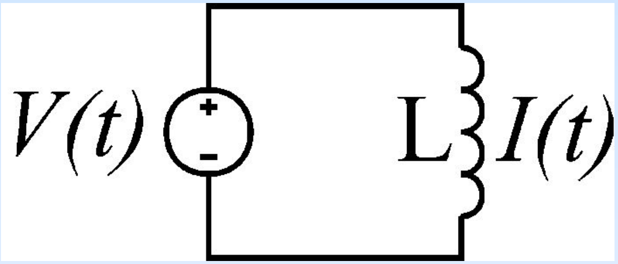
Анализ сигналов

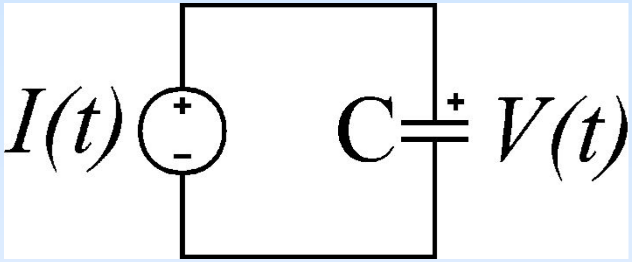
Лекции по курсу
«Электроника систем регистрации элементарных частиц»

Жуланов Владимир Викторович
тел. 329-47-32
e-mail: zhulanov@inp.nsk.su

Импульсные сигналы

$\int v(t)dt$ - мера воздействия сигнала на объект





$$I_L(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} V(\tau)d\tau$$

$$V_C(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} I(\tau)d\tau$$

$E = \int V^2(t)dt$ — энергия сигнала

Сигнал называется *<u>импульсным</u>*, если $0 < E < \infty$

Примеры импульсных сигналов

$$u(t) = \frac{1}{t_0} e^{-\pi\left(\frac{t}{t_0}\right)^2}$$ — *гауссов* импульс

$$\int u(t)dt = 1 \qquad \int u^2(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2}t_0}$$

$$u_0(t) = \lim_{t_0 \to 0}\left(\frac{1}{t_0} e^{-\pi\left(\frac{t}{t_0}\right)^2}\right)$$ — *единичный* импульс

формально единичный импульс не является импульсным сигналом

$$\int u_0(t)dt = 1 \qquad \int u_0^2(t)dt = \infty$$

$$S = v(t)dt$$ — *линейный* импульс

Периодические сигналы

$$u(t) = u(t+T)$$

<u>*Периодическим*</u> называется сигнал, повторяющийся через равные промежутки времени

Наименьшая величина сигнала, удовлетворяющая этому определению называется <u>*периодом*</u> сигнала

Интеграл периодического сигнала и интеграл квадрата периодического сигнала (энергия) расходятся, по этому при работе с периодическими сигналами используют средние значения по времени:

$$\overline{u} = \lim_{a\to\infty} \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} u(t)dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t)dt$$ — <u>*среднее по времени*</u> сигнала

$$\overline{u^2} = \lim_{a\to\infty} \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} u^2(t)dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u^2(t)dt$$ — <u>*средняя мощность*</u> сигнала

Случайные сигналы

Случайный сигнал порождается случайным процессом

Случайный сигнал часто называют выборочной функцией процесса

Случайный дискретный сигнал V принимает счетное количество значений $\mathrm{V_k}$

Частота появления данного значения сигнала называется ***вероятностью*** $\mathrm{p_k}$ значения $\mathrm{V_k}$

$$\sum p_k = 1$$ — по определению вероятности

$$\langle V \rangle = \sum V_k p_k$$ — *среднее значение* случайного дискретного сигнала

$$\langle V^2 \rangle = \sum V_k^2 p_k$$ — *средняя мощность* случайного дискретного сигнала

Если случайный сигнал принимает непрерывный ряд значений, то вместо вероятности p_k пользуются *плотностью вероятности* $P(v)$, которая определяется следующим образом

Случайный сигнал принимает значения в интервале (v_0, v_0+dv) с вероятностью $P(v_0)*dv$

$\int_{v_1}^{v_2} P(v)dv$ — вероятность попадания величины сигнала в интервал (v_1,v_2)

$\int_{v_1}^{v_2} P(v)dv = 1$ — по определению плотности вероятности

$\langle v \rangle = \int vP(v)dv$ — *среднее значение* случайного сигнала

$\langle v^2 \rangle = \int v^2 P(v)dv$ — *средняя мощность* случайного сигнала

Стационарные случайные процессы

Статистические характеристики сигнала, порожденного стационарным случайным процессом, не меняются с течением времени

Выборочная функция, взятая из стационарного процесса, не позволяет определить, какому времени она принадлежит

Рассмотрим случайный сигнал v, имеющий плотность вероятности $P(v)$

Для такого сигнала отклонение от среднего равняется:

$$v_d = v - \bar{v}$$

Так как среднее значение отклонения (v_d) равно 0, то средний квадрат сигнала (средняя мощность)

$$\overline{v^2} = \int (\bar{v} + v_d)^2 P(v) dv = \int (\bar{v}^2 + 2\bar{v} v_d + v_d^2) P(v) dv = \bar{v}^2 + \overline{v_d^2}$$

Средний квадрат сигнала равен квадрату его среднего плюс средний квадрат отклонения

Вычислим среднюю мощность для важного частного случая — *нормального (гауссова) распределения вероятности*:

$$P_d(v) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{v}{\sigma})^2}$$

σ — стандартное отклонение распределения

Такое распределение имеет, например, напряжение тепловых шумов

Среднее значение сигнала равно 0 — распределение симметрично относительно нуля. Если сигнал имеет ненулевой средний уровень, то средняя мощность возрастет на квадрат среднего: $\overline{v}^2$

Используя табличный интеграл, получаем:

$$\overline{v^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} v^2 P_d(v)dv = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} v^2 e^{-\frac{1}{2}(\frac{v}{\sigma})^2} dv = \sigma^2$$

У стационарного случайного процесса с нормальным распределением амплитуд средняя мощность переменной составляющей равна квадрату стандартного отклонения, называемому дисперсией нормального распределения

Четная и нечетные составляющие

Сигнал можно разбить на четную и нечетные составляющие:

$$v = v_e + v_o$$

$$v_e(t) = 1/2\big(v(t) + v(-t)\big)$$ — четная составляющая

$$v_o(t) = 1/2\big(v(t) - v(-t)\big)$$ — нечетная составляющая

Так как $v_e v_o$—нечетная функция, то

$$\overline{v^2} = \overline{(v_e^2 + 2v_e v_o + v_o^2)} = \overline{v_e^2} + \overline{v_o^2}$$

Средняя мощность сигнала равна сумме средних мощностей его четной и нечетной составляющих

Действительная и мнимая составляющие

Сигнал, мгновенное значение которого является комплексной величиной, описывается суммой действительной и мнимой составляющих: $\dot{v} = v_r + jv_i$

$\dot{v}^* = v_r - jv_i$ —комплексно-сопряженное с $\dot{v}$

$v_r = 1/2(\dot{v} + \dot{v}^*)$ —действительная составляющая $\dot{v}$

$v_i = 1/2(\dot{v} - \dot{v}^*)$ —мнимая составляющая $\dot{v}$

$$\left|\dot{v}\right|^2 = \dot{v}\dot{v}^* = v_r^2 + v_i^2$$

Мощность комплексного сигнала равна сумме мощностей действительной и мнимой составляющих

Сравнение сигналов

Для того, чтобы ответить на вопрос, насколько два сигнала похожи, удобно воспользоваться аналогией с геометрией

Было показано, что сигнал можно разложить на составляющие, причем средняя мощность (энергия) сигнала равна сумме средних мощностей (энергий) составляющих. Так же и в геометрии, квадрат длины вектора равен сумме квадратов его проекций в ортогональной системе координат

Для двух векторов v_1, v_2, ответ на вопрос: какая часть вектора v_1 лежит на направлении вектора v_2, состоит в том, что эта часть равна проекции $c_{12}v_2$ вектора v_1 на линию v_2

Коэффициент c_{12} можно найти, минимизируя квадрат модуля вектора разности $r^2=(v_1-cv_2)^2$. Значение, на котором будет достигнут этот минимум, и будет искомым коэффициентом. При этом вектор r будет ортогонален вектору v_2

Применительно к электрическим сигналам, для нахождения «проекции» сигнала $v_1(t)$ на сигнал $v_2(t)$ необходимо минимизировать среднюю мощность (энергию) сигнала разности:

$$r(t) = v_1(t) - cv_2(t)$$

Приравняем нулю производную квадрата этого сигнала:

$$\frac{d|r|^2}{dc} = \frac{d}{dc}\int \left(v_1 - cv_2\right)^2 dt = -2\int \left(v_1 - cv_2\right)v_2 dt = 0$$

$$\Rightarrow c_{12} = \frac{\int v_1 v_2 dt}{\int v_2^2}$$ Аналогично: $$c_{21} = \frac{\int v_1 v_2 dt}{\int v_1^2}$$

Коэффициенты c_{12}, c_{21} называют <u>*коэффициенты корреляции*</u>

Равенство нулю одного коэффициента влечет равенство нулю второго

$$C = c_{12}c_{21} = \frac{(\int v_1 v_2 dt)^2}{\int v_1^2 dt \int v_2^2 dt}$$

—квадрат нормированного «скалярного призведения» сигналов является удобной мерой сходства сигналов

Полученные соотношения можно распространить на комплексные сигналы:

$$\left|\dot{v}_1 - \dot{c}_{12}\dot{v}_2\right|^2 = (\dot{v}_1 - \dot{c}_{12}\dot{v}_2)(\dot{v}_1^* - \dot{c}_{12}^*\dot{v}_2^*)$$

$$\int\left|\dot{v}_1 - \dot{c}_{12}\dot{v}_2\right|^2 dt = \int\left|v_1\right|^2 dt - 2\,\mathrm{Re}\left[\dot{c}_{12}^*\int \dot{v}_1\dot{v}_2^* dt\right] + \left|\dot{c}_{12}\right|^2\int\left|\dot{v}_2\right|^2 dt$$

Представим средний интеграл и c_{12} в виде: $\int \dot{v}_1\dot{v}_2^* dt = Ae^{j\theta_1}, \dot{c}_{12} = \left|\dot{c}_{12}\right|e^{j\theta_2}$

Интеграл разностного сигнала будет минимален при максимальном значении действительной части в квадратных скобках $\Rightarrow \theta_1 = \theta_2$ и

$$\int\left|\dot{v}_1 - \dot{c}_{12}\dot{v}_2\right|^2 dt = \int\left|v_1\right|^2 dt - 2\left|\dot{c}_{12}\right|A + \left|\dot{c}_{12}\right|^2\int\left|\dot{v}_2\right|^2 dt$$

Это выражение принимает минимум при:

$$\left|\dot{c}_{12}\right| = \frac{A}{\int\left|\dot{v}_2\right|^2 dt} \Rightarrow \dot{c}_{12} = \frac{\int \dot{v}_1\dot{v}_2^* dt}{\int\left|\dot{v}_2\right|^2 dt}$$

Корреляционная функция

__Автокорреляционная функция__ (АКФ) импульсного сигнала:

$$\dot{\psi}(\tau) = \int \dot{v}(t)\dot{v}^*(t-\tau)dt = \int \dot{v}(t+\tau)\dot{v}^*(t)dt$$

$$\dot{\psi}(0) = \int \left|\dot{v}\right|^2 dt$$ — энергия сигнала

Взаимная *__корреляционная функция__* двух сигналов:

$$\dot{\psi}_{12}(\tau) = \int \dot{v}_1(t)\dot{v}_2^*(t-\tau)dt = \int \dot{v}_1(t+\tau)\dot{v}_2^*(t)dt$$

$$\dot{\psi}_{21}(\tau) = \int \dot{v}_2(t)\dot{v}_1^*(t-\tau)dt = \int \dot{v}_2(t+\tau)\dot{v}_1^*(t)dt$$

$$\dot{\psi}_{12}(0) = \int \dot{v}_1\dot{v}_2^* dt$$ — «скалярное произведение» сигналов

$$\tilde{\psi}_{12}(t) = \tilde{\psi}_{21}^{*}(-t)$$ в частности: $$\tilde{\psi}_{11}(t) = \tilde{\psi}_{11}^{*}(-t)$$

АКФ является симметричной функцией; причем ее действительная часть является четной функцией, а мнимая — нечетной

$$\tilde{c}_{12} = \frac{\tilde{\psi}_{12}(0)}{\tilde{\psi}_{22}(0)}, \tilde{c}_{21} = \frac{\tilde{\psi}_{21}(0)}{\tilde{\psi}_{11}(0)}$$

—корреляционные коэффициенты, определенные ранее

$$\int \tilde{\psi}_{12}(\tau)d\tau = \int\left(\int \tilde{v}_1(t)\tilde{v}_2^{*}(t-\tau)dt\right)d\tau = \left(\int \tilde{v}_1(t)dt\right)\left(\int \tilde{v}_2(t)dt\right)^{*}$$

Площадь под корреляционной функцией двух сигналов равна произведению площадей под функциями этих сигналов

Если один сигнал имеет конечную мощность, а другой—конечную энергию, то одно интегрирование можно заменить усреднением:

$$\overline{\tilde{\psi}_{12}} = \overline{\tilde{v}_1}\left(\int \tilde{v}_2(t)dt\right)^{*}$$

$$\dot{\varphi}(\tau) = \overline{\dot{v}(t)\dot{v}^*(t-\tau)} = \overline{\dot{v}(t+\tau)\dot{v}^*(t)}$$ — АКФ для сигналов конечной мощности

$$\dot{\varphi}_{12}(\tau) = \overline{\dot{v}_1(t)\dot{v}_2^*(t-\tau)} = \overline{\dot{v}_1(t+\tau)\dot{v}_2^*(t)}$$ — корреляционная функция для сигналов конечной мощности

$$\dot{\varphi}(0) = \overline{\left|\dot{v}(t)\right|^2} \qquad \dot{\varphi}_{12}(0) = \overline{\dot{v}_1\dot{v}_2^*}$$

$$\dot{\varphi}_{12}(\tau) = \dot{\varphi}_{21}^*(-\tau) \qquad \dot{\varphi}_{11}(\tau) = \dot{\varphi}_{11}^*(-\tau)$$

$$\dot{c}_{12} = \frac{\dot{\varphi}_{12}(0)}{\dot{\varphi}_{22}(0)} \qquad \dot{c}_{21} = \frac{\dot{\varphi}_{21}(0)}{\dot{\varphi}_{11}(0)} \qquad C = \dot{c}_{12}\dot{c}_{21} = \frac{\left|\dot{\varphi}_{12}(0)\right|^2}{\dot{\varphi}_{11}(0)\dot{\varphi}_{22}(0)}$$

$$c_{12}(\tau) = \frac{\varphi_{12}(\tau)}{\varphi_{22}(0)}$$ — коэффициент корреляции между $v_1(t)$ и $v_2(t-\tau)$

$$c_{21}(\tau) = \frac{\varphi_{21}(\tau)}{\varphi_{11}(0)}$$ — коэффициент корреляции между $v_2(t)$ и $v_1(t-\tau)$

Свертка

$$v = v_1 \otimes v_2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} v_1(\xi) v_2(t-\xi) d\xi$$ — *__свертка__* двух функций

Свойства свертки:

$$v_1 \otimes v_2 = v_2 \otimes v_1$$ — коммутативность

$$v_1 \otimes (v_2 \otimes v_3) = (v_1 \otimes v_2) \otimes v_3$$ — ассоциативность

$$v_1 \otimes (v_2 + v_3) = v_1 \otimes v_2 + v_1 \otimes v_3$$ — линейность

Для удобства введем обозначение: $f'(t) = f^*(-t)$

тогда:

$$\psi_{11} = v_1 \otimes v_1' = \psi_{11}' \qquad \psi_{12} = v_1 \otimes v_2' = \psi_{21}'$$

$\psi_{12,12} = \psi_{12} \otimes \psi_{12}'$ — АКФ корреляционной функции 2-х сигналов

$$\psi_{12,12} = (v_1 \otimes v_2') \otimes (v_1' \otimes v_2) = (v_1 \otimes v_1') \otimes (v_2 \otimes v_2')$$

$$\Rightarrow \psi_{12,12} = \psi_{11} \otimes \psi_{22} = \psi_{11,22}$$

Автокорреляционная функция корреляционной функции 2-х сигналов равна корреляционной функции автокорреляционных функций этих сигналов

Тригонометрический ряд Фурье для периодических сигналов

Разложение периодического сигнала в ряд Фурье — способ разложения сигнала на ортогональные составляющие

$$\{1, \cos(\omega_1 t), \cos(\omega_2 t), \ldots, \sin(\omega_1 t), \sin(\omega_2 t), \ldots\},$$

где $\omega_n = n * \dfrac{2\pi}{T}$ — частота *n*-ой составляющей (*n*-ой гармоники)

$$\overline{\cos(\omega_n t)\cos(\omega_m t)} = \begin{cases} 0, \text{при } \omega_n \neq \omega_m \\ 1/2, \text{ при } \omega_n = \omega_m \end{cases}$$

$$\overline{\sin(\omega_n t)\sin(\omega_m t)} = \begin{cases} 0, \text{при } \omega_n \neq \omega_m \\ 1/2, \text{ при } \omega_n = \omega_m \neq 0 \end{cases}$$

$$\overline{\cos(\omega_n t)\sin(\omega_m t)} = 0, \text{при любых } \omega_n, \omega_m$$

Величина *n*-ой гармоники определяется коэффициентом корреляции, называемыми коэффициентами ряда Фурье:

$$a_n = \frac{\overline{v(t)\cos(\omega_n t)}}{\overline{\cos^2(\omega_n t)}} = \frac{2}{T}\int_0^T v(t)\cos(\omega_n t)dt,\ n \geq 1$$

$$a_0 = 2\overline{v(t)} = \frac{2}{T}\int_0^T v(t)dt,$$

$$b_n = \frac{\overline{v(t)\sin(\omega_n t)}}{\overline{\sin^2(\omega_n t)}} = \frac{2}{T}\int_0^T v(t)\sin(\omega_n t)dt,\ n \geq 1$$

$$v(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(\omega_n t) + b_n\sin(\omega_n t)\right)$$ — ***ряд Фурье***

$$v(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{k} \Big(a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t) \Big) + \varepsilon_k(t) -$$ конечный ряд

Фурье, аппроксимация реального сигнала

$\varepsilon_k(t) -$ ошибка аппоксимации

$$\overline{v^2(t)} = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{k} \Big(a_n^2 + b_n^2 \Big) + \overline{\varepsilon_k^2(t)}$$

$v(t) = \dfrac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(\omega_n t - \varphi_n)$ – болеераспространенная форма записи ряда Фурье, где $c_0 = a_0, c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \varphi_n = \operatorname{arctg}\dfrac{b_n}{a_n}$

$$a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t) =$$

$$\sqrt{a_n^2 + b_n^2}\left(\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}\cos(\omega_n t) + \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}\sin(\omega_n t)\right) =$$

$$c_n\left(\cos(\varphi_n)\cos(\omega_n t) + \sin(\varphi_n)\sin(\omega_n t)\right)$$

Экспоненциальный ряд Фурье

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \dot{v}_n e^{j\omega_n t}, \text{ где } \omega_n = n\omega_1 = 2\pi n / T$$

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t) - \text{формула Эйлера}$$

$$\cos(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}, \sin(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$

$$\overline{e^{j\omega_n t}\left(e^{j\omega_m t}\right)^*} = \overline{e^{j(\omega_n - \omega_m)t}} = \begin{cases} 1, \text{ при } \omega_n = \omega_m \\ 0, \text{ при } \omega_n \neq \omega_m \end{cases}$$

$$v(t)=\frac{c_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{2}\left(e^{j(\omega_n t-\varphi_n)}+e^{-j(\omega_n t-\varphi_n)}\right)$$

$$v(t)=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n e^{j(\omega_n t-\varphi_n)}\text{, где } c_n=c_{-n},\omega_n=-\omega_{-n},\quad \varphi_n=-\varphi_{-n}$$

$$v(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\dot{v}_n e^{j\omega_n t}\text{, где } \dot{v}_n=\frac{1}{2}c_n e^{-j\varphi_n}=\frac{1}{2}(a_n-jb_n)$$

$$\dot{v}_n=\overline{v(t)e^{-j\omega_n t}}$$

$$\overline{v^2}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|\dot{v}_n\right|^2$$ —мощность периодического сигнала

АКФ периодического сигнала, представленного в виде экспоненциального ряда:

$$\varphi(\tau) = \overline{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{V}_n e^{j\omega_n t} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \dot{V}_m e^{j\omega_m (t-\tau)} \right)^*} = \overline{\sum_{n,m=-\infty}^{\infty} \dot{V}_n \dot{V}_m^* e^{j(\omega_n - \omega_m)t} e^{j\omega_m \tau}}$$

$$\varphi(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \dot{V}_n \right|^2 e^{j\omega_m \tau} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi_n e^{j\omega_m \tau}$$

$$\varphi(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi_n e^{j\omega_m \tau}$$ —ряд Фурье для АКФ сигнала, где

$$\Phi_n = \overline{\varphi(\tau) e^{-j\omega_n \tau}} = \left| \dot{V}_n \right|^2$$

Коэффициент Φ_n ряда Фурье для АКФ сигнала $v(t)$ равен средней мощности n-ой экспоненциальной гармоники сигнала

Интеграл Фурье для импульсного сигнала

$$v(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\omega_1}{2\pi}\int_{-T/2}^{T/2}v(t)e^{-j\omega_n t}dt\right)e^{j\omega_n t},\frac{\omega_1}{2\pi}=\frac{1}{T}$$

$$v(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}v(t)e^{-j\omega_n t}dt\right)e^{j\omega_n t}\,\frac{d\omega}{2\pi}=\int_{-\infty}^{+\infty}\dot{V}(\omega)e^{j\omega_n t}\,\frac{d\omega}{2\pi},$$

где $\dot{V}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}v(t)e^{-j\omega_n t}dt$ – <u>*спектр сигнала*</u>

Спектр импульсного сигнала непрерывен, причем составляющая на частоте ω имеет амплитуду:

$$\dot{V}(\omega)\frac{d\omega}{2\pi}$$

АКФ импульсного сигнала:

$$\psi(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{\psi}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad \dot{\psi}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\omega) e^{j\omega\tau} \frac{d\omega}{2\pi}, \quad \psi(\omega) = \left|\dot{V}(\omega)\right|^2$$

$$\dot{\psi}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{v}(t) \dot{v}^*(t-\tau) dt =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega_1}{2\pi} \dot{V}(\omega_1) e^{j\omega_1 t} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega_2}{2\pi} \dot{V}^*(\omega_2) e^{-j\omega_2 (t-\tau)} dt =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega_1}{2\pi} \dot{V}(\omega_1) \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega_2 \dot{V}^*(\omega_2) e^{j\omega_2\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{2\pi} e^{j(\omega_1-\omega_2)t} =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega_1}{2\pi} \dot{V}(\omega_1) \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega_2 \dot{V}^*(\omega_2) e^{j\omega_2\tau} \delta(\omega_1 - \omega_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\dot{V}(\omega)\right|^2 e^{j\omega\tau} \frac{d\omega}{2\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\dot{V}(\omega)\right|^2 \frac{d\omega}{2\pi}$$ — энергия импульсного сигнала

Представим сигнал $v(t)$ через четную и нечетную составляющие и подставим в формулу для преобразования Фурье:

$$\dot{V}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(v_e(t) + v_o(t)\right) e^{-j\omega t} dt =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(v_e(t) + v_o(t)\right)(\cos \omega t - j \sin \omega t) dt =$$

$$2\int_{0}^{+\infty} v_e(t) \cos \omega t dt - j2\int_{0}^{+\infty} v_o(t) \sin \omega t dt$$

$$\dot{V}(\omega) = \dot{V}^{*}(-\omega)$$

Связь ряда Фурье и преобразования Фурье

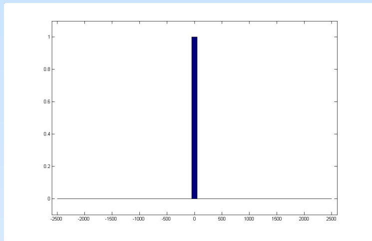
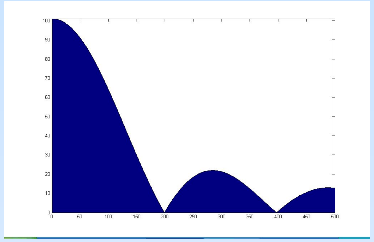
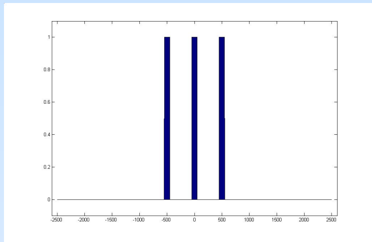
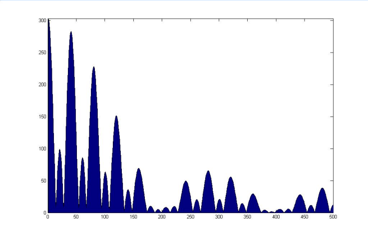
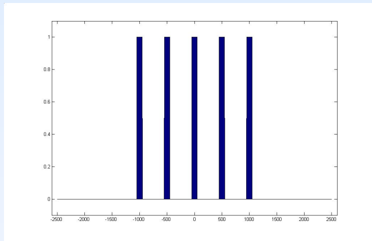
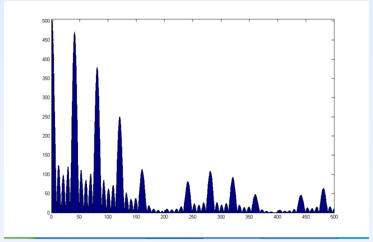
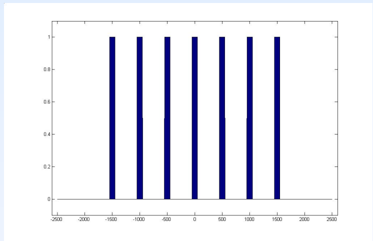
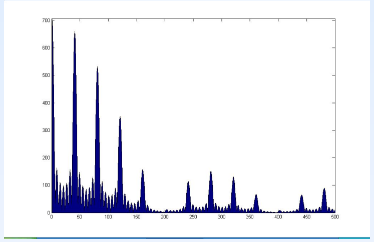
Выберем из периодического сигнала $k=2m+1$ периодов:

$$\dot{V}_1(\omega)=\int\limits_{-T/2}^{+T/2} v(t)e^{-j\omega t}dt -$$ спектр одного импульса;

$$\int\limits_{nT-T/2}^{nT+T/2} v(t)e^{-j\omega t}dt=\int\limits_{-T/2}^{+T/2} v(t)e^{-j\omega(t+nT)}dt=e^{-j\omega nT}\dot{V}_1(\omega);$$

$$\dot{V}_k(\omega)=\int\limits_{-kT/2}^{+kT/2} v(t)e^{-j\omega t}dt=\dot{V}_1(\omega)\sum_{n=-m}^{m}e^{-jn\omega T}=\dot{V}_1(\omega)\frac{e^{jm\omega T}-e^{-j(m+1)\omega T}}{1-e^{-j\omega T}}=$$

$$\dot{V}_1(\omega)\frac{e^{j\frac{2m+1}{2}\omega T}-e^{-j\frac{2m+1}{2}\omega T}}{e^{j\omega T/2}-e^{-j\omega T/2}}=\dot{V}_1(\omega)\frac{\sin(k\omega T/2)}{\sin(\omega T/2)}$$

Резюме

- 3 типа сигналов. Энергия, мощность, интеграл, среднее значение сигнала
- Разложение на составляющие
- Корреляционная функция. АКФ. Корреляционные коэффициенты
- Свертка
- Ряд и преобразование Фурье