limits_A z\omega_B dA}{\int\limits_A z^2 dA}; \quad \alpha_z = \frac{J_{z\omega_B}}{J_z} = \frac{\int\limits_A y\omega_B dA}{\int\limits_A y^2 dA}$$

Для нахождения положения точки M_0 построим эпюру ω_A при найденном центре кручения A и произвольном начале отсчета M_1. Из рис. можно видеть, что ω_A и ω, найденные для истинной точки M_0, отличаются на некоторую постоянную D:



$$\omega = \omega_A - D$$

Подставив данное выражение в условие равенство нулю статического момента, получим

$$S_\omega = \int_A \omega \cdot dA = \int_A (\omega_A - D) \cdot dA = S_{\omega_A} - DA = 0$$

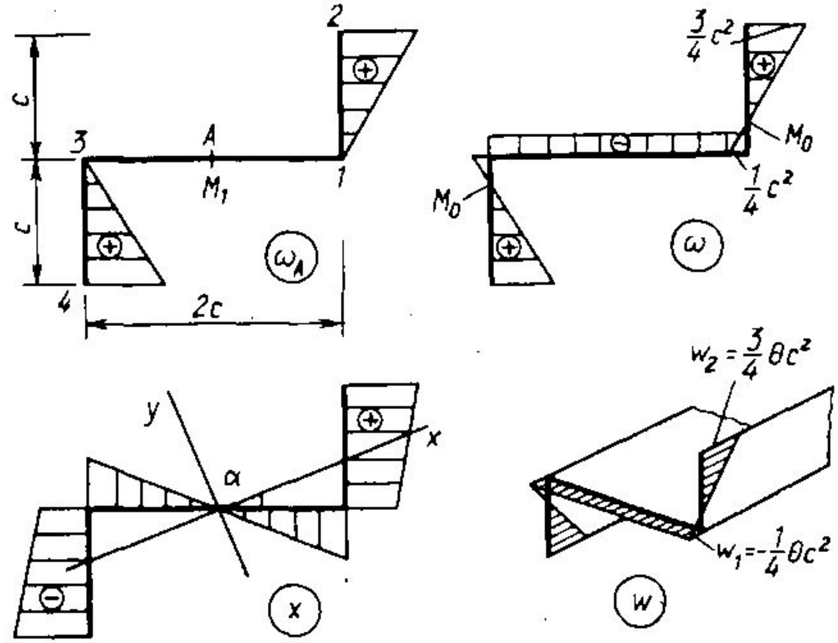
отсюда

$$D = \frac{S_{\omega_A}}{A} = \frac{\int_A \omega_A dA}{\int_A dA}$$

Вычитая D из ординат эпюры ω_A, получаем эпюру главных секториальных координат. При этом может образоваться не одна нулевая точка. Любая из них может быть принята в качестве M_0.

Пример 2: Построить эпюру главных секториальных координат для Z-образного сечения, рассмотренного в примере 1.

Решение: Построенную в этом примере эпюру ω обозначим ω_A и проверим, удовлетворяет ли она условию равенства нулю линейно-секториальных моментов. Для этого на рисунке изображена для главных центральных осей сечения (y,z) эпюра z. Из сопоставления ее с эпюрой ω_A видно, что для каждой точки лежащей на отрезках А-1 и А-3



произведение $z{\cdot}\omega_A=0$, а для каждой точки, лежащей на отрезке 3-4, найдется симметричная точка, лежащая на отрезке 1-2 у которых произведения $z{\cdot}\omega_A$ будут равны по величине и противоположны по знаку. Следовательно

$$J_{y\omega_A} = \int\limits_A z \cdot \omega_A \cdot dA = 0$$

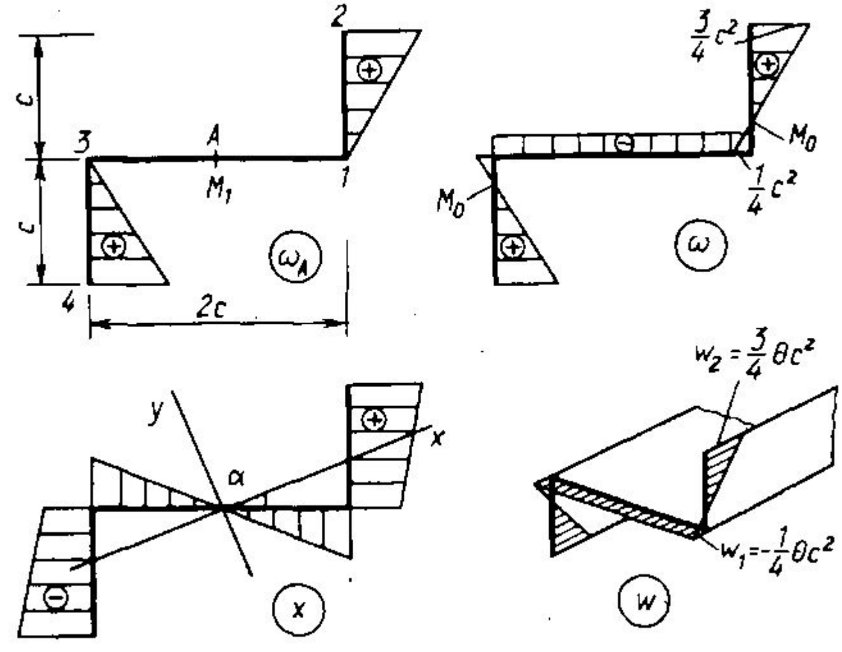
Отсюда получаем, что $$\alpha_y = -\frac{J_{y\omega_A}}{J_y} = -\frac{\int\limits_A z\omega_A dA}{\int\limits_A z^2 dA} = 0$$

Аналогично получим $\alpha_z=0$ и отсюда заключаем, что принятая в примере 1 точка *A* является истинным центром кручения.

Найдем теперь константу D по формуле

$$D = \frac{S_{\omega_A}}{A} = \frac{\int\limits_A \omega_A dA}{A} = \frac{\sum\limits_i \int\limits_0^{b_i} \omega_A \cdot \delta_i \cdot ds}{\sum\limits_i b_i \cdot \delta_i} =$$

$$= \frac{\sum\limits_i \delta_i \cdot \int\limits_0^{b_i} \omega_A \cdot ds}{\sum\limits_i b_i \cdot \delta_i} = \frac{2 \cdot \delta \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot c \cdot c^2 \right)}{4 \cdot c \cdot \delta} = \frac{c^2}{4}$$

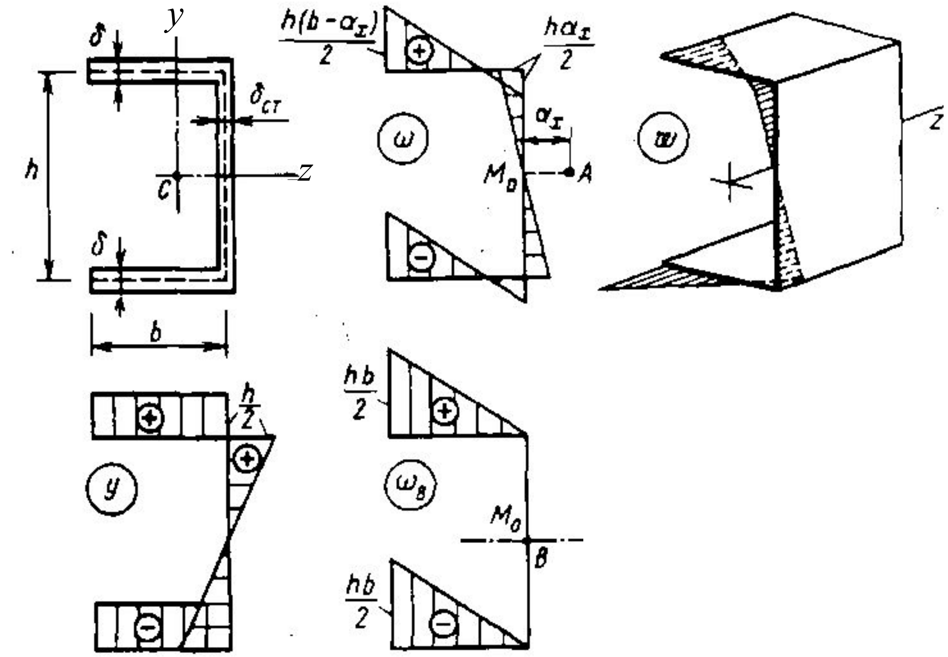


Здесь интеграл по площади заменен суммой интегралов по дуге контура, а интегралы под знаком суммы вычислены как площади эпюры ω_A на участках контура b_i. Вычитая константу D из ординат ω_A получим главные секториальные координаты ω.

На рисунке, кроме того, изображена эпюра депланаций w согласно эпюре ω. Сравнивая их с депланациями, найденными в примере 1, видим, что они отличаются в данном случае лишь на константу. Это говорит о том, что для свободного кручения переход от неглавных к главным секториальным координатам означает лишь изменение положения плоскости, от которой отсчитываются депланации данного сечения.

Пример 3. Построить эпюры ω и депланаций w, определить положение центра кручения для швеллера.

Решение: Ввиду наличия у сечения оси симметрии точки M_0 и A находятся на этой оси. Определению подлежит координата α_z центра кручения A, отсчитываемая от точки B, которую мы совместим с точкой M_0. Построим эпюры величин y и ω_B, входящих в интегралы в формуле для расчета α_z



и выведем аналитические зависимости для этих величин:

На верхней полке:

$$y = \frac{h}{2}, \quad \omega_B = -\frac{h}{2}\cdot s + \frac{h\cdot b}{2}$$

На нижней полке:

$$y = -\frac{h}{2}, \quad \omega_B = \frac{h}{2}\cdot s - \frac{h\cdot b}{2}$$

На вертикальной стенке:

$$y = s, \quad \omega_B = 0$$

s – продольная координата по которой будет проводиться интегрирование

Входящие в формулу для α_z интегралы по площади заменяем интегралами по дуге.

$$J_{z\omega_B} = \int_A y\cdot\omega_B\cdot dA = \sum_{i=1}^{3}\delta_i\cdot\int_0^{b_i} y\cdot\omega_B\cdot ds =$$

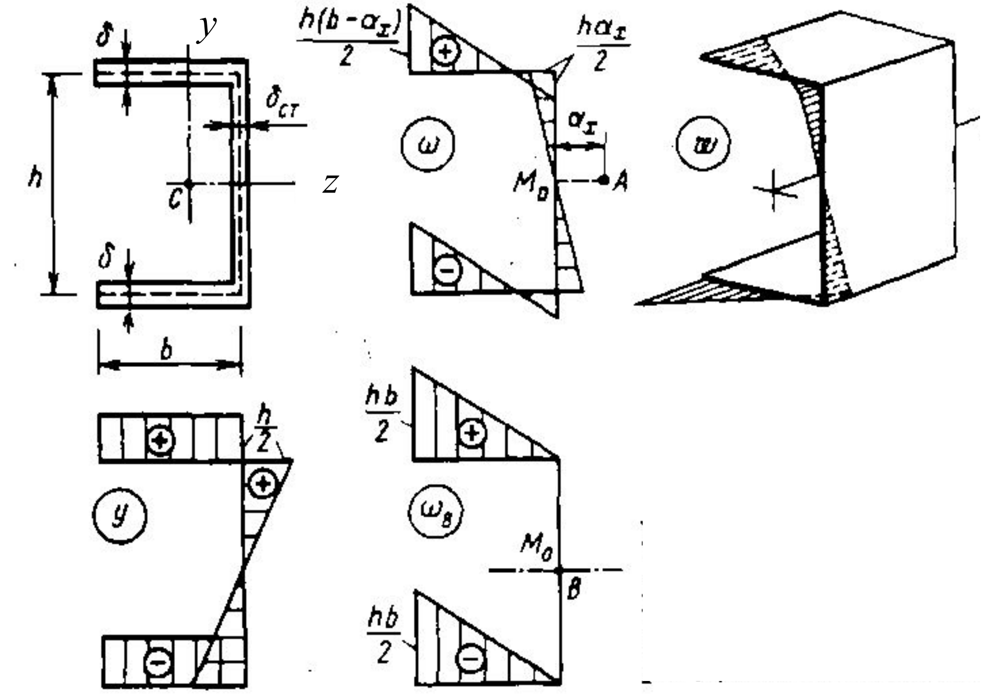
$$= \delta\cdot\int_0^b \frac{h}{2}\cdot\left(-\frac{h}{2}\cdot s + \frac{h\cdot b}{2}\right)ds + \delta\cdot\int_0^b -\frac{h}{2}\cdot\left(\frac{h}{2}\cdot s - \frac{h\cdot b}{2}\right)ds + \delta_{cm}\cdot\int_{-h/2}^{h/2} 0\cdot ds = \frac{h^2\cdot b^2\cdot\delta}{4}$$

Аналогично получим

$$J_z = \int_A y^2 \cdot dA = \sum_{i=1}^{3} \delta_i \cdot \int_0^{b_i} y^2 \cdot ds =$$

$$= \delta \cdot \int_0^b \left(\frac{h}{2}\right)^2 \cdot ds + \delta \cdot \int_0^b \left(-\frac{h}{2}\right)^2 \cdot ds +$$

$$+ \delta_{cm} \cdot \int_{-h/2}^{h/2} s^2 \cdot ds = \frac{\delta \cdot h^2 \cdot b}{2} + \frac{\delta_{cm} \cdot h^3}{12}$$



после чего найдем

$$\alpha_z = \frac{J_{z\omega_B}}{J_z} = \frac{\dfrac{h^2 \cdot b^2 \cdot \delta}{4}}{\dfrac{\delta \cdot h^2 \cdot b}{2} + \dfrac{\delta_{cm} \cdot h^3}{12}} = \frac{3 \cdot b}{6 + \dfrac{h \cdot \delta_{cm}}{b \cdot \delta}}$$

Введем обозначения $A_{cm} = h \cdot \delta_{cm}, \quad A_{пол} = b \cdot \delta$

$$\alpha_z = \frac{J_{z\omega_B}}{J_z} = \frac{\dfrac{h^2 \cdot b^2 \cdot \delta}{4}}{\dfrac{\delta \cdot h^2 \cdot b}{2} + \dfrac{\delta_{cm} \cdot h^3}{12}} = \frac{3 \cdot b}{6 + \dfrac{A_{cm}}{A_{пол}}}$$

Эпюра ω и подобная ей эпюра депланаций w=-$\varphi'\omega$ показаны на рисунке.