

# ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Курс читает: к.т.н., доцент  
Журавлев Илья Александрович

# План курса

1. Комплексные числа (напоминание).
2. Общие сведения о системах управления.
3. Математические модели.
4. Типовые динамические звенья.
5. Структурные схемы.
6. Анализ систем автоматического управления

# Комплексные числа

$$z = x + i \cdot y$$

$$\mathbf{Z} = \mathbf{x} + \mathbf{i} \cdot \mathbf{y}$$

$$z = x + i \cdot y$$

$$\mathbf{Z} = \mathbf{x} + \mathbf{i} \cdot \mathbf{y}$$

$$z = x + i \cdot y$$

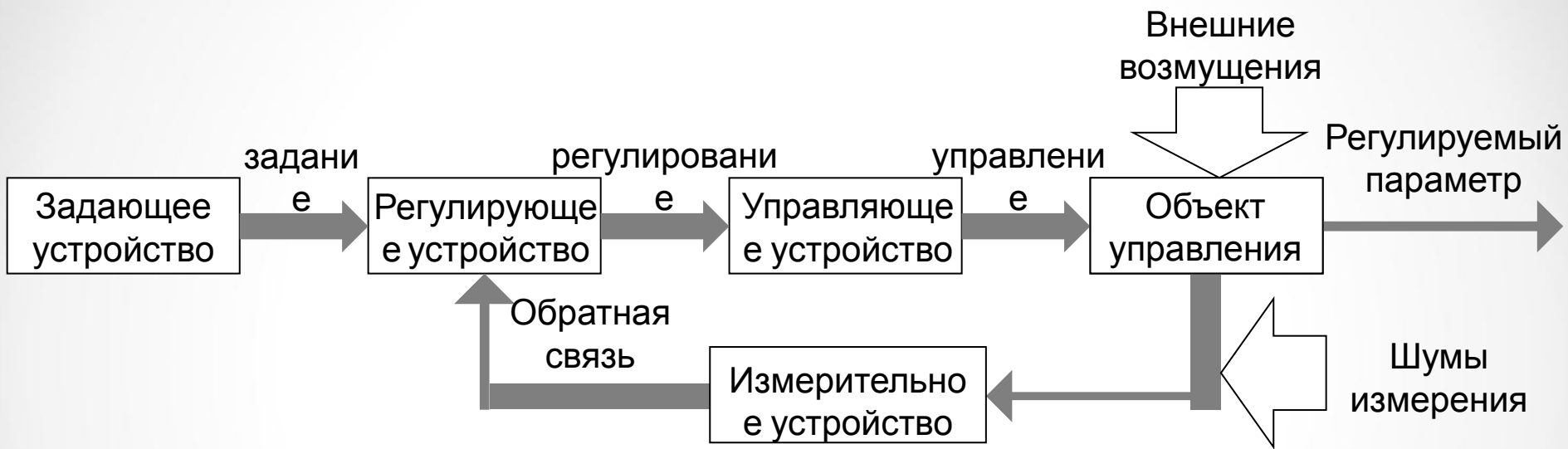
$$\mathbf{Z} = \mathbf{x} + \mathbf{i} \cdot \mathbf{y}$$

# **Теория автоматического управления (ТАУ):**

- 1. Принцип управления  
(как нужно управлять).**
- 2. Математические модели.**
- 3. Устойчивость работы.**
- 4. Качество управления.**

# Общие сведения о системах управления

# Система управления (из чего состоит?)



# Система управления (регулятор)

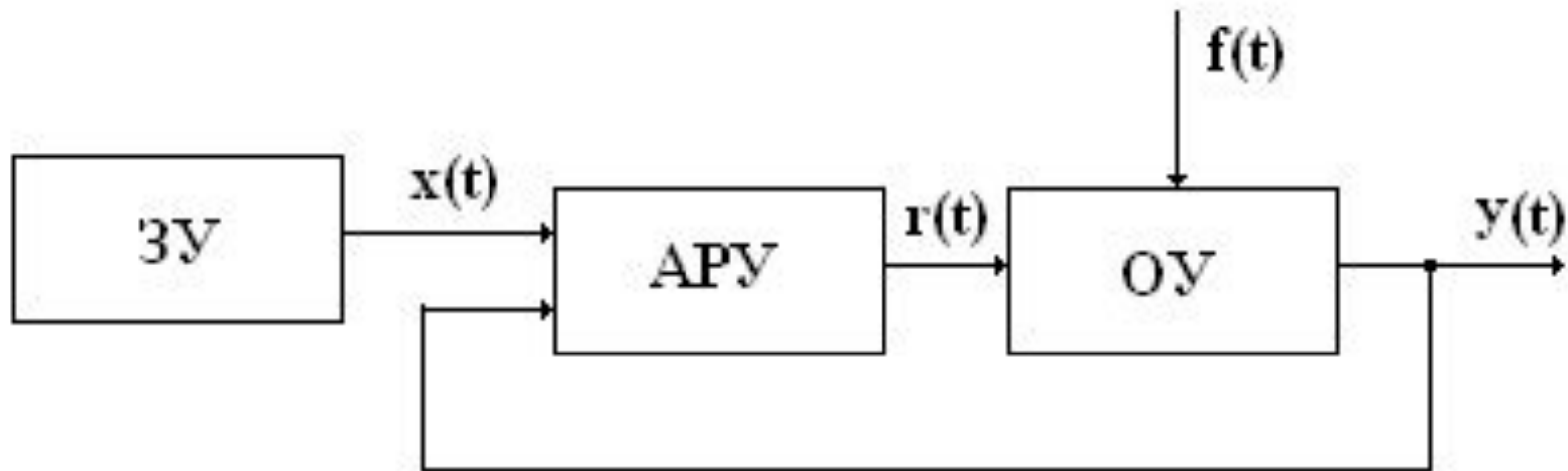


# Система управления (из чего состоит?)

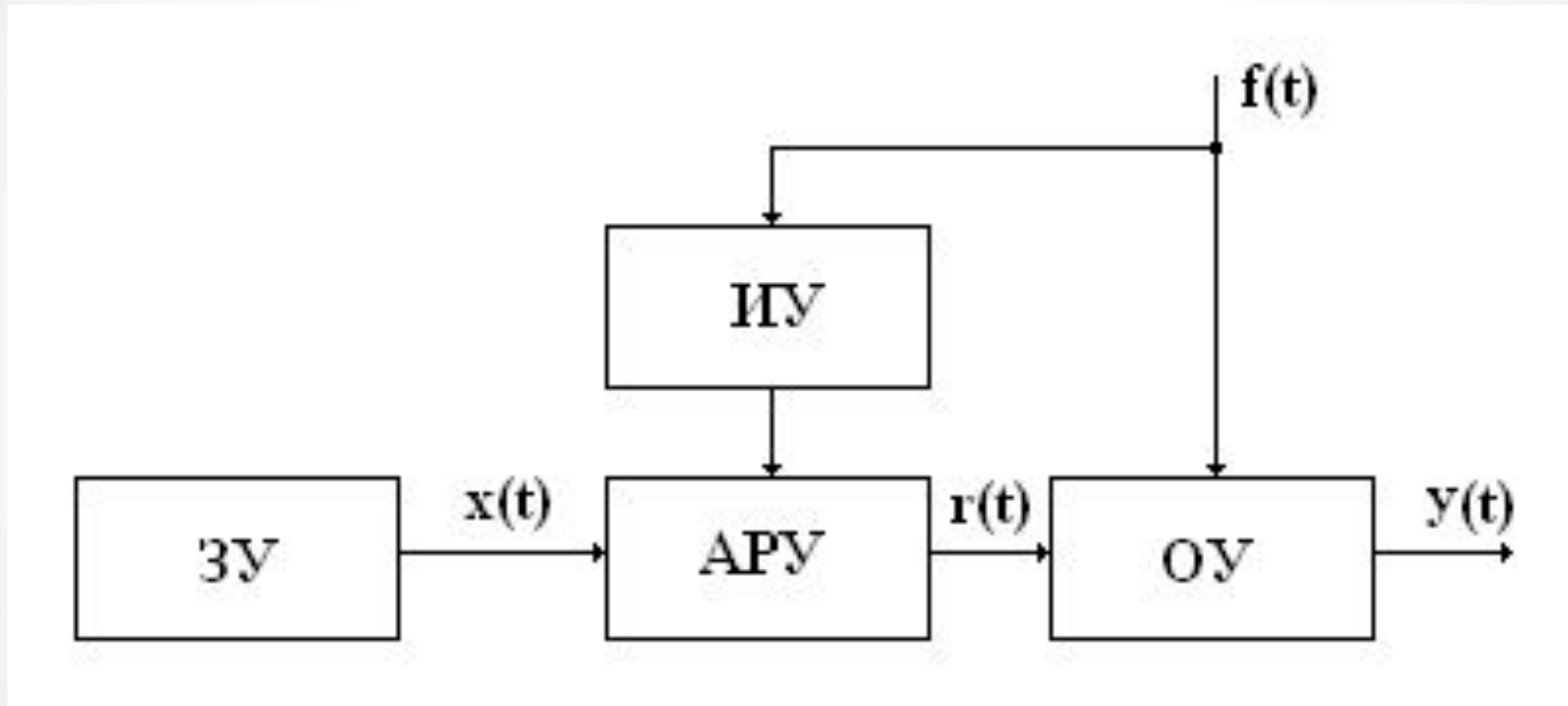
Задающее устройство	Задающее воздействие
Регулирующее устройство	Регулирование
Управляющее устройство	Управление
Объект управления	Регулируемый параметр
Измерительное устройство	Сравнивающее устройство



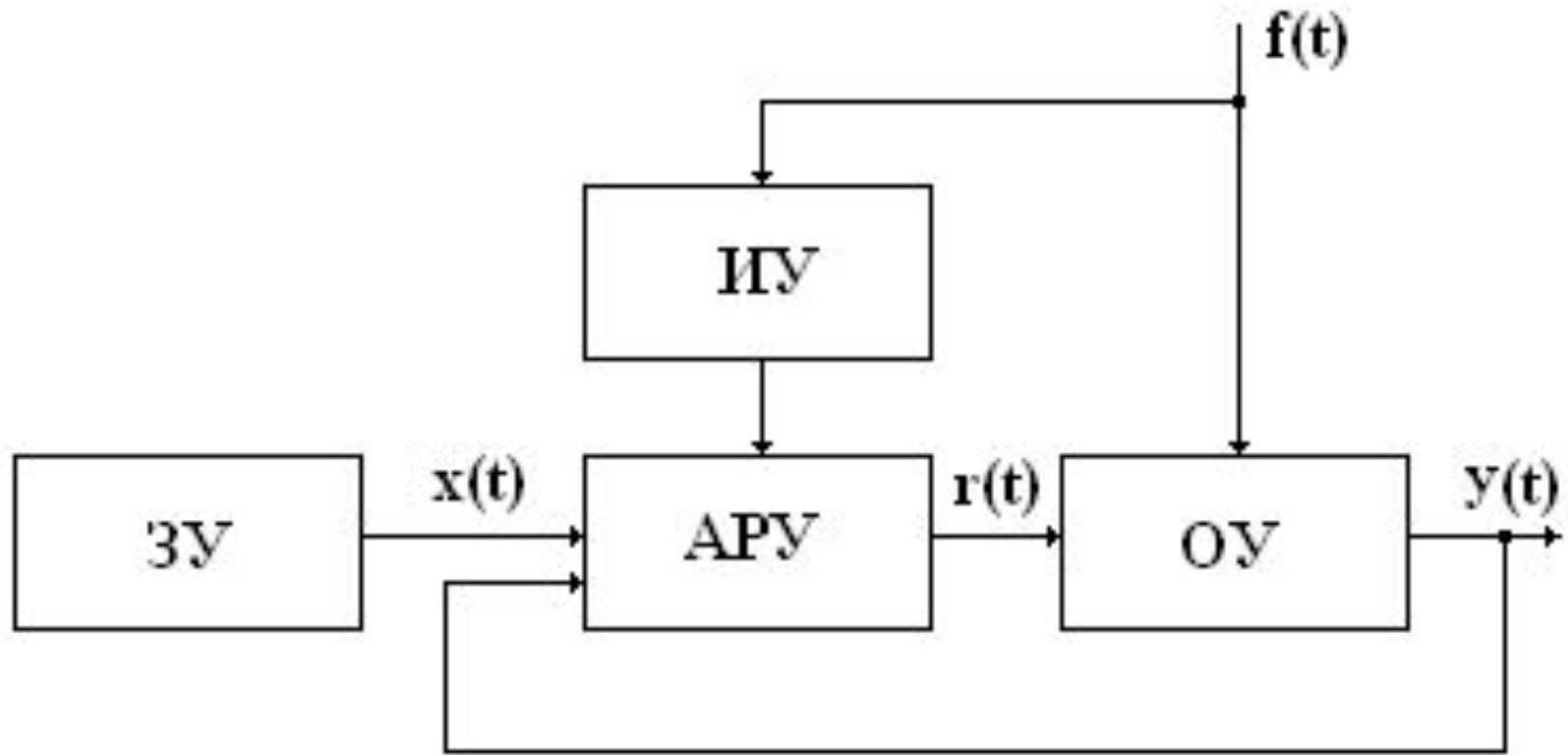
# Классификация систем управления (СУ по отклонению)



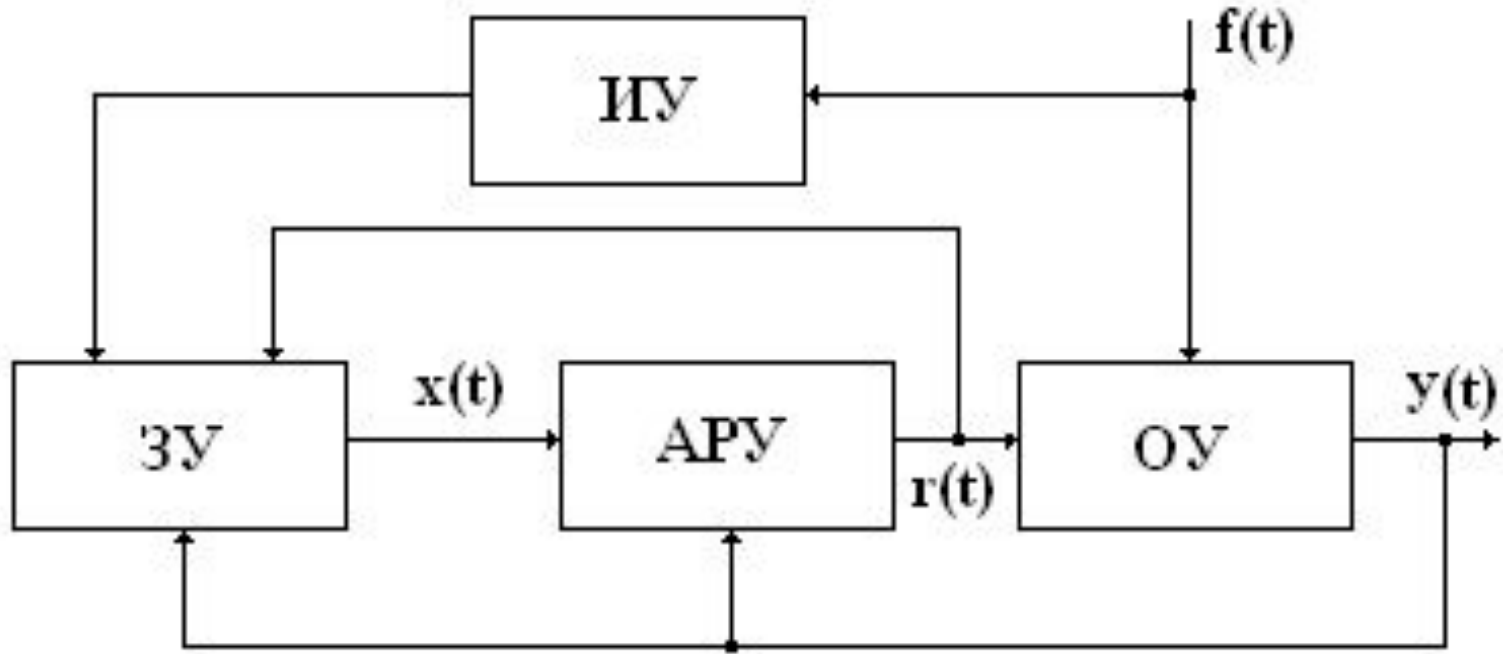
# Классификация систем управления (СУ по возмущению)



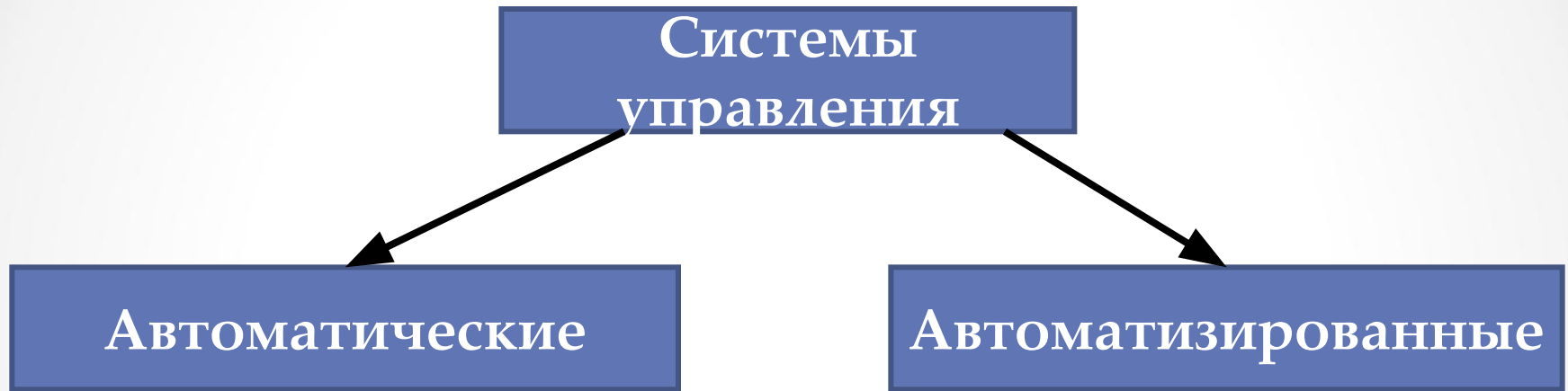
# Классификация систем управления (СУ с комбинированным управлением)



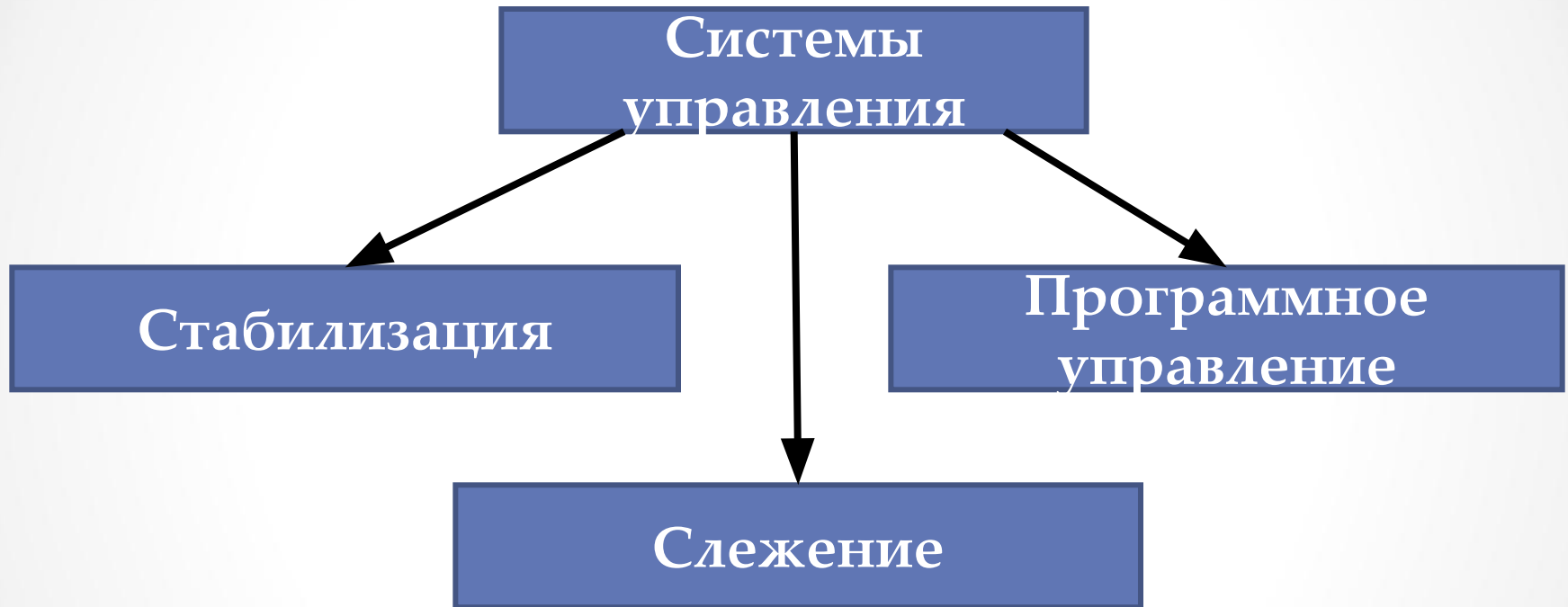
# Классификация систем управления (адаптивная СУ)



# Классификация систем управления (Уровень автоматизации)



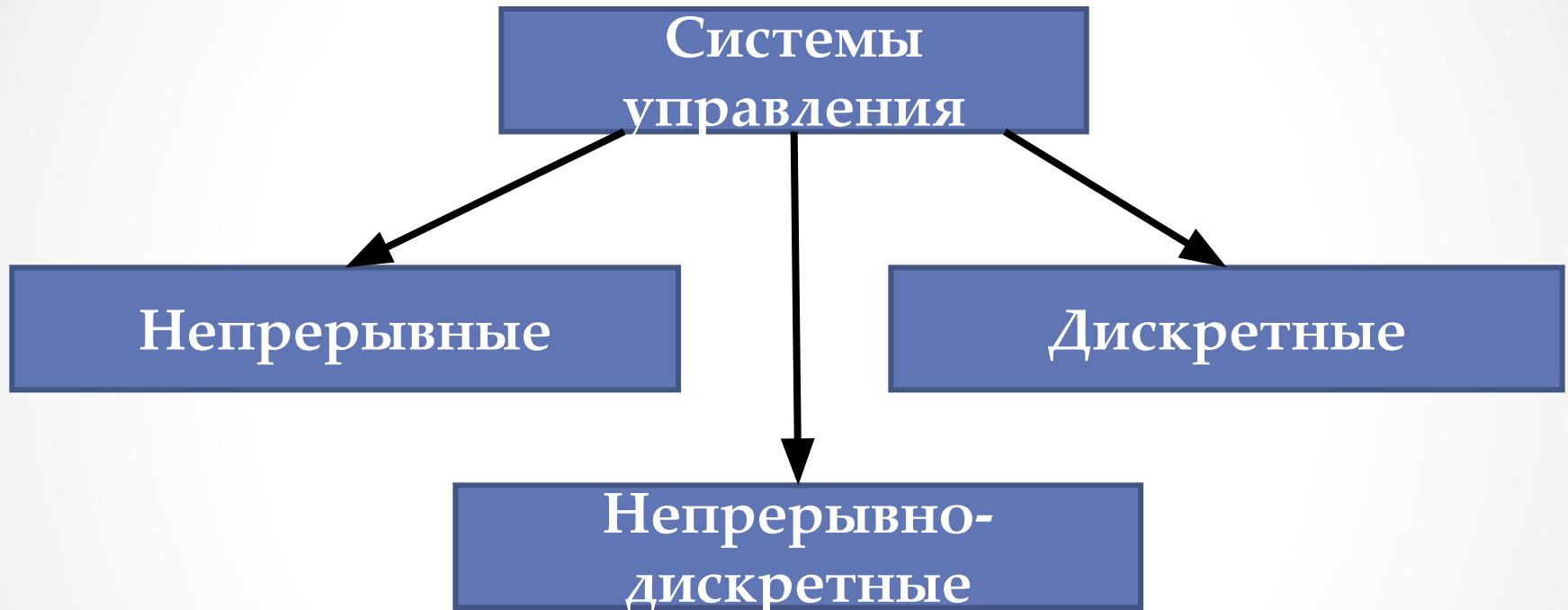
# Классификация систем управления (Задачи систем управления)



# Классификация систем управления (По количеству входов и выходов)

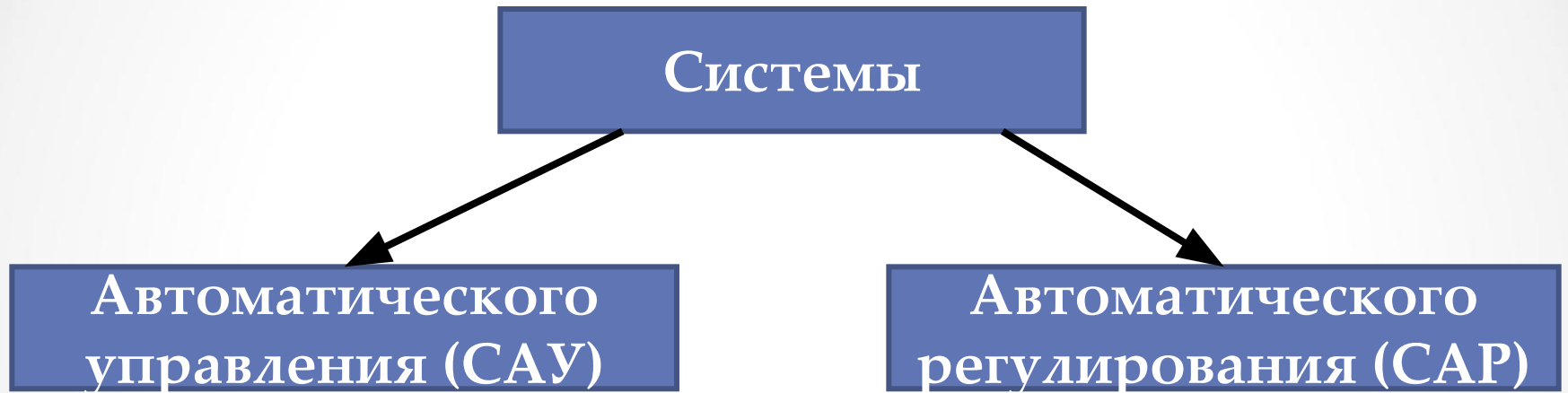


# Классификация систем управления (Характер сигналов системы)





# Классификация систем управления (Характер сигналов системы)

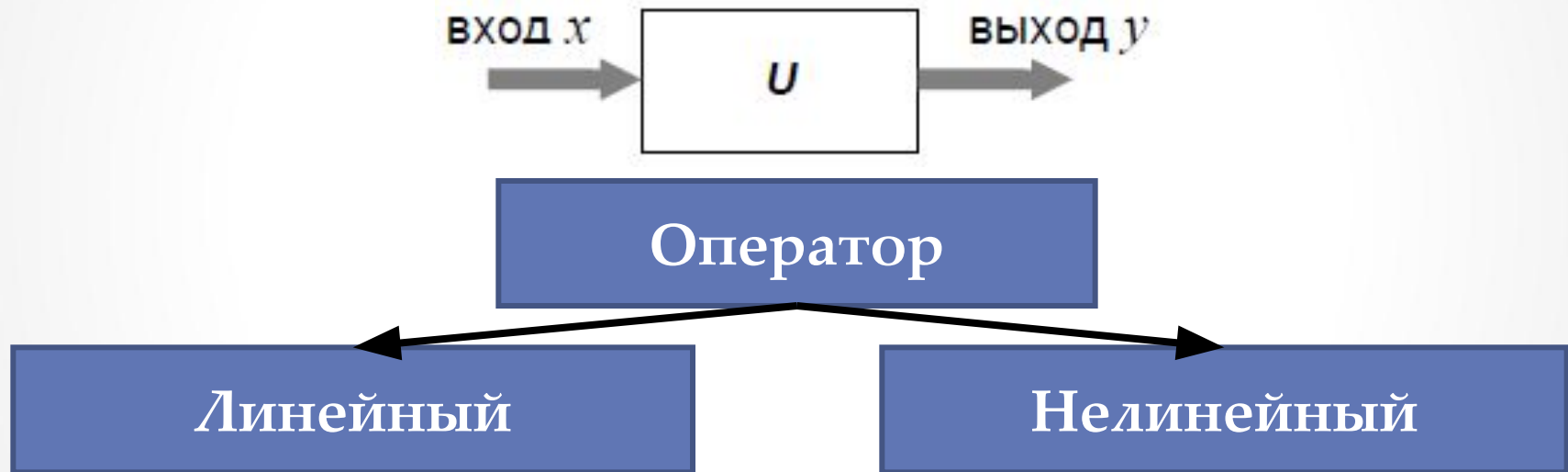


# Математические модели

# Линейность и нелинейность

Цель любого управления – изменить состояние объекта нужным образом.

Модель – это объект, который используется для изучения другого объекта (оригинала).



Свойства:

$$U[\alpha \cdot x] = \alpha \cdot U[x]$$

$$U[x_1 + x_2] = U[x_1] + U[x_2]$$

# Описание элементов



Способы описания динамических свойств:

- Дифференциальные уравнения;
- Передаточные функции  $W(p)$ ;
- Временные функции;
- Частотные характеристики.

# Дифференциальные уравнения

$$a_2 y^{(2)}(t) + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = b_2 x^{(2)}(t) + b_1 x^{(1)}(t) + a_0 x(t)$$

Здесь:

$y(t)$  – временная функция выходного сигнала;

$x(t)$  – временная функция входного сигнала;

$y^{(j)}(t)$  –  $j$ -я производная функции  $y(t)$ ;

$x^{(j)}(t)$  –  $j$ -я производная функции  $x(t)$ ;

$a_m$      $b_m$     –    постоянные    коэффициенты  
уравнения            при            соответствующих  
переменных.

# Передаточная функция

Передаточная функция  $W(p)$  есть отношение выходного сигнала к входному сигналу, представленное в операторной форме:

$$W(p) = \frac{\text{выход}}{\text{вход}} = \frac{y(p)}{x(p)}$$

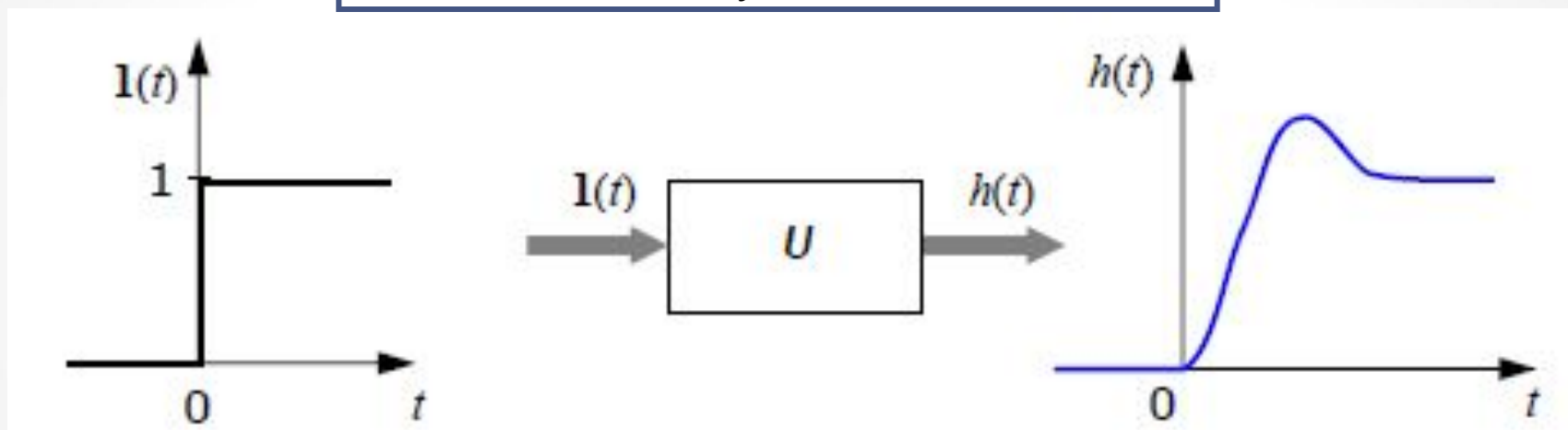
Заменяем  $d/dt$  на оператор Лапласа  $- p$  и получим:

$$\begin{aligned} W(p) &= \frac{\text{выход}}{\text{вход}} = \frac{y(p)}{x(p)} = \frac{b_2 p^2 + b_1 p^1 + b_0}{a_2 p^2 + a_1 p^1 + a_0} \\ &= \frac{(b_0 / a_0) \cdot (b_2 / b_0 p^2 + b_1 / b_0 p^1 + 1)}{a_2 / a_0 p^2 + a_1 / a_0 p^1 + 1} \end{aligned}$$

# Переходная характеристика

$$1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

Единичный ступеньчатый сигнал

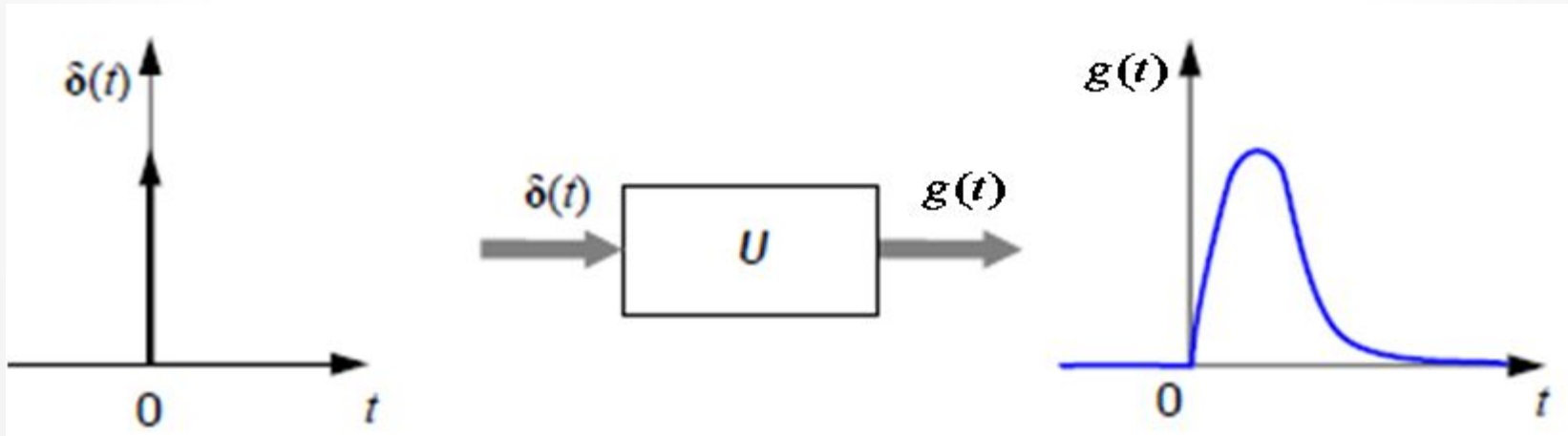


$$W(p) = \frac{y(p)}{x(p)} \Rightarrow L\{h(t)\} = H(p) = W(p) \cdot \frac{1}{p}$$

# Импульсная характеристика (весовая функция)

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

Единичный импульсный сигнал



$$W(p) = \frac{y(p)}{x(p)} \Rightarrow L\{g(t)\} = G(p) = W(p) \cdot 1$$



# Разложение дроби на сумму элементарных дробей

Имеем рациональную дробь  $R(x)$  вида:

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_{m-1}x + a_m},$$

где степени  $m > n$ .

Дробь такого вида можно представить, притом единственным образом, в виде суммы элементарных дробей:

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_n} \frac{A_{ij}}{(x - x_i)^j} + \sum_{l=1}^m \sum_{t=1}^{s_m} \frac{B_{lt} + C_{lt}x}{(x^2 + p_lx + q_l)^t}.$$

где  $A$ ,  $B$ ,  $C$  — некоторые действительные коэффициенты, обычно вычисляемые с помощью метода неопределённых коэффициентов.

# Таблица оригиналов и изображений (обратное/прямое преобразование Лапласа)

$$\mathcal{L}\{f_1(t) + f_2(t)\} = \mathcal{L}\{f_1(t)\} + \mathcal{L}\{f_2(t)\},$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F_1(s) + F_2(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\} + \mathcal{L}^{-1}\{F_2(s)\}.$$

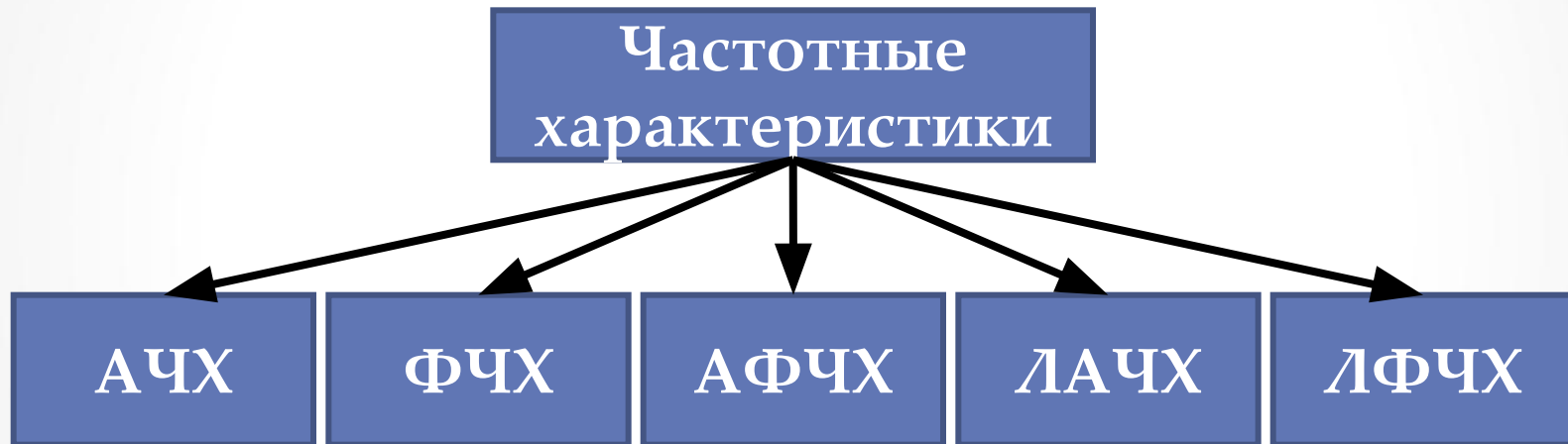
№	Переход от оригиналов к изображениям (прямое преобразование Лапласа $L$ )	Переход от изображений к оригиналам (обратное преобразование Лапласа $L^{-1}$ )
1.	$x(t) \xrightarrow{L} X(p)$	$X(p) \xrightarrow{L^{-1}} x(t)$
2.	$x'(t) \xrightarrow{L} pX(p) - x(0)$	<i>На практике вряд ли потребуется</i>
3.	$x''(t) \xrightarrow{L} p^2X(p) - p \cdot x(0) - x'(0)$	<i>На практике вряд ли потребуется</i>
4.	$t^n \xrightarrow{L} \frac{n!}{p^{n+1}}$	$\frac{1}{p^n} \xrightarrow{L^{-1}} \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1}$
5.	$t^n e^{at} \xrightarrow{L} \frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$	$\frac{1}{(p-a)^n} \xrightarrow{L^{-1}} \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{at}$

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt.$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) e^{st} ds$$

# Частотные характеристики

Частотные характеристики САУ характеризуют реакцию систем на синусоидальное входное воздействие в установившемся режиме.



$$x(t) = \sin(\omega \cdot t) \Rightarrow y(t) = A(\omega) \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi(\omega))$$

# Частотные характеристики

Зная передаточную функцию  $W(p)$ , можно получить амплитудно-фазовую частотную характеристику, путем замены оператора Лапласа  $-p$ , на мнимое число  $-j\omega$ .

$$W(p) \Rightarrow \text{замена } \langle p = j\omega \rangle \Rightarrow W(j\omega)$$

$$W(j\omega) = |W(j\omega)| \cdot e^{j \cdot \arg(W(j\omega))} = N(\omega) + j \cdot M(\omega) \quad - \text{АФЧХ}$$

$$|W(j\omega)| = A(\omega) = \sqrt{N(\omega)^2 + M(\omega)^2}, \quad - \text{АЧХ}$$

$$\arg(W(j\omega)) = \varphi(\omega) = \text{arctg} \left( \frac{M(\omega)}{N(\omega)} \right), \quad - \text{ФЧХ}$$

$$\text{где } - N(\omega) = \text{Re}(W(j\omega)); M(\omega) = \text{Im}(W(j\omega))$$

# Логарифмические частотные характеристики

$$A(\omega) \Rightarrow L(\omega) = 20 \cdot \lg(A(\omega)) \quad (\text{Дб})$$

- ось ординат

$$\omega \Rightarrow \lg(\omega) \quad (\text{Декада})$$

- ось абсцисс

ЛАЧХ

$$\varphi(\omega) \Rightarrow (\text{не меняется}) \varphi(\omega)$$

- ось ординат

$$\omega \Rightarrow \lg(\omega) \quad (\text{Декада})$$

- ось абсцисс

ЛФЧХ

Свойства:

$$1) \quad W_1(\omega) \cdot W_2(\omega) \Rightarrow \begin{cases} L(\omega) = 20 \cdot \lg(A_1(\omega)) + 20 \cdot \lg(A_2(\omega)) \\ \varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) \end{cases}$$

2) Асимптотические ЛАЧХ

# Типовые динамические звенья

# Усилитель

$W(p) = k$  - Передаточная функция

$h(t) = k$  - Переходная характеристика

$g(t) = k \cdot \delta(t)$  - Импульсная характеристика

$A(\omega) = k$  - АЧХ

$\varphi(\omega) = 0$  - ФЧХ, ЛФЧХ

$L(\omega) = 20 \cdot \lg(k)$  - ЛАЧХ

# Апериодическое звено

$$W(p) = \frac{k}{Tp + 1} \quad \text{- Передаточная функция}$$

$$h(t) = k \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \quad \text{- Переходная характеристика}$$

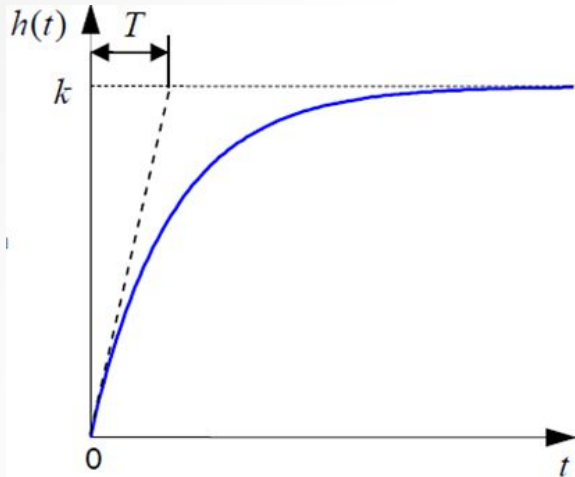
$$g(t) = \frac{k}{T} \cdot e^{-\frac{t}{T}} \quad \text{- Импульсная характеристика}$$

$$W(j\omega) = \frac{k}{\sqrt{1 + (\omega \cdot T)^2}} \cdot e^{-j \cdot \arctg(\omega T)} \quad \text{- АФЧХ}$$

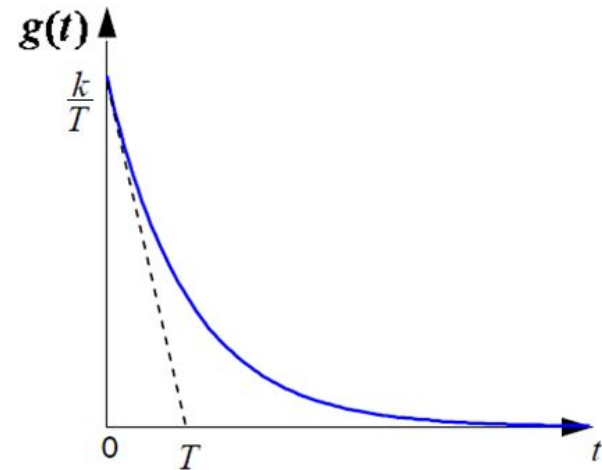
$$L(\omega) = 20 \cdot \lg(k) - 20 \cdot \lg(\sqrt{1 + (\omega T)^2}) \quad \text{- ЛАЧХ}$$



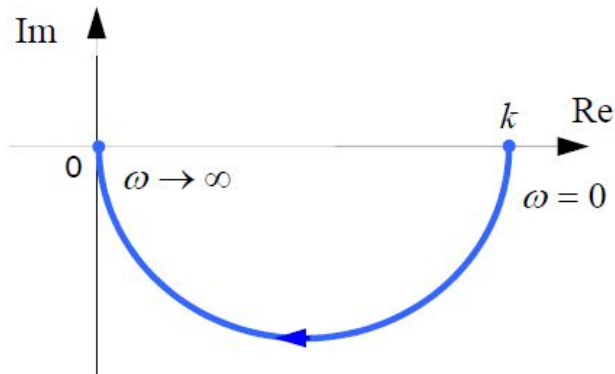
# Апериодическое звено



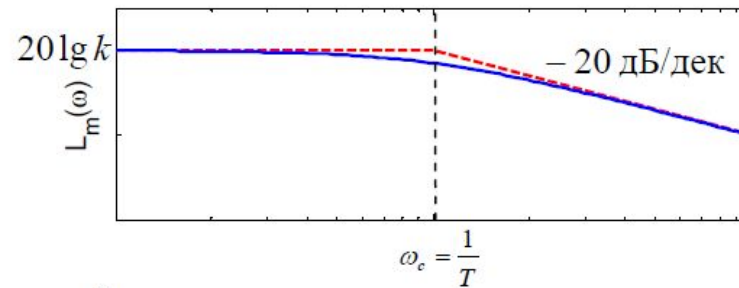
Переходная характеристика



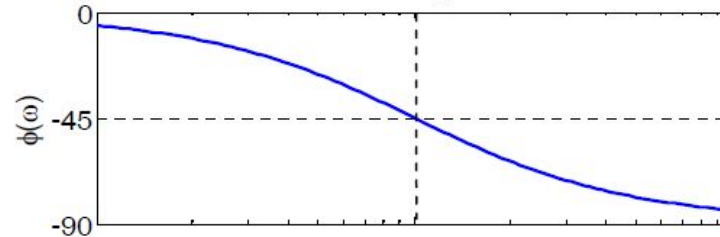
Импульсная характеристика



АФЧХ



ЛАЧХ



ЛФЧХ

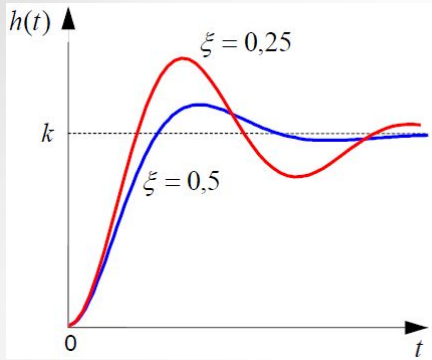
# Колебательное звено

$$W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 2T\xi p + 1} \quad \text{- Передаточная функция}$$

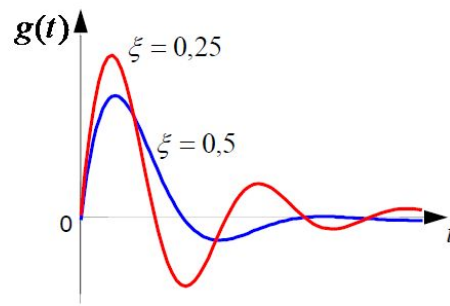
$$W(j\omega) = \frac{k}{\sqrt{\left[1 + (\omega \cdot T)^2\right]^2 + 4(\xi \cdot T \cdot \omega)^2}} \cdot e^{-j \cdot \arctg\left(\frac{2\xi\omega T}{1 - (\omega T)^2}\right)} \quad \text{- АФЧХ}$$

$$L(\omega) = 20 \cdot \lg(k) - 20 \cdot \lg\left(\sqrt{\left[1 + (\omega \cdot T)^2\right]^2 + 4(\xi \cdot T \cdot \omega)^2}\right) \quad \text{- ЛАЧХ}$$

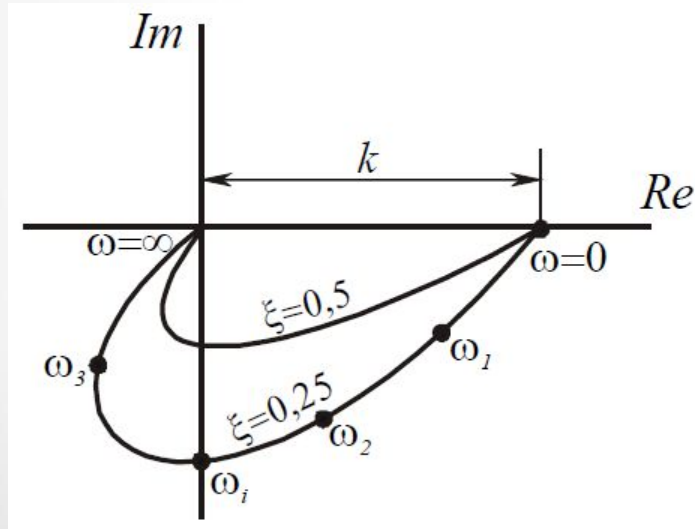
# Колебательное звено



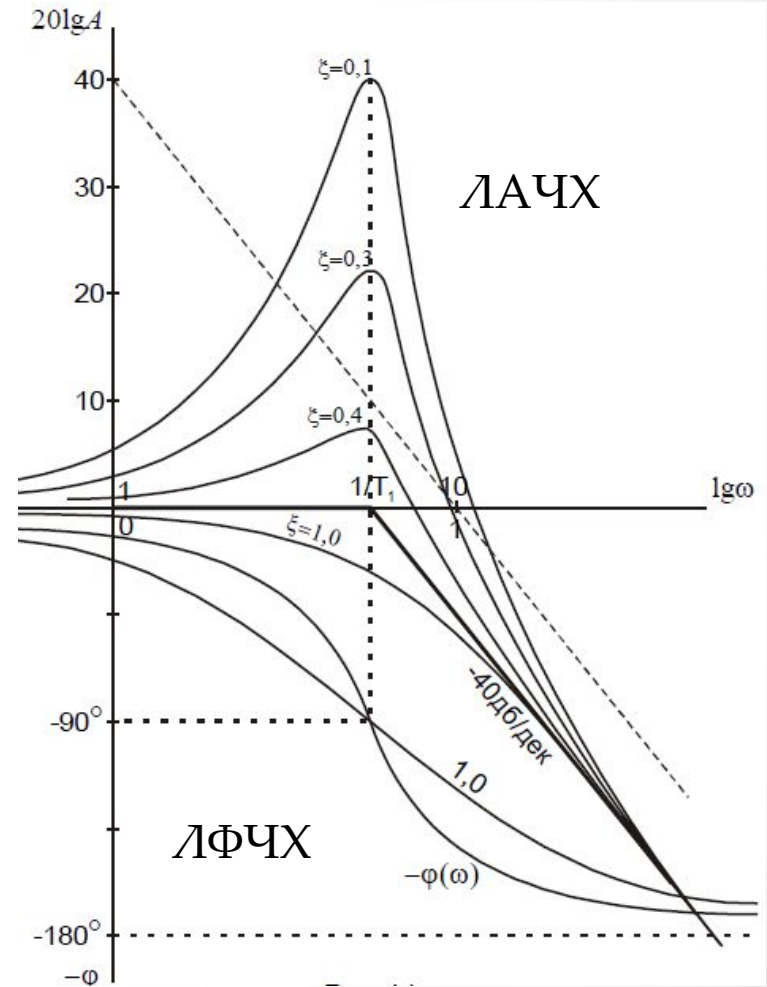
Переходная характеристика



Импульсная характеристика



АФЧХ



# Интегрирующее звено

$$W(p) = \frac{k}{p} \quad - \text{ Передаточная функция}$$

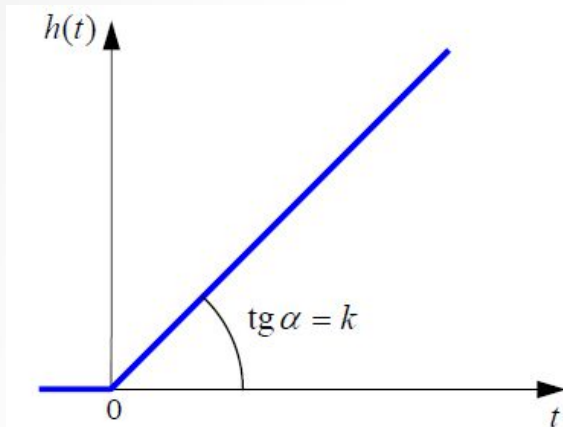
$$h(t) = k \cdot t \quad - \text{ Переходная характеристика}$$

$$g(t) = k \quad (\text{при } t \geq 0) \quad - \text{ Импульсная характеристика}$$

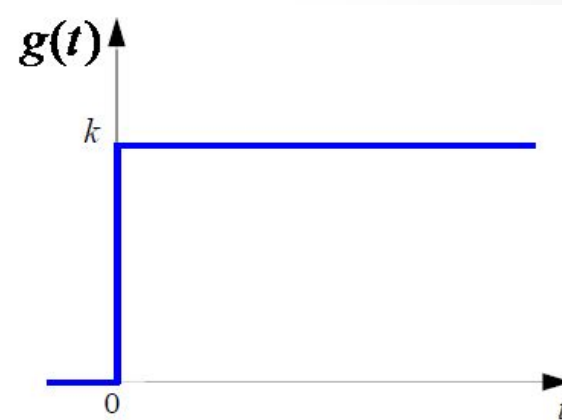
$$W(j\omega) = k \cdot \omega \cdot e^{-j \cdot 90^\circ} \quad - \text{ АФЧХ}$$

$$L(\omega) = 20 \cdot \lg(k) - 20 \cdot \lg(\omega) \quad - \text{ ЛАЧХ}$$

# Интегрирующее звено

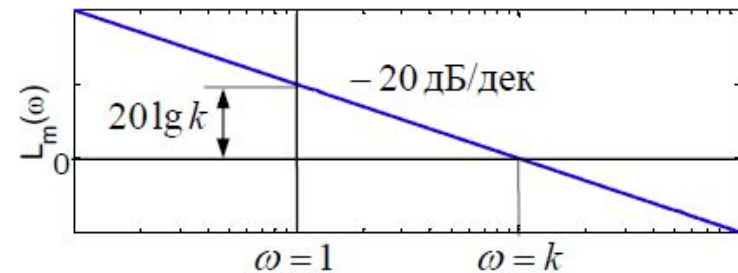
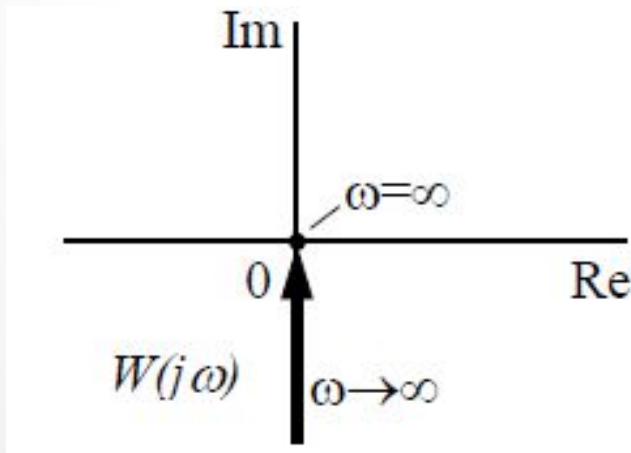


Переходная характеристика

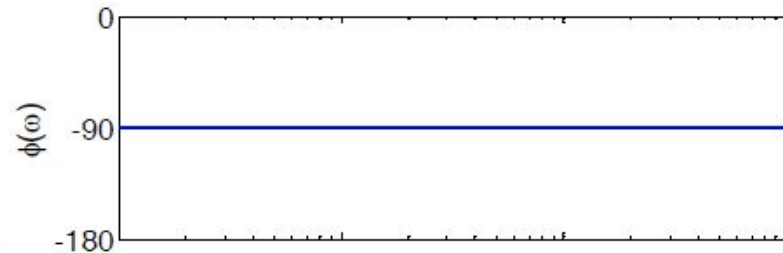


Импульсная характеристика

АФЧХ



ЛАЧХ



ДФЧХ

# Идеально дифференцирующее звено

$$W(p) = k \cdot p \quad - \text{Передаточная функция}$$

Физически не реализуемое, так как звено реагирует не на изменение самой входной величины, а на изменение ее производной, то есть на тенденцию развития событий.

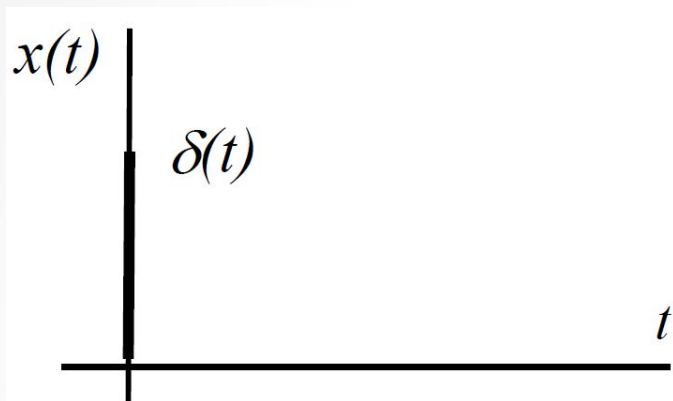
$$h(t) = \delta(t) \cdot k \quad - \text{Переходная характеристика}$$

$$g(t) = \frac{d\delta(t)}{dt} k \quad - \text{Импульсная характеристика}$$

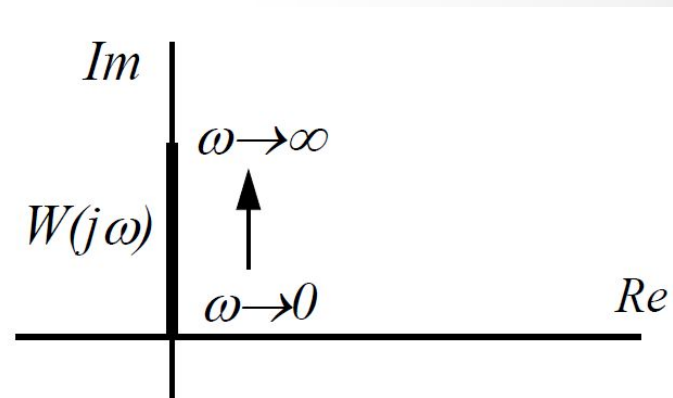
$$W(j\omega) = k \cdot \omega \cdot e^{-j \cdot 90^\circ} \quad - \text{АФЧХ}$$

$$L(\omega) = 20 \cdot \lg(k) + 20 \cdot \lg(\omega) \quad - \text{ЛАЧХ}$$

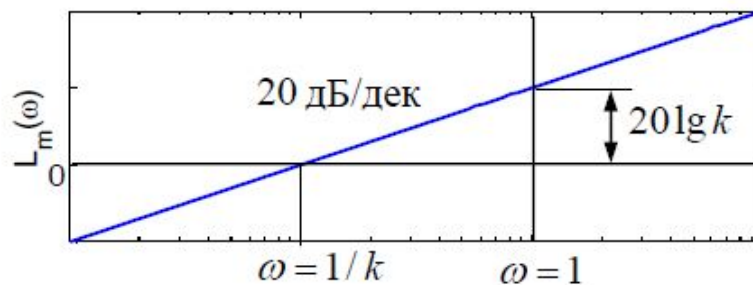
# Идеально дифференцирующее звено



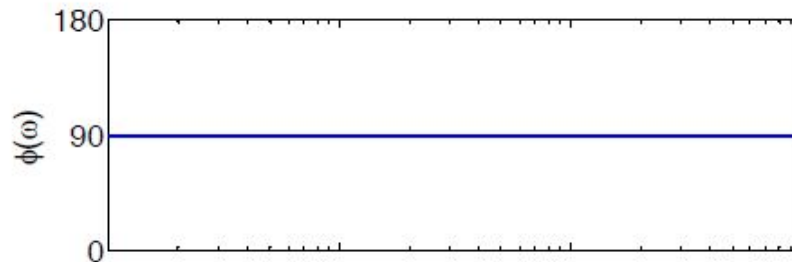
Переходная характеристика



АФЧХ



ЛАЧХ



ЛФЧХ

# Форсирующее звено

$W(p) = k \cdot (T \cdot p + 1)$  - Передаточная функция

Физически не реализуемое

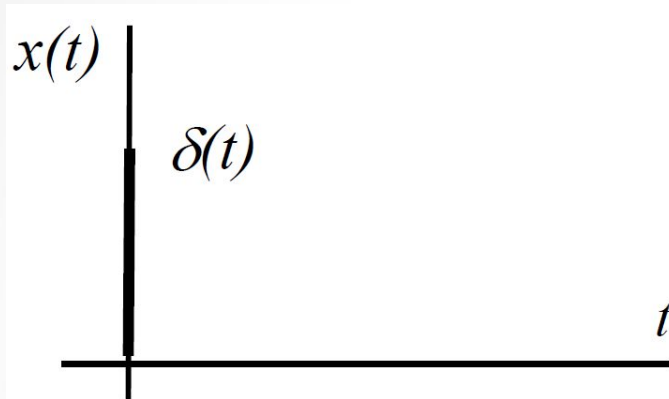
$h(t) = k \cdot (T \cdot \delta(t) + 1(t))$  - Переходная характеристика

$W(j\omega) = k \sqrt{1 + (\omega \cdot T)^2} \cdot e^{j \cdot \arctg(\omega T)}$  - АФЧХ

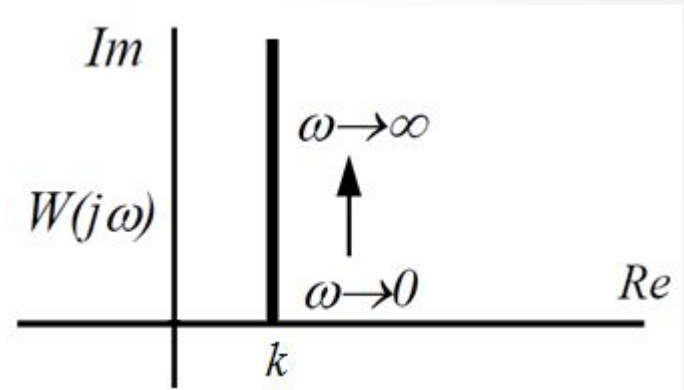
$L(\omega) = 20 \cdot \lg(k) + 20 \cdot \lg(\sqrt{1 + (\omega T)^2})$  - ЛАЧХ



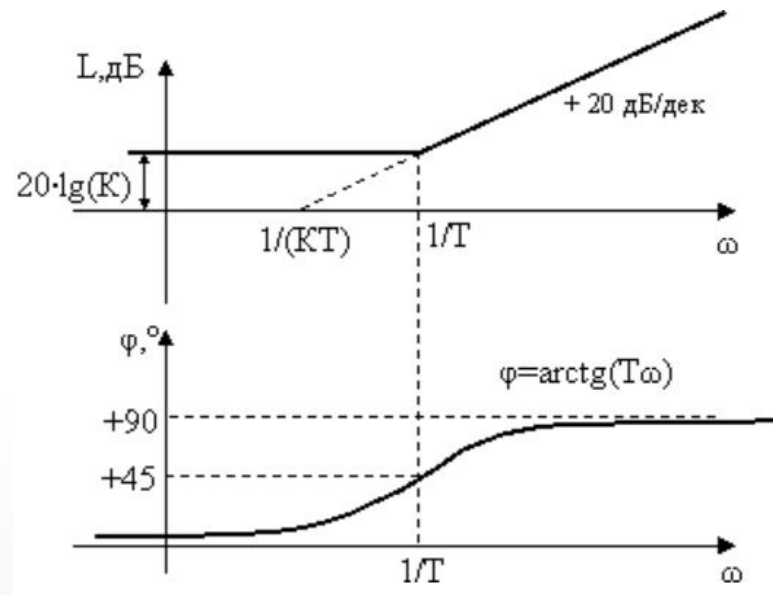
# Форсирующее звено



Переходная характеристика



АФЧХ



ЛАЧХ

ЛФЧХ

# Построение ЛАЧХ

Рассмотрим звено второго порядка с передаточной функцией:

$$W(p) = \frac{k(T_2 p + 1)}{(T_1 p + 1)(T_3 p + 1)}, \quad T_1 > T_2 > T_3$$

1) Представим данную передаточную функцию в виде произведения

$$W(p) = k \cdot \frac{1}{(T_1 p + 1)} \cdot (T_2 p + 1) \cdot \frac{1}{(T_3 p + 1)}$$

2) Согласно первому свойству ЛАЧХ, получим:

$$L(\omega) = 20 \cdot \lg(A_1(\omega)) + 20 \cdot \lg(A_2(\omega)) + 20 \cdot \lg(A_3(\omega)) + 20 \cdot \lg(A_4(\omega))$$

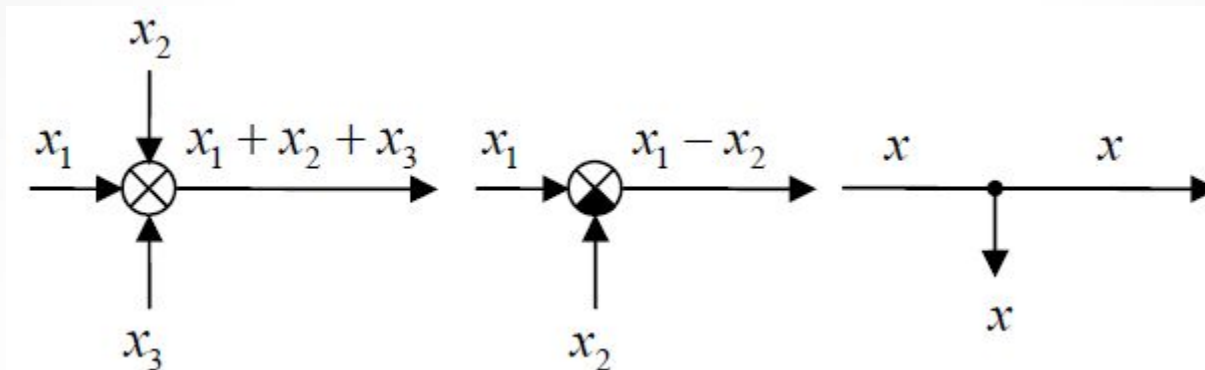
3) Определяем сопрягающие частоты. Частоты на, которых «подключаются» соответствующие звенья.

$$\omega_{c1} = \frac{1}{T_1}, \quad \omega_{c2} = \frac{1}{T_2}, \quad \omega_{c3} = \frac{1}{T_3}, \quad \omega_{c4} = \frac{1}{T_4}.$$

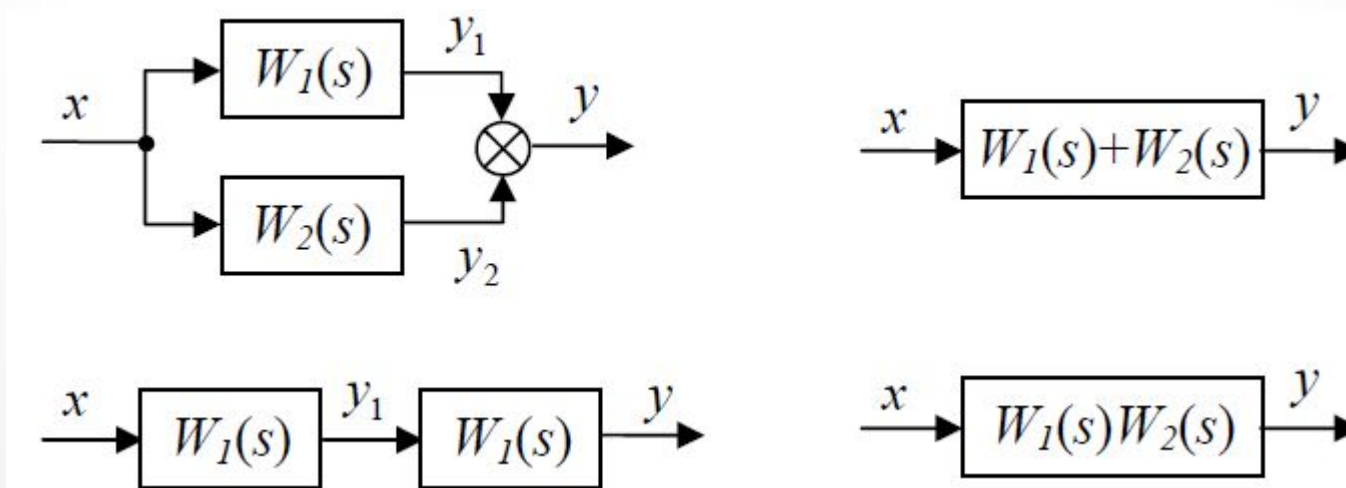
# Структурные схемы

# Структурное преобразование схем

Разветвление сигнала:

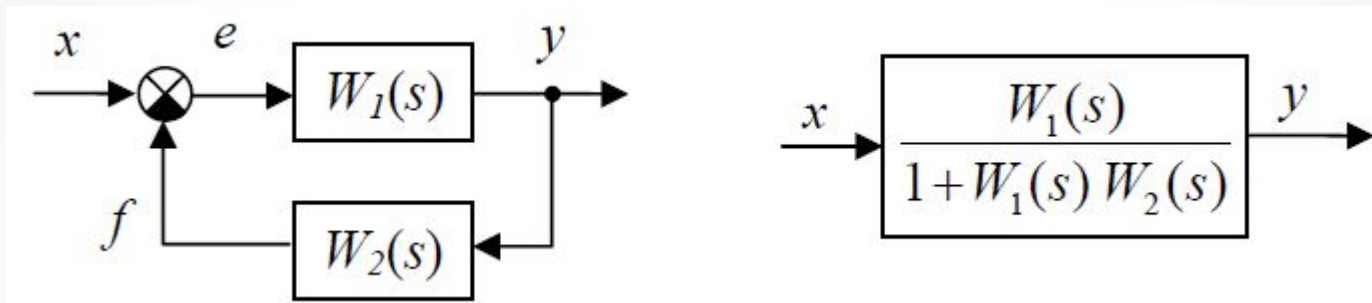


Параллельное и последовательное соединение звеньев:



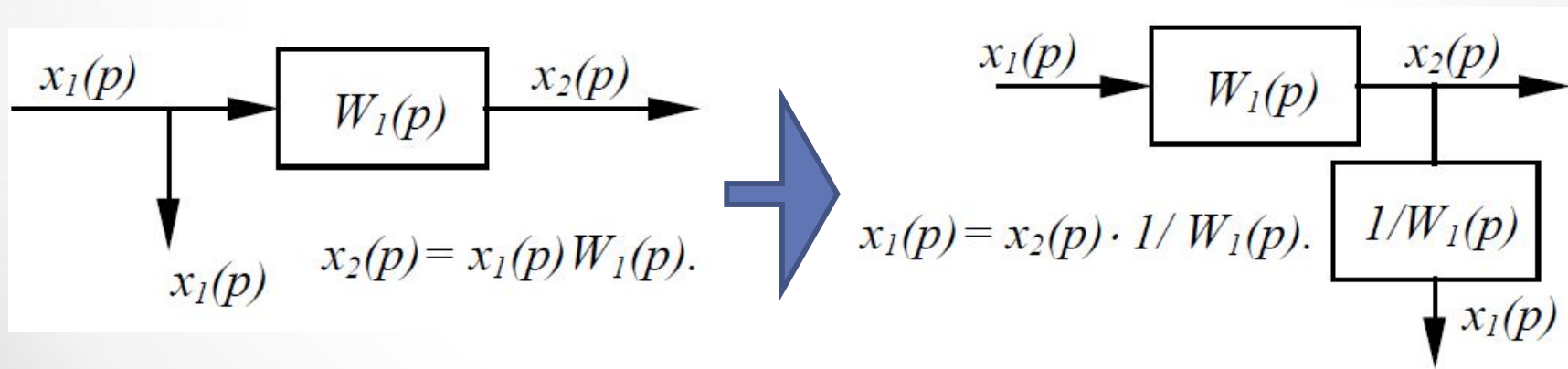
# Структурное преобразование схем

Для контура с отрицательной обратной связью:



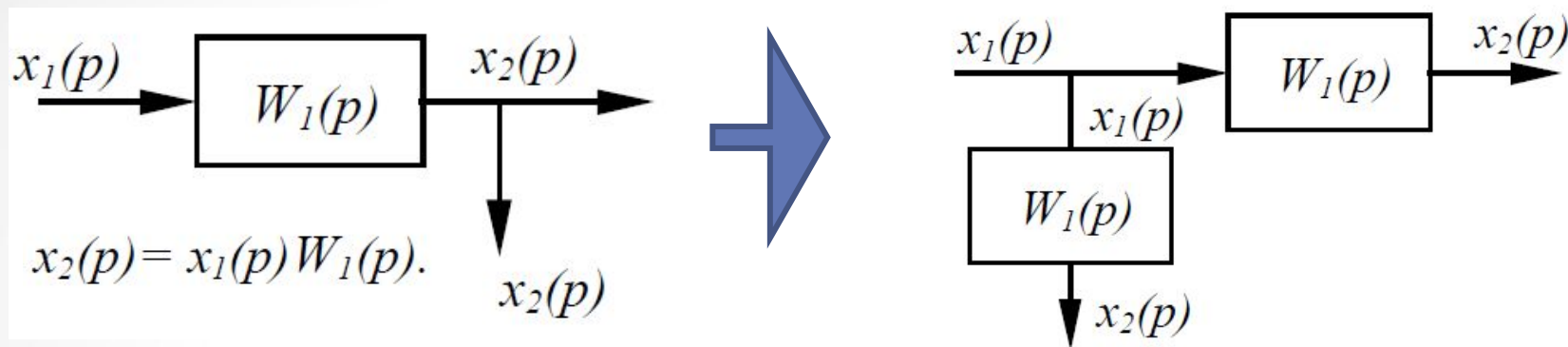
Если обратная связь положительная то в знаменателе будет стоять знак «минус».

Прямой перенос сигнала через ПФ:

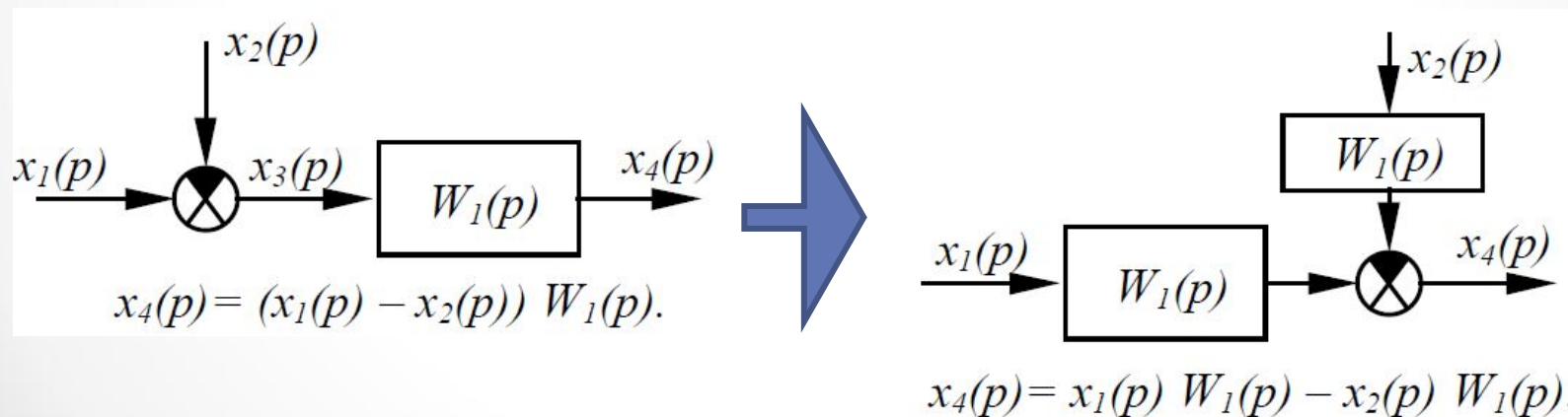


# Структурное преобразование схем

Обратный перенос сигнала через ПФ:

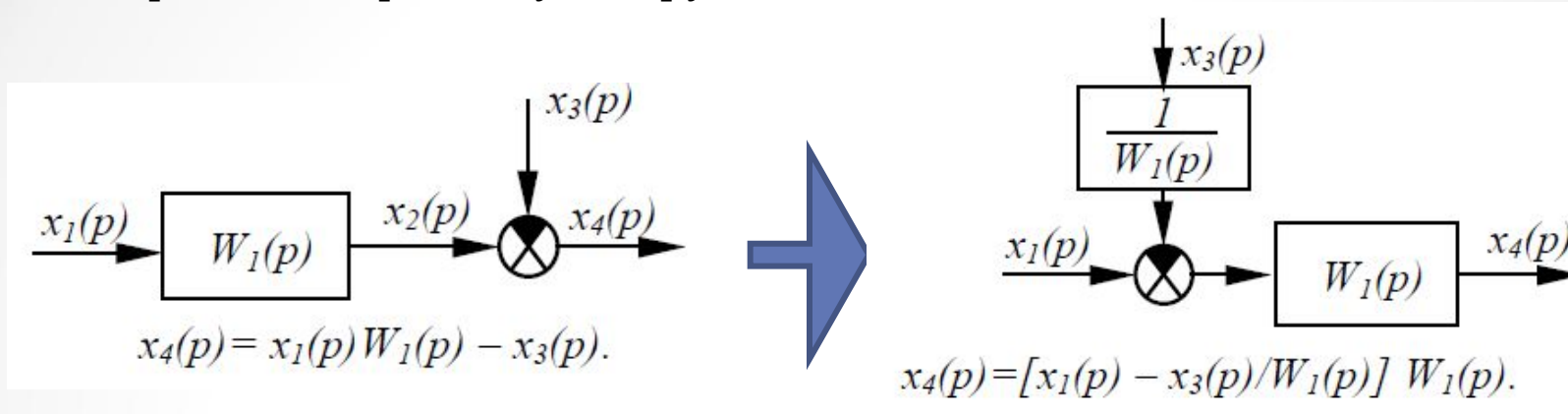


Прямой перенос суммирующего звена:

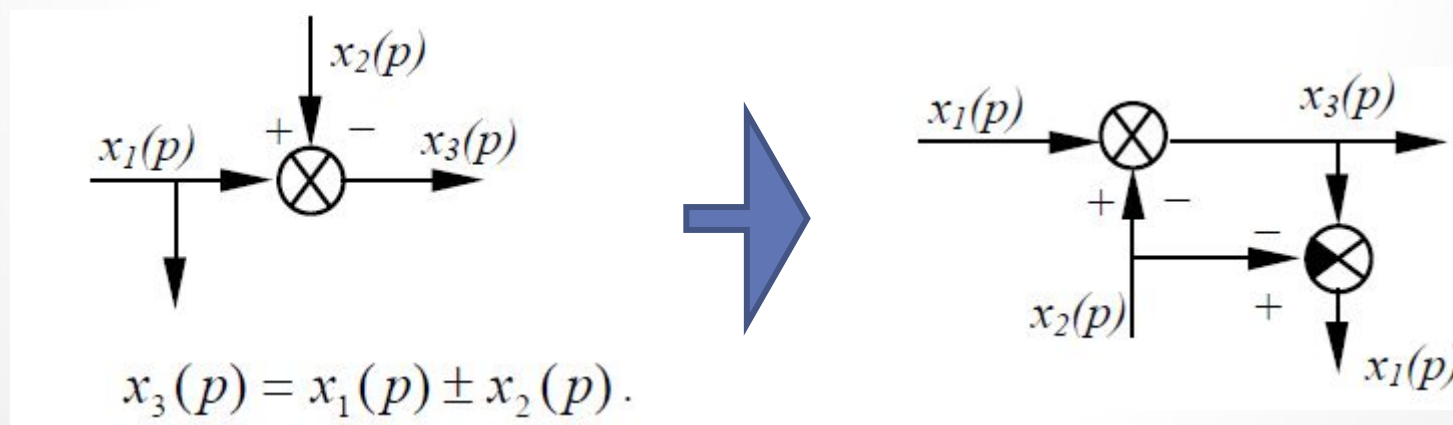


# Структурное преобразование схем

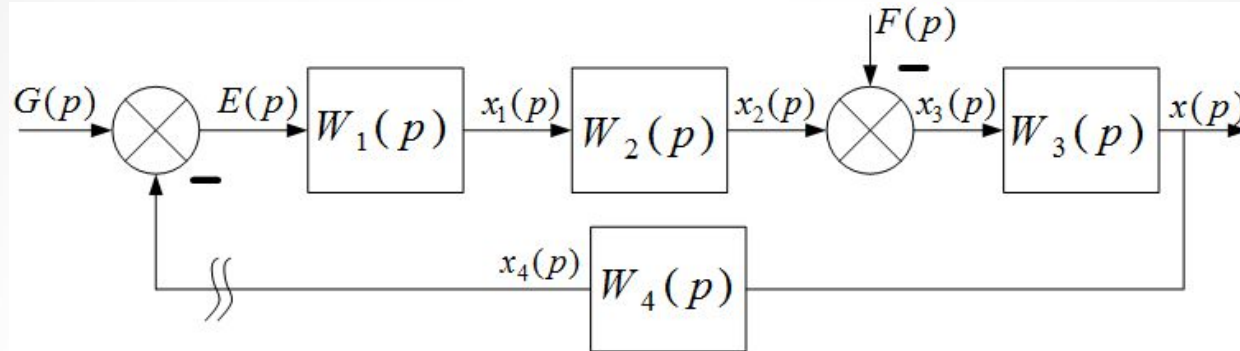
Обратный перенос суммирующего звена:



Прямой перенос суммирующего звена:



# Передаточные функции систем



Передаточная функция по управлению

$$W_y(p) = \frac{W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot W_3(p)}{1 + W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot W_3(p) \cdot W_4(p)}$$

Передаточная функция по возмущающему воздействию:

$$W_F(p) = -\frac{W_3(p)}{1 + W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot W_3(p) \cdot W_4(p)}$$

Передаточная функция по рассогласованию:

$$W_E(p) = \frac{1}{1 + W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot W_3(p) \cdot W_4(p)}$$

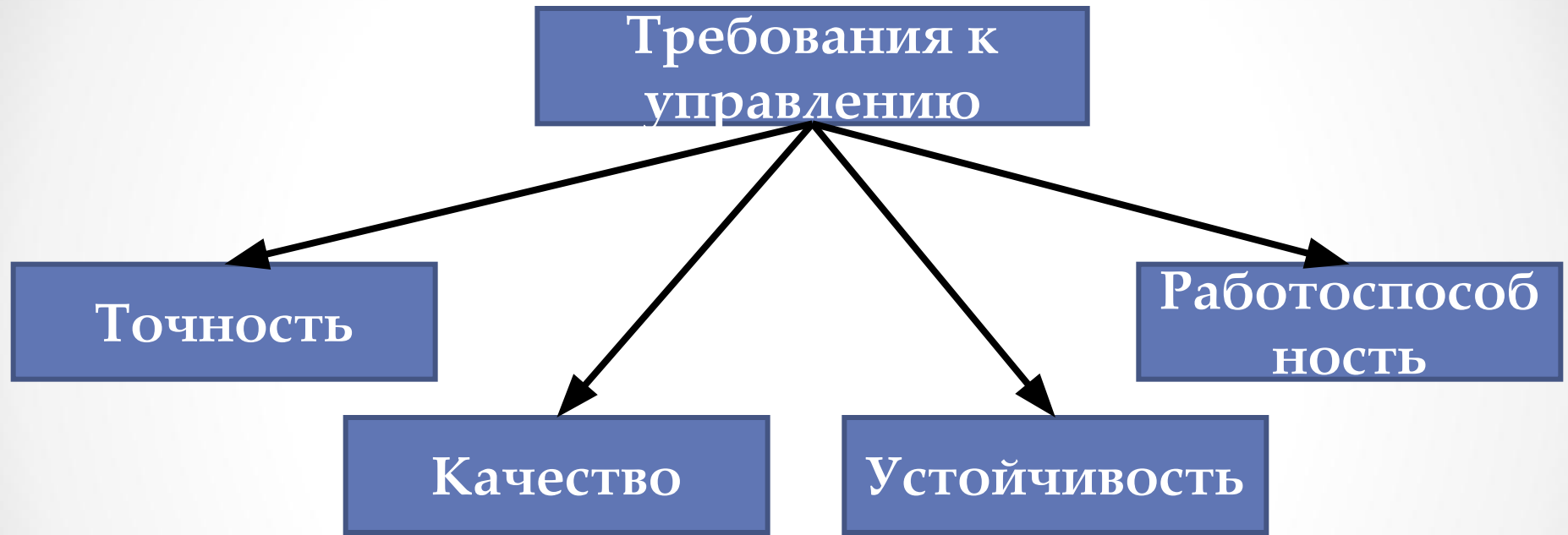
$$x(p) = W_y(p) \cdot G(p) + W_F(p) \cdot F(p)$$

$$\left. \begin{aligned} E(p) &= G(p) - x_4(p), \\ x_1(p) &= E(p) \cdot W_1(p), \\ x_2(p) &= x_1(p) \cdot W_2(p), \\ x_3(p) &= x_2(p) - F(p), \\ x(p) &= x_3(p) \cdot W_3(p), \\ x_4(p) &= x(p) \cdot W_4(p). \end{aligned} \right\}$$



# Анализ САУ

# Анализ САУ



# Критерии устойчивости (критерий Гурвица)

Характеристическое уравнение замкнутой САУ:

$$\Delta(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n$$

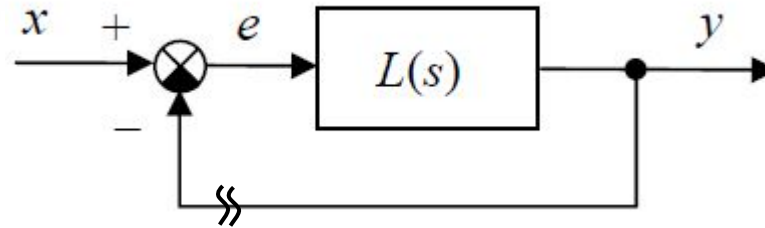
Все корни полинома  $\Delta(s)$  имеют отрицательные вещественные части тогда и только тогда, когда все  $n$  главных миноров матрицы  $H_n$  (определителей Гурвица) положительны.

Пример для полинома пятого порядка ( $n=5$ ):

$$H_5 = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 \end{bmatrix} \quad (a_0 > 0)$$

$$D_1 = a_1 > 0, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0, \quad D_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix} > 0.$$

# Критерии устойчивости (критерий Найквиста)



Система устойчива тогда и только тогда, когда годограф разомкнутой системы  $L(j\omega)$  не охватывает точку  $(-1; 0j)$ .

