

# ОТКРЫТЫЙ УРОК ПО ТЕМЕ: «СТЕПЕНИ И ЛОГАРИФМЫ»

Подготовила:  
Понарьина Е.В.  
Преподаватель математики  
ГОБУ СПО ВО «Воронежский авиационный техникум им. В.  
П.Чкалова»

# Цели урока:

- ▣ **Образовательные:** обобщить и закрепить знания учащихся о понятиях степени и логарифма; совершенствовать и углубить знания учащихся по данной теме; научить применять свойства логарифмов при решении задач.
- ▣ **Воспитательные:** показать практическую значимость логарифмов и степеней; привить навыки работы в микрогруппах; воспитывать чувство ответственности, взаимоподдержки и взаимопроверки; формировать адекватную самооценку.
- ▣ **Развивающие:** сформировать умение сравнивать и обобщать, выделять главное; развить умение логически мыслить, делать выводы.

# Степени

- ✍ С натуральным показателем
- ✍ С целым показателем
- ✍ С рациональным показателем
- ✍ С иррациональным показателем
- ✍ С действительным показателем

Степень с натуральным показателем	$a^1 = a$ $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ раз}}, n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}$	
Степень с целым показателем	$a^0 = 1, a \neq 0$ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$	$3^{-2} = \frac{1}{9}; (-1,2)^0 = 1;$ $(\frac{2}{5})^{-3} = (\frac{5}{2})^3 = \frac{125}{8}.$
Степень с рациональным показателем для неотрицательного числа $a$	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$  Если $m < 0$ , то $a > 0$ .  Если $m > 0$ , то $a \geq 0$ .	$3^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{9}; 0^{\frac{3}{5}} = 0;$ $25^{\frac{3}{2}} = \sqrt{25^3} = 125;$ $(0,04)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{0,04} = 0,2;$ $(-27)^{\frac{1}{3}}$ не определена.
Степень с иррациональным показателем	$3^3 < 3^\pi < 3^4$ $3^{3,1} < 3^\pi < 3^{3,2}$ $3^{3,14} < 3^\pi < 3^{3,15}$ ... $(\pi = 3,1415 \dots)$	$(0,3)^2 < (0,3)^{\sqrt{2}} < (0,3)^1$ $(0,3)^{1,5} < (0,3)^{\sqrt{2}} < (0,3)^{1,4}$ $(0,3)^{1,42} < (0,3)^{\sqrt{2}} < (0,3)^{1,41}$ ... $(\sqrt{2} = 1,4142 \dots)$
Степень с действительным показателем	$a^r, r \in \mathbb{R} \begin{cases} r < 0 \\ a > 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} r > 0 \\ a \geq 0 \end{cases}$	

Степени с любыми действительными показателями обладают всеми привычными свойствами степеней.

### Свойства степеней

$$a^p \cdot a^r = a^{p+r};$$

$$a^p : a^r = a^{p-r};$$

$$a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r;$$

$$(a^p)^r = a^{p \cdot r};$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-r} = \left(\frac{b}{a}\right)^r;$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}.$$

Операция нахождения степени называется **ВОЗВЕДЕНИЕМ В СТЕПЕНЬ**



**Логарифмом** положительного числа  $b$  по основанию  $a$  называется показатель степени, в которую нужно возвести  $a$ , чтобы получить  $b$ .

$$\log_a b = c \quad (a > 0, a \neq 1, b > 0)$$

**тогда и**

**только тогда, когда**  $a^c = b$ .

## Свойства логарифмов

$$\log_a 1 = 0;$$

$$\log_a a = 1;$$

$$\log_a \frac{1}{a} = -1;$$

$$\log_a a^m = \frac{1}{m};$$

$$\log_a a^m = m;$$

$$\log_a a^m a^n = \frac{n}{m}.$$

### Основные соотношения

Логарифм произведения:

$$\log_c(ab) = \log_c a + \log_c b;$$

Логарифм частного:

$$\log_c \left(\frac{a}{b}\right) = \log_c a - \log_c b;$$

Логарифм степени:

$$\log_a b^m = m \cdot \log_a b;$$

Переход к новому основанию:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

### Дополнительные соотношения

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a};$$

$$\log_a b^n = \frac{n}{m} \cdot \log_a b;$$

$$\frac{\log_n b}{\log_n c} = \frac{\log_m b}{\log_m c} = \log_c b;$$

$$\log_n b \cdot \log_m c = \log_m b \cdot \log_n c;$$

$$a^{\log_n b} = b^{\log_n a}.$$



Операция нахождения  
логарифма называется  
**логарифмированием**



# Свойства степеней и логарифмов связаны между собой:

Свойства степеней	Свойства логарифмов
$a^{b_1} \cdot a^{b_2} = a^{b_1+b_2}$	$\log_a(c_1 c_2) = \log_a c_1 + \log_a c_2$
$a^{b_1} : a^{b_2} = a^{b_1-b_2}$	$\log_a \left( \frac{c_1}{c_2} \right) = \log_a c_1 - \log_a c_2$
$(a^p)^r = a^{p \cdot r}$	$\log_a b^r = r \cdot \log_a b$
$\sqrt[n]{a^b} = a^{\frac{b}{n}}$	$\log_a \sqrt[n]{c} = \frac{1}{n} \log_a c$

# Сравните:

Возведение в степень	Логарифмирование
$5^2 = 25$	$\log_5 25 = 2$
$10^3 = 1000$	$\log_{10} 1000 = 3$
$0,3^4 = 0,0081$	$\log_{0,3} 0,0081 = 4$

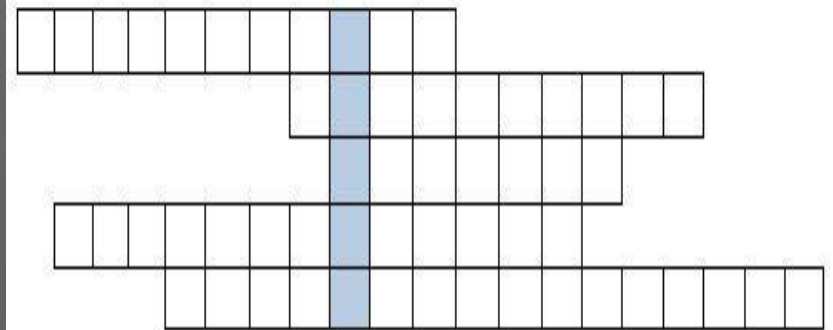
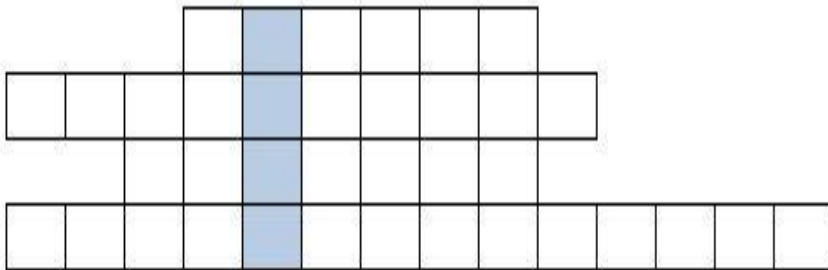
## **Выводы.**

1. Операция логарифмирования является обратной по отношению к возведению в степень с соответствующим основанием.
2. Вычисление логарифма можно свести к решению некоторого показательного уравнения.

# Кроссворды

1. Есть у любого слова, у растения, может быть  $n$  – ой степени.
2. Как можно иначе назвать арифметический корень второй степени?
3. Так называют выражение  $x^n$ .
4. Положительный корень.

1. Как называется логарифм  $\ln b$ ?
2. Как называется логарифм по основанию 10?
3. Как называется формула  $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ ?
4. Для каких чисел определен логарифм?





# Историческая справка

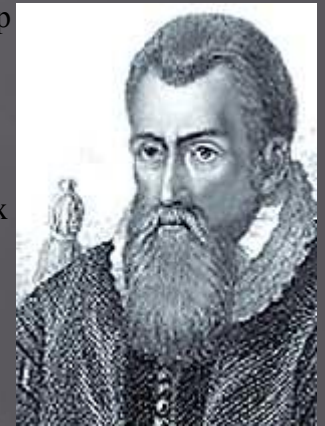
## О СТЕПЕНЯХ

- Положительные дробные показатели первым использовал французский ученый Н.Орем (1323-1382).
- Нулевой и целые отрицательные показатели появились более чем через 100 лет и также во Франции (Н.Шюке).
- Зачем вводятся степени с произвольным показателем?**
- 1. С помощью степеней с рациональным показателем можно свободно выполнять преобразования.
- 2. Есть много величин, зависящих от времени  $t$ , значения которых при  $t=0,1,2,3,\dots, n,\dots$  составляют геометрическую прогрессию со знаменателем  $q > 0: a_0, a_0q, a_0q^2, \dots$
- В формуле  $a_n = a_0q^n$  число  $n$  является натуральным числом. Однако часто оказывается так, что данная величина  $a=a(t)$ , меняется непрерывно со временем и ее зависимость от времени выражается аналогичной формулой где время  $t$  принимает не только натуральные, но любые действительные значения.

## О ЛОГАРИФМАХ

- Первые таблицы логарифмов были фактически построены немецким математиком М.Штифелем (1487-1567).

Шотландский математик Дж. Непер в работе «Описание удивительной таблицы логарифмов» (1614) изложил свойства логарифмов, правила пользования таблицей и привел примеры вычислений. С тех пор долгое время логарифмы называли «неперовыми». Независимо от Дж.Непера швейцарский математик, астроном и часовой мастер И.Бюрги (1552-1632), работавший с великим И.Кеплером, опубликовал в 1620 году аналогичные, хотя и менее совершенные, логарифмические таблицы.



# Матричная таблица

		1	2	3	4	5
а)	$\log_7 x = -1$	1	7	$\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{7}$	-1
б)	$\log_x 16 = 2$	4	8	$\sqrt{2}$	2	1
в)	$\log_5 x \geq -2$	$(0; \infty)$	$[\frac{1}{25}; \infty)$	$(2; \infty)$	$[-2; \infty)$	$(-\infty; -2]$
г)	$x^3 = 8$	1	0	-2	2	-4
д)	$7^x = \frac{1}{49}$	-4	2	4	1	-2



# ОТВЕТЫ

	1	2	3	4	5
а)			+		
б)	+				
в)		+			
г)				+	
д)					+

# Заполните пропуски

$$\log_3 9 = \square, 3^2 = \square$$

$$\log_{11} \square = 1, 11^1 = \square$$

$$\log_7 49 = \square, 7^2 = \square$$

$$\log_{0,5} \frac{1}{2} = \square, \frac{1^\square}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\log_2 \square = 0, 2^0 = \square$$

$$\log_{20} 20 = \square, 20^\square = 20$$

# Сверьте ответы

$$\log_3 9 = 2, 3^2 = 9$$

$$\log_{11} 11 = 1, 11^1 = 11$$

$$\log_7 49 = 2, 7^2 = 49$$

$$\log_{0,5} \frac{1}{2} = 1, \frac{1^1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\log_2 1 = 0, 2^0 = 1$$

$$\log_{20} 20 = 1, 20^1 = 20$$

# Использование степеней с произвольным показателем при решении задач

1. Вычисление степеней через корни:

$$1) \left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{9}{4}} = \sqrt[3]{2,25};$$

$$2) a^{\frac{7}{6}} = a^{1+\frac{1}{6}} = a\sqrt[6]{a}$$

2. Приведение к одному основанию:

Запишем числа  $9^{\frac{1}{3}}$ ,  $27^{-1}$ ,  $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{3}{4}}$ ,  $\sqrt[3]{81}$  в виде степеней числа 3 с рациональным показателем:

$$9^{\frac{1}{3}} = (3^2)^{\frac{1}{3}}, \quad 27^{-1} = (3^3)^{-1} = 3^{-3},$$
$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{3}{4}} = (3^{-1})^{-\frac{3}{4}} = 3^{\frac{3}{4}}, \quad \sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{3^4} = 3^{\frac{4}{3}}.$$

3. Преобразование выражений:

$$\frac{x^{\frac{4}{3}} - y^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}} = \frac{\left(x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}\right)\left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right)}{x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}} =$$
$$\frac{\left(x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}\right)\left(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}\right)\left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right)}{x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}} =$$
$$= \left(x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}\right)\left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right).$$

4. Решение простейших уравнений:

$$1) x^{\frac{3}{4}} = 2 \Rightarrow x = 2^{\frac{4}{3}};$$

$$2) (x-1)^{-\frac{2}{3}} = 3 \Rightarrow x-1 = 3^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow x = 1 + 3^{-\frac{3}{2}}$$

# Применение свойств логарифмов

1. Вычисление логарифмов:

$$1) \log_2 256 = \log_2 2^8 = 8;$$

$$2) \lg 0,001 = \lg 10^{-3} = -3;$$

$$3) \lg \sqrt[3]{10} = \frac{1}{3} \lg 10 = \frac{1}{3}.$$

2. Логарифмирование:

$$\text{Дано: } A = (100a^{\frac{2}{3}}b)^3.$$

Найти:  $\lg A$ .

Решение:

$$\lg A = 3 \cdot \left( \lg 100 + \frac{2}{3} \lg a + \lg b \right) = 6 + 2 \lg a + 3 \lg b.$$

3. Потенцирование (нахождение выражения по его логарифму)

$$\log_2 A = -1 + 2 \log_2 a - 3 \log_2 b \Rightarrow$$

$$\log_2 A = \log_2 \frac{1}{2} + \log_2 a^2 - \log_2 b^3 =$$

$$= \log_2 \frac{a^2}{2b^3} \Rightarrow A = \left( \frac{1}{2} \cdot a^2 \right) : b^3 = \frac{a^2}{2b^3}.$$

4. Переход к одному основанию:

$$\text{Дано: } A = \log_{\frac{1}{4}} a - \log_{\sqrt{2}} a + 2 \log_8 a.$$

Перейти к основанию 2.

Решение:

Заметим, что  $\log_2 2^k = k$  – это поможет устно находить модуль перехода.

$$A = \frac{\log_2 a}{\log_2 \frac{1}{4}} - \frac{\log_2 a}{\log_2 \sqrt{2}} + 2 \frac{\log_2 a}{\log_2 8} =$$

$$= \log_2 a \left( \frac{1}{-2} - \frac{1}{1/2} + \frac{2}{3} \right) =$$

$$\log_2 a \left( -\frac{1}{2} - 2 + \frac{2}{3} \right) = -\frac{11}{6} \log_2 a.$$

# Работа в группах

## ОСНОВНЫЕ ЗАДАНИЯ

1-ый ряд

$$36^{\log_6 5} + 10^{1-\log_{10} 2} - 8^{\log_2 3}$$

2-й ряд

$$16^{1+\log_4 5} + 4^{\frac{1}{2}\log_2 3 + 3\log_8 5}$$

3-ий ряд

$$(\log_2 12 - \log_2 3 + 3^{\log_3 8})^{\lg 5}$$

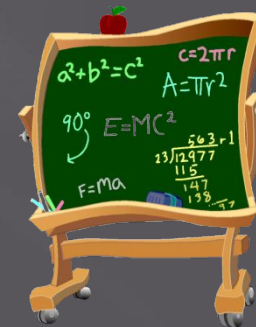
## ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

1.

$$(3\lg 2 + \lg 0,25) \div (\lg 14 - \lg 7)$$

2.

$$(\log_6 2 + \log_6 3 + 2^{\log_2 4})^{\log_6 7}$$



## Домашнее задание

Повторить свойства степени и логарифма.

Решить примеры

$$1) \log_{216} 27 + \log_{36} 16 + \log_6 3.$$

$$2) \log_{0,2} 125 : \log_{16} 64 \cdot \log_3 81.$$

$$3) \log_{\frac{1}{2}} 16 \cdot \log_5 \frac{1}{25} : 9^{\log_3 2}.$$

$$4) \log_{\frac{1}{3}} 9 \cdot \log_2 \frac{1}{8} : 7^{2 \log_{49} 2}.$$

# Литература

- ▣ <http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%EB%D3%D0%F0%D8%F4%EC>
- ▣ Алгебра и начала анализа. 10-11 класс. Учебник. Мордкович А.Г.  
(<http://www.alleng.ru/d/math/math52.htm>)