Презентация по теме «Производная и её применение».

Учитель: Ефимова Н.В.

Содержание презентации:

- Понятие производной.
- Применение производной.
- Примеры.
- Заключение.
- Список использованной литературы.

Понятие производной.

- Исторические сведения.
- Определение производной.
- Дифференциал функции.
- Правила дифференцирования.
- Таблица элементарных производных.

Исторические сведения.

Происхождение понятия производной.

- Ряд задач дифференциального исчисления был решён ещё в древности.
  Основное понятие дифференциального исчисления – понятие производной – возникло в XVII в. в связи с необходимостью решения ряда задач из физики, механики и математики, в первую очередь следующих двух: определения скорости прямолинейного неравномерного движения и построения касательной к производной плоской кривой.
- Первая из этих задач была впервые решена Ньютоном. Функцию он называл ***флюэнтой***, т.е. текущей величиной (от латинского fluere – течь), производную же – флюксией (от того же fluere). Ньютон обозначал функции последними буквами латинского алфавита *u, x, y, z*, а их флюксии, т.е. производные от флюэнт по времени, - соответственно теми же буквами с точкой над ними:

$$\dot{u},\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z}.$$

- Для доказательства своего правила Ньютон, следуя в основном Ферма, рассматривает бесконечно малое приращение времени *dt,* которое он обозначал знаком *O*, отличным от нуля. Выражение *xO*, обозначаемое ныне

$$\boxed{x'(t)dt}$$

и называемое ***дифференциалом*** (*dx*), Ньютон называл моментом.
- Ньютон пришёл к понятию производной, исходя из вопросов механики. Свои результаты в этой области он изложил в трактате, названном им «Метод флюксий и бесконечных рядов», который был составлен около 1671 г. Предполагают, что Ньютон открыл свой метод флюксий ещё в середине 60-х годов XVII в., однако вышеназванный его трактат был опубликован посмертно лишь в 1736 г.

Исаак Ньютон
(1643-1727)

Путь к производной через касательную кривой.

- Математиков XV – XVII вв. долго волновал вопрос о нахождении общего метода для построения касательной в любой точке кривой. Задача эта была связана также с изучением движений тел и с отысканием экстремумов наибольших и наименьших значений разных функций.
- Некоторые частные случаи решения задач были даны ещё в древности. Так, в «Началах» Евклида дан способ построения касательной к окружности, Архимед построил касательную к спирали, носящей его имя, Апполоний – к эллипсу, гиперболе и параболе. Однако древнегреческие учёные не решили задачу до конца, т.е. не нашли общего метода, пригодного для построения касательной к любой плоской кривой в производной её точке.

- С самого начала XVII в. немало учёных, в том числе Торричелли, Вивиани, Роберваль, Барроу, пыталось найти решение вопроса, прибегая к кинематическим соображениям. Первый общий способ построения касательной к алгебраической кривой был изложен в «Геометрии» Декарта. Более общим и важным для развития дифференциального исчисления был метод построения касательных Ферма.

Рене Декарт
(1596-1650)

- Основываясь на результатах Ферма и некоторых других выводах, Лейбниц значительно полнее своих предшественников решил задачу, о которой идёт речь, создав соответствующий алгоритм. У него задача нахождения tgϕ , т.е. углового коэффициента касательной в точке M к плоской кривой, определяемой функцией $y = f(x)$, сводится к нахождению производной функции y по независимой переменной x при данном её значении (или в данной точке) $x=x_1$.

Готфрид Вильгельм Лейбниц
(1646-1716)

- Можно привести и другие примеры, показывающие, какую большую роль играет понятие производной в науке и технике. Ускорение есть производная от скорости по времени, теплоёмкость тела есть производная от количества тепла по температуре, скорость радиоактивного распада есть производная от массы радиоактивного вещества по времени и т.п. Изучение свойств и способов вычисления производных и их применение к исследованию функций составляет главный предмет дифференциального исчисления.
- Первая печатная работа по дифференциальному исчислению была опубликована Лейбницем в 1684 г. Это был мемуар, появившийся в основном им же в 1682 г. математическом журнале «Acta Eruditorum» (прототип «Учебных записок») и озаглавленный «Новый метод максимумов и минимумов, а также касательных, для которого не являются препятствием дробные и иррациональные количества, и особый для этого род исчисления». В этой статье, состоящей всего лишь из 6 страниц, содержится изложение существа метода исчисления бесконечно малых, в частности излагаются основные правила дифференцирования. Итак, если в «Методе флюксий» в качестве первоначального понятия фигурирует скорость, то в «Новом методе» Лейбница таким понятием является касательная.

Символы и термины.

- Приращение абсциссы Лейбниц обозначал через *dx*, соответствующее приращение ординаты – через *dy*. Ныне употребляемый символ производной

$$\boxed{\frac{dy}{dx}}$$

берёт своё начало от Лейбница. У Лейбница основным понятием была не производная, для которой он даже специального термина не имел, а дифференциал.

В середине XVIII в. Эйлер стал пользоваться греческой буквой Δ для обозначения приращений переменных величин, т. е. $\Delta y = y_2 - y_1$, $\Delta x = x_2 - x_1$ и т.д. Это обозначение сохранилось поныне. Мы пишем:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

- Обозначения *y '* и *f ' (x)* и для производной ввёл Лагранж.
- Сам термин «производная» впервые встречается у француза Луа Арбогаста в его книге «Вычисление производных», опубликованной в Париже в 1800 г. Этим термином сразу же стал пользоваться и Лагранж. Термин этот быстро вошёл в общий обиход, а Коши, используя начальную букву этого термина, стал обозначать производную символом *Dy* или *Df(x)*.
- Терминология Ньютона (флюэнты, флюксии) и его символы производной утратили своё значение. Лишь в физике и механике в некоторых случаях обозначают точками над буквами производные по времени.

Формулы дифференцирования у Лейбница и Эйлера и дефекты в их логическом обосновании.

- Первый печатный курс дифференциального исчисления вышел в свет в Париже в 1696 г. под заглавием «Анализ бесконечно малых». Его автор Г. Ф. Де Лопиталь за основу этой книги взял рукопись Иоганна Бернулли, одного из ближайших сотрудников Лейбница. Вот почему этот курс следует рассматривать как типичное произведение школы Лейбница.
- В первой же главе своей книги Лопиталь требует, «чтобы величина, увеличенная или уменьшенная на другую бесконечно малую величину, могла быть рассматриваема как неизменившаяся». Тут бесконечно малая рассматривается как нуль, её можно отбрасывать. Это один из фундаментальных принципов исчисления бесконечно малых Лейбница, ныне отвергнутый наукой. Этим принципом пользуется Лопиталь и при установлении формул дифференцирования.

- В первый период разработки математического анализа основоположники этой теории не могли достаточно чётко и ясно обосновать принципы этой теории и поэтому искали подтверждения правильности теории в согласованности математических выводов с опытом, с практикой при решении задач механики и астрономии.
- Однако простая проверка гипотезы на практике не даёт абсолютной уверенности в её непогрешимости. Достаточно одного факта, не согласующегося с данной гипотезой, как она будет опровергнута. Вот почему на последующих этапах перед математиками возникла проблема строгого математического обоснования теории математического анализа.

Производная и дифференциал.

- В настоящее время «дифференцирование» понимают как вычисление дифференциалов функций, так и нахождение производных функций. Это своего рода недостаток терминалогии, ибо дифференциал и производная – это не тождественные понятия. Под дифференциалом функции ныне понимают произведение производной на приращение аргумента: $dy = y'(x)\,\Delta x$, или $dy = y'(x)\,dx$, так как $dx = \Delta x$.
- Не таков был смысл дифференциала при его возникновении. Лопиталь определял его как бесконечно малое приращение, т.е. как ту величину, которую мы обозначаем через Δy.
- Понятие дифференциала и сам термин берут своё начало от Лейбница. Однако он не дал точного определения дифференциалу.
- Исходя из первоначального для него понятия дифференциала, Лейбниц рассматривал и частные двух соответствующих дифференциалов, т.е. производные.

- Лишь со времён Коши, впервые ясно определившего производную как предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx при $\Delta x \to 0$, понятие производной стало фундаментальным в дифференциальном исчислении, а понятие дифференциала определяется на основе производной.

Огюстен Луи Коши
(1782-1857)

В математике производную применяют для:

- Исследования функции на монотонность, экстремумы.
- Нахождения касательной к графику.
- Нахождения наибольших, наименьших значений функций.
- Нахождения дифференциала для приближенных вычислений.
- Для доказательства неравенств

Понятие производной.

Определение производной.

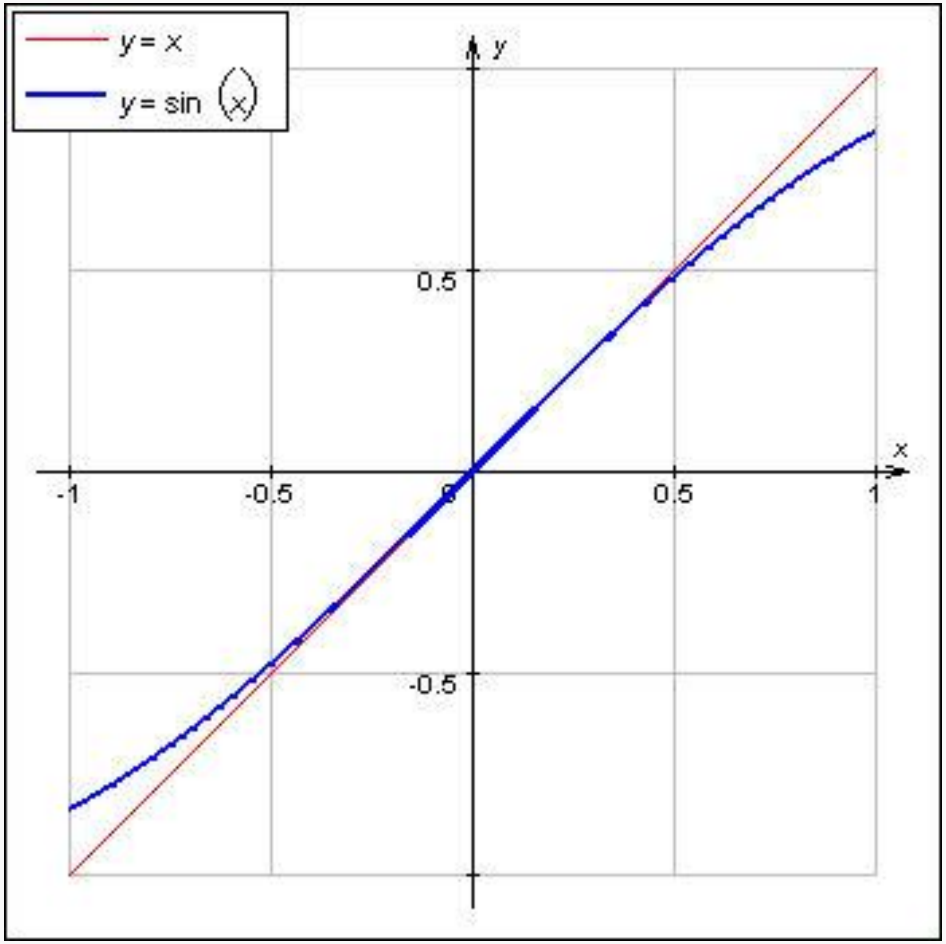
- Для решения многих задач требуется найти разность значений функции в двух точках. Так, средняя скорость материальной точки за промежуток времени Δt равна

$$\langle v \rangle = \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t}$$

- Если рассматриваемое движение не является равномерным, то чем меньше выбран промежуток времени Δt, тем лучше указанная формула будет характеризовать движение точки. В идеале мы получаем понятие мгновенной скорости v: это предел, к которому стремится средняя скорость, когда $\Delta t \to 0$, то есть

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t}$$

- Рассмотрим поведение графика функции $y = \sin x$ в окрестности точки $x = 0$. Если увеличивать масштаб графика, то кривизна графика становится все меньше и меньше, а сам график приближается к графику прямой $y = x$.



Линеаризация функции $y = \sin x$.

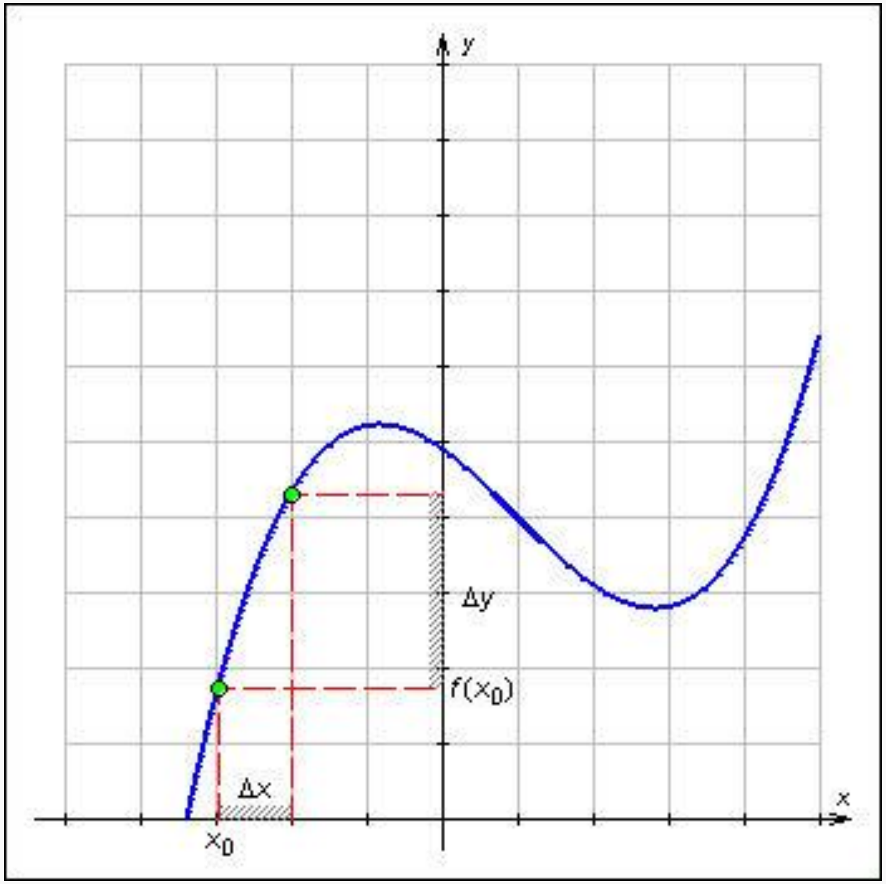
Эта и другие задачи приводят к понятию производной

- Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и существует конечный предел отношения

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

при $\Delta x \to 0$. Тогда этот предел называется ***производной*** функции в точке x_0:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$



К определению производной.

Производной данной функции в точки х называется предел отношения приращения этой функции к приращению аргумента в точке х, когда приращение аргумента стремится к нулю.

- С физической точки зрения этот предел есть значение скорости изменения функции *f(x)* относительно ее аргумента при данном значении *x* этого аргумента.
- Производная функции $y = f(x)$ может также обозначаться одним из следующих способов:

$$f'_x(x_0), \quad y'(x_0), \quad \frac{df}{dx}$$

- Если приращение функции $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ обозначить как Δy, то определение можно записать так:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

- Из определения производной и предела функции следует, что

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \Delta x\, \alpha(\Delta x),$$

где $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0$.

Операция вычисления производной называется ***дифференцированием***. Функция называется ***дифференцируемой в данной точке***, если в этой точке существует ее производная.

- По аналогии с пределами вводится понятие правой и левой производных:

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

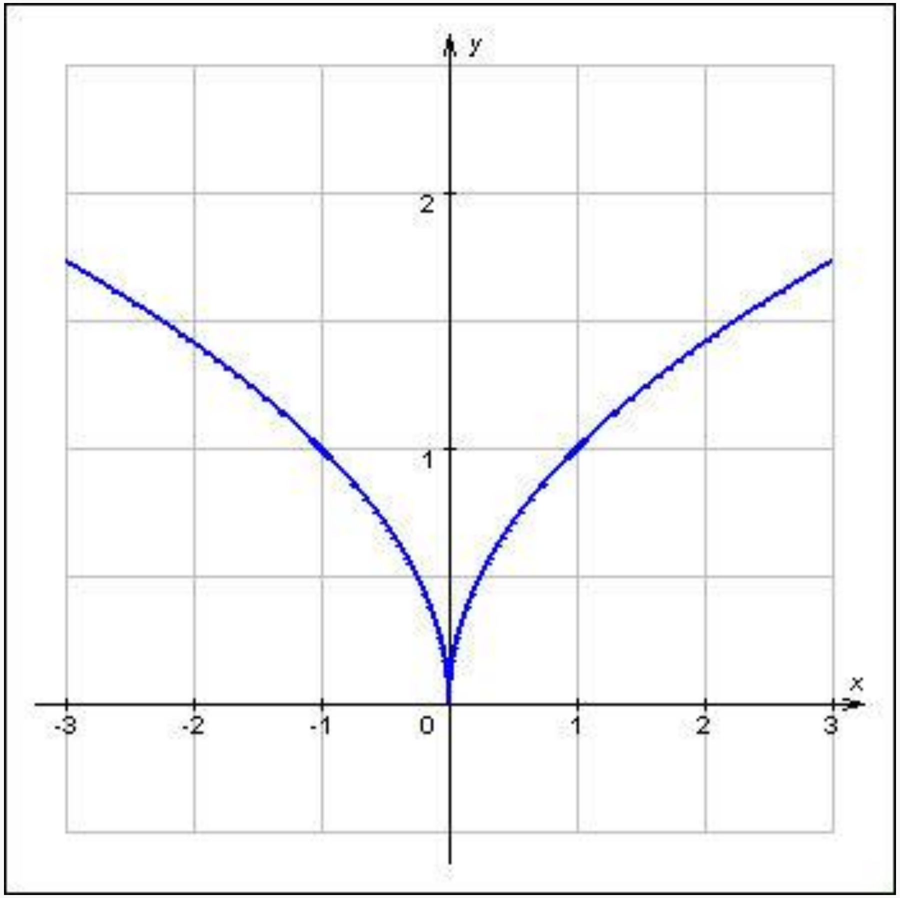
- Если существует производная в точке $x0$, то существуют левая и правая производная в этой же точке, причем

$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = f'(x_0).$$

- Обратное также верно: если $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$, то производная $f'(x)$ в точке x_0 существует и равна левой и правой производным.

- Можно ввести также понятие бесконечной производной $f'(x)=+\infty$, $f'(x)=-\infty$, $f'(x)=\infty$.

- Если функция дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке. Обратное, вообще говоря, неверно. Примером может служить функция $y = |x|$, непрерывная в точке $x = 0$, но имеющая в ней «излом». Производная этой функции в точке $x = 0$ не существует, так как $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$: $f'_-(0)=-1$, $f'_+(0)=1$.



Функция $y = |x|1/2$ имеет в точке $x = 0$ бесконечную производную неопределенного знака.

Дифференциал функции.

- Итак, график дифференцируемой функции в окрестности каждой своей точки сколь угодно близко приближается к графику касательной в силу равенства:

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + (f'(x_0) + \alpha)\Delta x,$$

- где α – бесконечно малая в окрестности *x*0 функция. Для приближенного вычисления значения функции *f* в точке $x_0 + \Delta x$ эту бесконечно малую функцию можно отбросить:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

- При малых изменениях аргумента (от начального значения x) величину изменения функции *y=f(x)* можно приближенно считать пропорциональной величине изменения аргумента с коэффициентом пропорциональности, равным значению производной *f '(x)*; кривую *y=f (x)* при этом можно приближенно заменить касательной к ней в точке *x*.

- Линейную функцию $y=f'(x_0)(x-x_0)$ называют ***дифференциалом функции*** f в точке x_0 и обозначают df. Для функции x производная в каждой точке x_0 равна 1, то есть $dx=x-x_0$

Поэтому пишут:

$$df=f'(x)dx.$$

Дифференциалом (dy) функции y=f(x) называется произведение значения производной f '(x) на произвольное приращение Δx аргумента x.

- Дифференциал функции $f(x)$ при данном значении x геометрически выражается приращением ординаты касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке x.
- Приближенное значение функции вблизи точки x_0 равно сумме ее значения в этой точке и дифференциала в этой же точке. Это дает возможность записать производную следующим образом:

$$f'(x) = \frac{df}{dx}$$

- Часто эту запись используют, чтобы уточнить, по какой переменной дифференцируется функция.
- Геометрически дифференциал функции df – это приращение ординаты касательной к графику функции в данной точке при изменении абсциссы точки на dx.

$(f+g)'=f'+g',$

Правила дифференцирования.

- Если функции f и g дифференцируемы в точке x_0, то в этой же точке дифференцируемы сумма, произведение и частное (если $g'(x_0)\neq 0$) этих функций, причем

$$\boxed{(f+g)'=f'+g',}$$

$$\boxed{(fg)'=f'g+fg',}$$

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}.}$$

- Если f дифференцируема, то fn где n принадлежит N, также дифференцируема, причем
- Если функция $y=f(x)$ непрерывна и строго возрастает в окрестности точки x_0, причем $f'(x_0)\neq 0$ то функция $x=\varphi(y)$, обратная к функции $y=f(x)$, дифференцируема в точке $y_0=f(x_0)$, причем

$$\boxed{(f^n)'=nf^{n-1}f'.}$$

- Если функция $y = f(x)$ непрерывна и строго возрастает в окрестности точки x_0, причем $f'(x_0) \neq 0$ то функция $x = \varphi(y)$, обратная к функции $y = f(x)$, дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$, причем
- Если функции $y = f(x)$ и $z = g(y)$ дифференцируемы в точках x_0 и $y_0 = f(x_0)$ соответственно, то сложная функция $z = g(f(x))$ дифференцируема в точке x_0, причем

$$\boxed{z'(x_0) = g'(y_0) f'(x_0)}$$

- Следствием этой теоремы является тот факт, что дифференциал функции $y = f(x)$ имеет один и тот же вид $dy=f'(x)dx$ как в случае, когда x – независимая переменная, так и в случае, когда x – дифференцируемая функция другого переменного.
- Если $f(x)$ – четная функция, то $f'(x)$– нечетная; если $f(x)$ – нечетная функция, то $f'(x)$ – четная.

- Пусть в окрестности точки t_0 определены функции $x(t)$ и $y(t)$, причем $x(t)$ непрерывна и строго монотонна. Пусть в этой окрестности существуют производные $x'(t_0) \neq 0$ и $y'(t_0)$. Тогда сложная функция $y = y(t(x))$, где $t(x)$ – функция, обратная $x(t)$, дифференцируема по x, причем

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}}$$

Таблица элементарных производной.

Функция	**Ее производная**
x^p	px^{p-1}, $p \in R$
c (c-const)	0
$1/x$	$-1/x^2$
$\sqrt{x}$	$1/2\sqrt{x}$
e^x	e^x
sin x	cos x
cos x	-sin x
tg x	$1/\cos^2 x$
ctg x	$-1/\sin^2 x$
$y = u^p$	$pu'u^{p-1}$
ln x	$1/x$
a^x	$a^x \ln a$, $a>0$
$\log_a x$	$1/(x \ln a)$, $a>0$, $a \neq 0$
arcsinx	$1/\sqrt{1-x^2}$
arccosx	$-1/\sqrt{1-x^2}$
arctg x	$1/(1+x^2)$
arcctg x	$-1/(1+x^2)$

Применение производной.

- Применение производной в исследовании функции.
- Использование производной в физике.
- Дифференциальное исчисление в экономике.
- Геометрический смысл производной .

Применение производной в исследовании функции.

План исследования функции.

- Для построения графика функции нужно:

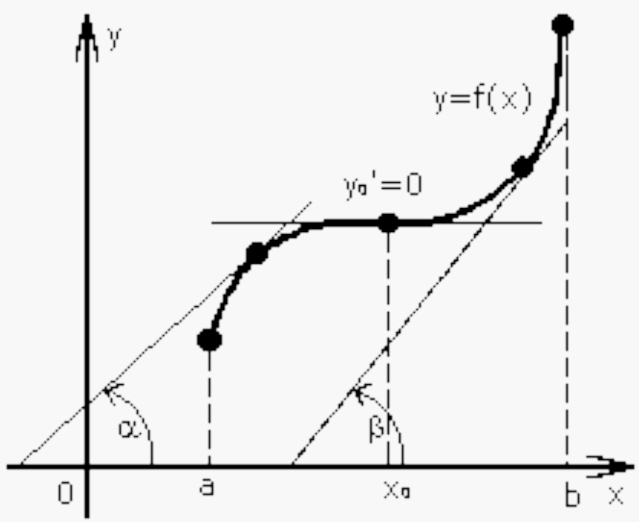
1) найти область определения и область значений функции,
2) установить, является ли функция чётной или нечётной,
3) определить, является ли функция периодической или нет,
4) найти нули функции и её значения при $x = 0$,
5) найти интервалы знакопостоянства,
6) найти интервалы монотонности,
7) найти точки экстремума и значения функции в этих точках,
8) проанализировать поведение функции вблизи “особых” точек и при больших значениях модуля x .

Основные понятия и определения теории экстремумов.

- Функция *f(x)* называется ***возрастающей*** в интервале (a,b), если при возрастании аргумента x в этом интервале соответствующие значения функции *f(x)* также возрастают, т.е. если

$f(x_1) > f(x_0)$ при $x_1 > x_0$.

График возрастающей функции.

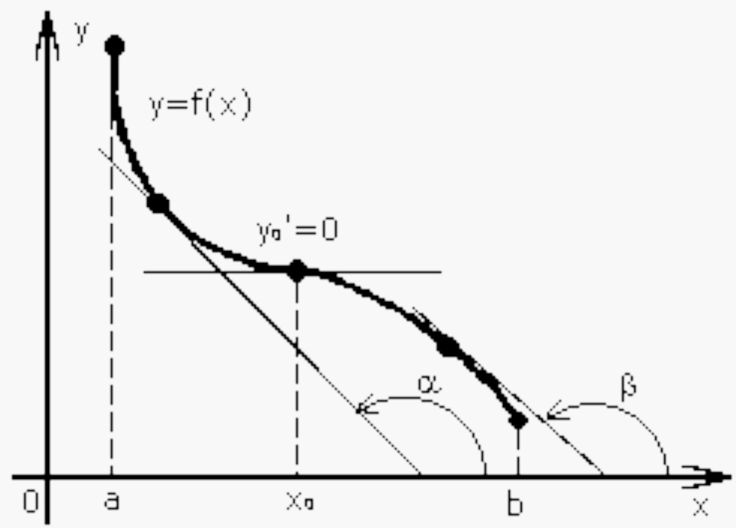


На интервале [x_0 , x_1] она сохраняет постоянное значение C

- Функция *f (x)* называется ***убывающей*** в интервале (a, b) если при возрастании аргумента x в этом интервале соответствующие значения функции *f (x)* убывают, т.е. если

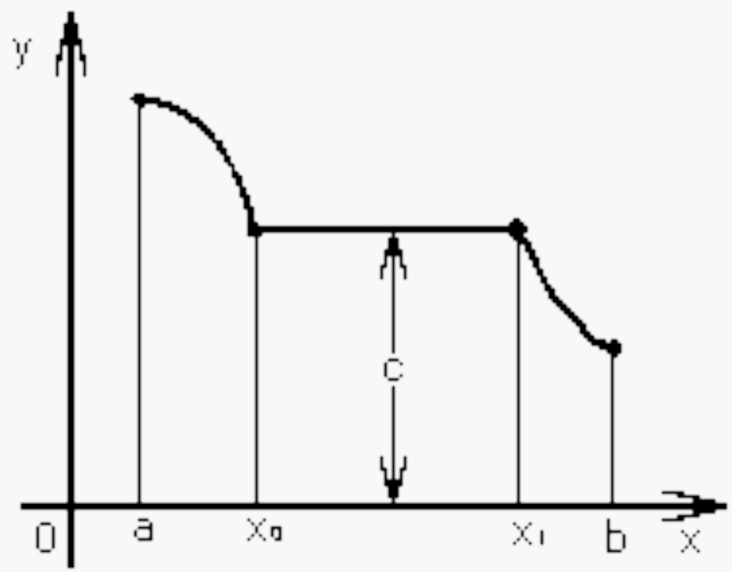
  $f(x_2) < f(x_1)$ **при** $x_2 > x_1$.

График убывающей функции.



- Если из неравенства $x_2 > x_1$ вытекает нестрогое неравенство $f(x_2) \leq f(x_1)$, то функция $f(x)$ называется ***невозрастающей*** в интервале (a, b). Пример такой функции показан на рисунке. На интервале [x_0 , x_1] она сохраняет постоянное значение С.

График невозрастающей функции



- **1**. Дифференцируемая и возрастающая в интервале (a, b) функция f (x) имеет во всех точках этого интервала неотрицательную производную:

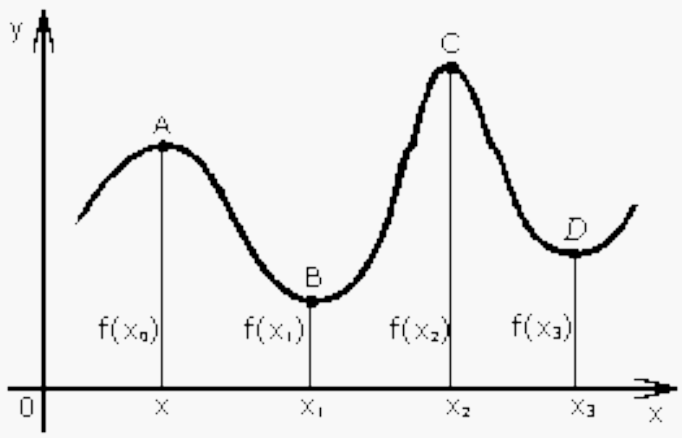
  Очевидно, теорема 1 имеет место и для неубывающей в интервале (a, b) функции.

- **2.** Дифференцируемая и убывающая в интервале (a, b) функция f (x) имеет во всех точках этого интервала неположительную производную.

  Очевидно, теорема 2 имеет место и для невозрастающей в интервале (a, b) функции.

- ***Максимумом*** функции $f(x)$ называется такое значение $f(x_0)$ этой функции, которое не меньше всех значений функции $f(x)$ в точках x, достаточно близких к точке x_0, т.е. в точках x, принадлежащих некоторой достаточно малой окрестности точки x_0 . Так, на рисунке показаны два максимума: $f(x_0)$ и $f(x_2)$.
- ***Минимумом*** функции $f(x)$ называется такое значение $f(x_0)$ этой функции, которое не больше всех значений функции $f(x)$ в точках x, достаточно близких к точке x_0 , т.е. в точках x, принадлежащих некоторой достаточно малой окрестности точки x_0 .
- Если в точке x_0 функция $f(x)$ достигает максимума или минимума, то говорят, что функция $f(x)$ в точке x_0 достигает экстремума (или экстремального значения).
- Функция $f(x)$ может иметь несколько экстремумов внутри интервала [a, b], причем может оказаться, что какой-нибудь минимум будет больше какого-нибудь максимума.

- Таким образом, ***наибольшее значение функции f (x)*** на интервале [a, b] - это наибольший из экстремумов функции внутри этого интервала и наибольшее из значений функции на концах интервала.
- Аналогично ***наименьшее значение функции f (x)*** на интервале [a, b] - это наименьший из экстремумов функции внутри этого интервала и наименьшее из значений функции на концах интервала.
- Например, функция, изображенная на данном рисунке достигает наибольшего значения $f(x)$ в точке x_2, наименьшего - в точке x_1 интервала [x_0, x_3].



Необходимый признак экстремума. Нахождение критических точек функции.

- **3. Необходимый признак экстремума.** Если функция *f (x)* имеет в точке x_0 экстремум, то ее производная в данной точке или равна нулю или не существует.

  Таким образом, необходимым признаком существования в точке x_0 экстремума функции *f (x)* является выполнение следующего условия: в точке x_0 производная *f' (x)* или равна нулю, или не существует.

  Этот признак не является достаточным условием существования экстремума функции *f (x)* в точке x0: можно привести много примеров функций, удовлетворяющих этому условию при $x = x_0$, но, однако, не достигающих x0.
- Например, производная функции $y = x^3$ при $x_0 = 0$ равна нулю, однако эта функция при $x_0 = 0$ не достигает экстремального значения.

Первый и второй достаточные признаки существования экстремума.

- **4. 1-й достаточный признак экстремума.** Если функция *f(x)* имеет в точке x_0 экстремум, то ее производная при переходе через x_0 меняет знак на противоположный. Причем, если:

знак меняется с плюса на минус, то это точка максимума,

знак меняется с минуса на плюс, то это точка минимума.

- **5. 2-й достаточный признак экстремума.** Если функция f(x) имеет в точке x_0 экстремум, то ее вторая производная $f''(x) \neq 0$, причем:

если $f''(x) > 0$, то x_0 - точка минимума,

если $f''(x) < 0$, то x_0 - точка максимума.

Правило нахождения экстремума

- Чтобы найти экстремум функции, надо:
- *1)* найти производную данной функции;
- *2)* приравнять производную нулю и решить полученное уравнение; из полученных корней отобрать действительные и расположить их (для удобства) по их величине от меньшего к большему; в том случае, когда все корни оказываются мнимыми, данная функция не имеет экстремума;
- *3)* определить знак производной в каждом из промежутков, отграниченных стационарными точками;

- *4)* если производная положительна в промежутке, лежащем слева от данной стационарной точки, и отрицательна в промежутке, лежащем справа от нес, то данная точка есть точка максимума функции, если же производная отрицательна слева и положительна справа от данной стационарной точки, то данная точка есть точка минимума функции; если производная имеет один и тот же знак как слева, так и справа от стационарной тонки, то в этой точке нет ни максимума, ни минимума, функции;

- *5)* затенить в данном выражении функции аргумент значением, которое дает максимум или минимум функции; получим значение соответственно максимума или минимума функции.

- Если функция имеет точки разрыва, то эти точки должны быть включены в число стационарных точек, разбивающих Ох на промежутки, в которых определяется знак производной.

Выпуклость функции. Точки перегиба.

- Множество точек на плоскости называется ***выпуклым***, если отрезок, соединяющий любые две точки этого множества, целиком содержится в этом множестве.
- Примерами выпуклых множеств являются: треугольник, отрезок, полуплоскость, вся плоскость.
- Графики функций, выпуклых вниз и вверх, изображены на рисунке.
- Функция ***выпукла вниз (вверх) на множестве X*** тогда и только тогда, когда ее первая производная на этом промежутке монотонно возрастает (убывает).

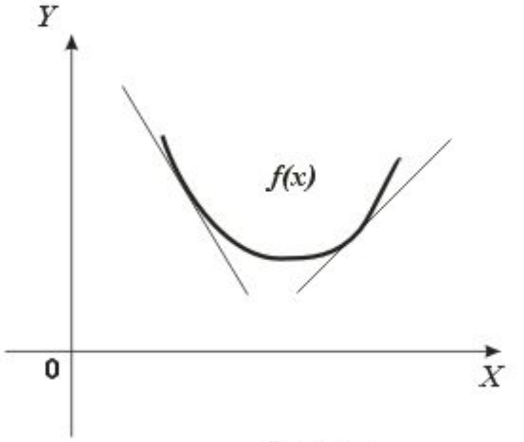


Рис.25a

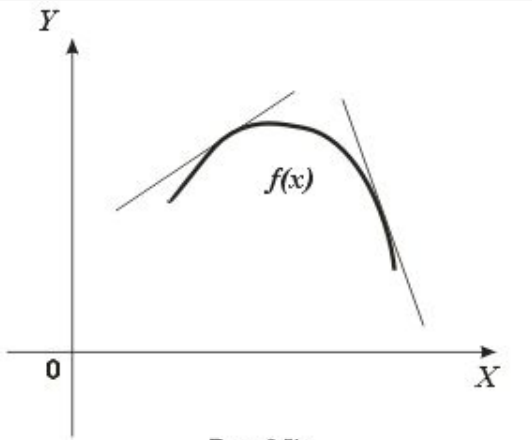


Рис.25b

- **6. Достаточное условие выпуклости.** Если вторая производная дважды дифференцируемой функции положительна (отрицательна) на множестве X, то функция выпукла вниз (вверх) на этом множестве.
- Доказательство. Если $f''(x)>0$, x принадлежит X, то $f'(x)$ возрастает на множестве X и по предыдущей теореме функция выпукла вниз на множестве X. Аналогично рассматривается случай, когда $f''(x)<0$.
- **7. Необходимое условие выпуклости** слабее: если функция выпукла вниз (вверх) на множестве X, то $f''(x) >= 0$, x принадлежит X (или $f''(x) <= 0$) x принадлежит X.
- Например, функция $y = x^4$ выпукла вниз на всей числовой прямой, но $y'' = 12x^2$ обращается в ноль при $x = 0$.
- ***Точкой перегиба*** графика непрерывной функции называется точка, разделяющая интервалы, в которых функция имеет разные направления выпуклости.
- Нетрудно заметить, что точки перегиба - это точки экстремума первой производной. Отсюда следуют утверждения.

- **8. Необходимое условие перегиба.** Вторая производная $f''(x)$ дважды непрерывно дифференцируемой функции в точке перегиба x_0 равна нулю, т.е. $f''(x_0) = 0$.
- **9. Достаточное условие перегиба.** Если вторая производная дважды дифференцируемой функции при переходе через точку x_0, в которой $f''(x_0) = 0$ меняет свой знак, то x_0 есть точка перегиба ее графика.

Заметим, что если в окрестности точки x_1 функция выпукла вниз, то график функции находится выше касательной, а если в окрестности точки x_2 функция выпукла вверх, то график функции находится ниже касательной. В точке перегиба x_0 касательная разделяет график - он лежит по разные стороны касательной.

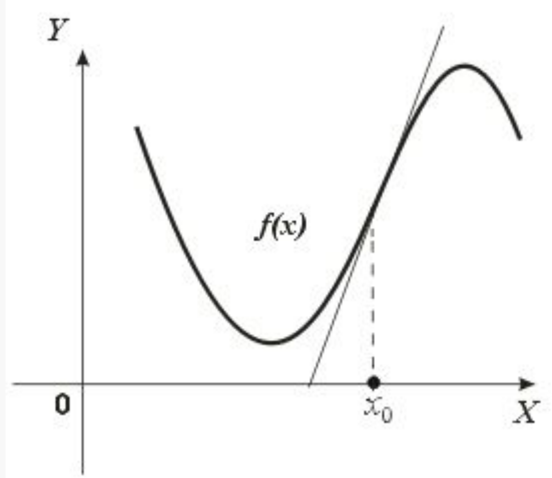


Рис.27

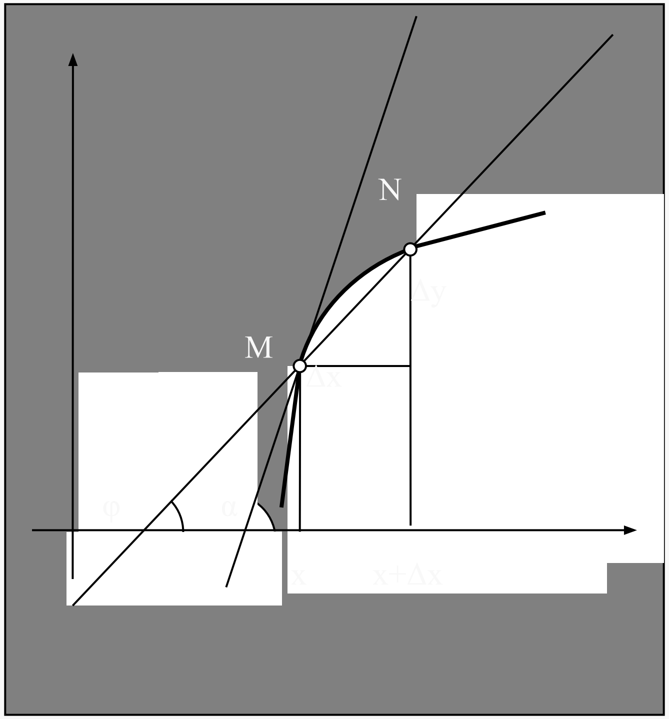
Применение производной в исследовании функции.

Касательная к кривой.

Пусть функция имеем кривую и на ней фиксированную точку M и точку N.

- ***Касательной к точке M*** называется прямая, положение которой стремится занять хорда MN, если точку N неограниченно приближать по кривой к M.
- Рассмотрим функцию *f(x)* и соответствующую этой функции кривую *y = f(x)*. При некотором значении x функция имеет значение y = f(x). Этим значениям на кривой соответствует точка $M(x_0, y_0)$. Введем новый аргумент $x_0 + \Delta x$, его значению соответствует значение функции $y_0 + \Delta y = f(x_0 + \Delta x)$. Соответствующая точка - $N(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$. Проведем секущую MN и обозначим φ угол, образованный секущей с положительным направлением оси Ox. Из рисунка видно, что $\Delta y / \Delta x = \mathrm{tg}\,\varphi$. Если теперь Δx будет приближаться к 0, то точка N будет перемещаться вдоль кривой , секущая MN - поворачиваться вокруг точки M, а угол φ - меняться. Если при $\Delta x \to 0$ угол φ стремится к некоторому α, то прямая, проходящая через M и составляющая с положительным направлением оси абсцисс угол α, будет искомой касательной.

- Значение производной $f'(x)$ при данном значении аргумента x равно тангенсу угла, образованного с положительным направлением оси Ox касательной к графику функции $f(x)$ в точке $M(x, f(x))$.
- Касательная к пространственной линии имеет определение, аналогичное определению касательной к плоской кривой. В этом случае, если функция задана уравнением $z = f(x, y)$, угловые коэффициенты при осях OX и OY будут равны частным производным f по x и y.



Касательная плоскость к поверхности.

- ***Касательной плоскостью к поверхности в точке М*** называется плоскость, содержащая касательные ко всем пространственным кривым поверхности, проходящим через М - точку касания.
- Возьмем поверхность, заданную уравнением F(x, y, z) = 0 и какую-либо обыкновенную точку $M(x_0, y_0, z_0)$ на ней. Рассмотрим на поверхности некоторую кривую L, проходящую через М. Пусть кривая задана уравнениями
  $x = \varphi(t);\ y = \psi(t);\ z = \chi(t).$
- Подставим в уравнение поверхности эти выражения. Уравнение превратится в тождество, т. к. кривая целиком лежит на поверхности. Используя свойство инвариантности формы дифференциала, продифференцируем полученное уравнение по t:

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 0}$$

Уравнения касательной к кривой L в точке М имеют вид:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y - y_0}{\frac{dy}{dt}} = \frac{z - z_0}{\frac{dz}{dt}}}$$

- Т. к. разности $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$ пропорциональны соответствующим дифференциалам, то окончательное уравнение плоскости выглядит так:
- $F'x(x - x_0) + F'y(y - y_0) + F'z(z - z_0)=0$
- и для частного случая z = f(x, y):
- $Z - z_0 = F'x(x - x_0) + F'y(y - y_0)$.

геометрический смысл производной: производная $f'(x_0)$ есть угловой коэффициент касательной, проведенной к кривой y = f(x) в точке x_0.

Использование производной в физике.

Скорость материальной точки.

- Пусть зависимость пути s от времени t в данном прямолинейном движении материальной точки выражается уравнением $s = f(t)$ и t_0 -некоторый момент времени. Рассмотрим другой момент времени t, обозначим $\Delta t = t - t0$ и вычислим приращение пути: $\Delta s = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$. Отношение $\Delta s / \Delta t$ называют средней скоростью движения за время Δt, протекшее от исходного момента t_0. Скоростью называют предел этого отношения при $\Delta t \to 0$.
- Среднее ускорение неравномерного движения в интервале $(t; t + \Delta t)$ - это величина $\langle a \rangle = \Delta v / \Delta t$. Мгновенным ускорением материальной точки в момент времени t будет предел среднего ускорения:

$$\boxed{a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}}$$

- То есть первая производная по времени $(v'(t))$.

Теплоемкость вещества при данной температуре.

- Для повышения различных температур T на одно и то же значение, равное T_1 - T, на 1 кг. данного вещества необходимо разное количество теплоты Q_1 - Q, причем отношение

$$\boxed{\frac{Q_1 - Q}{T_1 - T} = \frac{\Delta Q}{\Delta T}}$$

для данного вещества не является постоянным. Таким образом, для данного вещества количество теплоты Q есть нелинейная функция температуры T: $Q = f(T)$. Тогда $\Delta Q = f(t + \Delta T) - f(T)$.

Отношение

$$\boxed{\frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{f(T + \Delta T) - f(T)}{\Delta T}}$$

называется средней теплоемкостью на отрезке [T; T + ΔT], а предел этого выражения при $\Delta T \rightarrow 0$ называется теплоемкостью данного вещества при температуре T.

Мощность.

Изменение механического движения тела вызывается силами, действующими на него со стороны других тел. Чтобы количественно характеризовать процесс обмена энергией между взаимодействующими телами, в механике вводится понятие работы силы. Чтобы охарактеризовать скорость совершения работы, вводят понятие мощности:

$$\boxed{N = \frac{dA}{dt}}$$

Дифференциальное исчисление в экономике.

Исследование функций.

Дифференциальное исчисление - широко применяемый для экономического анализа математический аппарат. Базовой задачей экономического анализа является изучение связей экономических величин, записанных в виде функций. В каком направлении изменится доход государства при увеличении налогов или при введении импортных пошлин? Увеличится или уменьшится выручка фирмы при повышении цены на ее продукцию? В какой пропорции дополнительное оборудование может заменить выбывающих работников? Для решения подобных задач должны быть построены функции связи входящих в них переменных, которые затем изучаются с помощью методов дифференциального исчисления.

- В экономике очень часто требуется найти наилучшее или оптимальное значение показателя: наивысшую производительность труда, максимальную прибыль, максимальный выпуск, минимальные издержки и т. д. Каждый показатель представляет собой функцию от одного или нескольких аргументов. Таким образом, нахождение оптимального значения показателя сводится к нахождению экстремума функции.
- По теореме Ферма, если точка является экстремумом функции, то производная в ней либо не существует, либо равна 0. Тип экстремума можно определить по одному из достаточных условий экстремума:
- 1) Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0. Если производная $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак с + на -, то x_0 - точка максимума, если с - на +, то x_0 - точка минимума, если не меняет знак, то в этой точке нет экстремума.
- 2) Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0, причем $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$, то в точке x_0 функция $f(x_0)$ имеет максимум, если $f''(x_0) < 0$ и минимум, если $f''(x_0) > 0$.
- Кроме того, вторая производная характеризует выпуклость функции (график функции называется выпуклым вверх [вниз] на интервале (a, b), если он на этом интервале расположен не выше [не ниже] любой своей касательной).

Эластичность спроса.

- Эластичностью функции *f(x)* в точке x_0 называют предел

$$E_y(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x}\right). \qquad E_y = \frac{x}{y} y'.$$

- Спрос - это количество товара, востребованное покупателем. Ценовая эластичность спроса E_D - это величина, характеризующая то, как спрос реагирует на изменение цены. Если $|E_D|>1$, то спрос называется эластичным, если $|E_D|<1$, то неэластичным. В случае $E_D=0$ спрос называется совершенно неэластичным, т. е. изменение цены не приводит ни к какому изменению спроса. Напротив, если самое малое снижение цены побуждает покупателя увеличить покупки от 0 до предела своих возможностей, говорят, что спрос является совершенно эластичным. В зависимости от текущей эластичности спроса, предприниматель принимает решения о снижении или повышении цен на продукцию.

Предельный анализ.

- Важный раздел методов дифференциального исчисления, используемых в экономике - ***методы предельного анализа***, т. е. совокупность приемов исследования изменяющихся величин затрат или результатов при изменениях объемов производства, потребления и т. п. на основе анализа их предельных значений. Предельный показатель (показатели) функции - это ее производная (в случае функции одной переменной) или частные производные (в случае функции нескольких переменных)
- В экономике часто используются средние величины: средняя производительность труда, средние издержки, средний доход, средняя прибыль и т. д. Но часто требуется узнать, на какую величину вырастет результат, если будут увеличены затраты или наоборот, насколько уменьшится результат, если затраты сократятся. С помощью средних величин ответ на этот вопрос получить невозможно. В подобных задачах требуется определить предел отношения приростов результата и затрат, т. е. найти предельный эффект. Следовательно, для их решения необходимо применение методов дифференциального исчисление.

Примеры.

Пример 1.

Найти производную функции $y = \dfrac{3x^6+4x^4-x^2-2}{15\sqrt{1+x^2}}$

Решение:

Функция имеет вид $\dfrac{1}{15}\dfrac{u}{v}$, где $u = 3x^6+4x^4-x^2-2$ и $v = \sqrt{1+x^2}$

Используя формулу для производной частного $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-v'u}{v^2}$

имеем:

$$y' = \frac{(3x^6+4x^4-x^2-2)'\sqrt{1+x^2}-(3x^6+4x^4-x^2-2)(\sqrt{1+x^2})'}{(\sqrt{1+x^2})^2}$$

Функция $u = 3x^6+4x^4-x^2-2$ является линейной комбинацией табличных функций. Поэтому:

$$(3x^6+4x^4-x^2-2)' = 18x^5+16x^3-2x$$

Функция $v = \sqrt{1+x^2}$ имеет вид $v = v_2(v_1(x)),\ где\ v_2 = \sqrt{v_1}, v_1 = 1 + x^2$

Используя правило нахождения производной сложной функции получаем: $v_2(v_1(x))' = v_2'(v_1) \cdot v_1'(x)$

$$v' = (\sqrt{v_1})'(1+x^2)' = \frac{1}{2\sqrt{v_1}}(2x) = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}$$

Подставляя в начальную формулу, получим:

$$y' = \frac{1}{15}\frac{(18x^5+16x^3-2x)\sqrt{1+x^2} - (3x^6+4x^4-x^2-2)\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}$$

Пример 2.

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции
$y=x^2-4x+5+|1 - x|$ на промежутке [0,4].

Решение:

1. Рассмотрим случай, когда $x \geq 1$.

$y = x^2 – 3x + 4$

Найдем производную функции:

$y' = 2x – 3$

$2x – 3 = 0$

$x = 1,5.$

$y(1) = 1 – 4 + 5 + (1 – 1) = 2$

$y(1,5) = 2,25 – 6 + 5 + (1 - 1,5) = 1,75$

$y(4) = 8.$

2. Рассмотрим случай, когда $x \leq 1$.

$y = x^2 - 5x + 6$

$y' = 2x - 5$

$2x - 5 = 0$

$x = 2{,}5$ – не подходит.

$y(0) = 6$.

Таким образом

$y_{\min} = 1{,}75$, $y_{\max} = 8$.

Пример 3.

При каких значениях параметра а функция y=2x3-3x2+7 возрастает в интервале (а – 1, а + 1)?

Решение:

Найдем область определения

$D(y) = R$

Вычислим производную функции:

$y' = 6x^2 - 6x = 6x\,(x - 1).$

Функция возрастает при $y' \geq 0$.

$6x\,(x - 1) \geq 0$

$x \leq 0$, $x \geq 1$, следовательно

а – 1≥ 1, а + 1 ≤ 0

а ≥ 2, а ≤ -1.

Ответ: [-1;2].

Пример 4.

Вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции $y=\sqrt{x^2+5}$ **в точке x=1,97.**

Решение:

Ближайшая к 1,97 точка, где легко вычислить значение функции и ее производной это2.

Вычисляем:

$$\Delta x = x - a = 1{,}97 - 2 = -0{,}03$$

$$f(a) = f(2) = 3$$

$$f^{|}(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}$$

$$f^{|}(a) = f^{|}(2) = \frac{2}{3}$$

Далее по формуле $f(x) = f(a+\Delta x) \approx f(a) + f^{|}(a)\Delta x$ получаем:

$$f(1{,}97) \approx 3 + \frac{2}{3}(-0{,}03) = 2{,}98$$

Пример 5.

Найти уравнение касательной плоскости в точке (2a; a; 1,5a) гиперболического параболоида

$$z = \frac{x^2 - y^2}{2a}$$

Решение:

Производные:

$Z'_x = x / a = 2$; $Z'_y = -y / a = -1$

Уравнение искомой плоскости:

$Z - 1.5a = 2(x - 2a) - (Y - a)$ или $Z = 2x - y - 1.5a$

Пример 6.

Составить уравнение касательной и нормали к кривой в точке А, соответствующей значению параметра t=0:

$$\begin{cases} x = 2e^{t} \\ y = e^{-t} \end{cases}$$

Решение:

Вычисляем координаты точки А: $a = 2, y(a) = 1$

Находим производную в точке а:

$$f'(0) = 2e^{t}\Big|_{t=0} = 2$$

$$g'(0) = -e^{-t}\Big|_{t=0} = -1$$

$$y'(0) = \frac{g'(0)}{f'(0)} = -\frac{1}{2}$$

Уравнение касательной имеет вид:

$$y = y(a) + y'(a)(x - a)$$

Откуда: $y = 1 - \frac{1}{2}(x - 2)$ - уравнение касательной.

Уравнение нормали имеет вид:

$$y = y(a) - \frac{1}{y'(a)}(x - a)$$

Откуда: $y = 1 + 2(x - 2)$ - уравнение нормали.

Пример 7.

При каком значении параметра p касательная к графику функции $y=x^3 - px$ в точке $a = 1$ проходит через точку А(2;3)?

Решение:

1) Найдем производную функции

$y' = 3x^2 - p.$

2) Найдем $y(a)$ и $y'(a)$

$y(1) = 1 - p,$

$y'(1) = 3 - p.$

3) Уравнение касательной имеет вид $y=f(a)+f'(a)(x-a)$

Подставим имеющиеся значения, получим:

$y=1 - p+ (3 - p)(x - 1) = (3 - p)x + p - 3 - p + 1= (3 - p)x - 2.$

Подставим координаты точки А:

$(3 - p)2 - 2 = 3$

$- 2p + 6 = 5$

$p = 0,5$

Ответ: 0,5.

Пример 8.

При каких значениях параметра a касательные к графику функции $y=4x^2-|a|x$, проведенные в точках его пересечения с осью x, образуют между собой угол 60°?

Решение:

Найдем нули функции:

$4x^2 - |a|x = 0$

$x(4x - |a|) = 0$

$x_1=0$

$x_2=|a|/4$

Т.к. оси параболы направлены вверх и т.к. $x_2 \geq x_1$, то

1) $y'(x_1) = -tg60°$

$y'(x_2) = tg60°$

Найдем значения производной:

1) $y'(0) = -|a| = -tg60^\circ$

$a=\pm\sqrt{3}$

$y'(|a|/4) = |a| = tg60^\circ$

$a=\pm\sqrt{3}$

2) $y'(0) = -|a| = -tg30^\circ$

$a=\pm\sqrt{3}/3$

Ответ: $\pm\sqrt{3}$, $\pm\sqrt{3}/3$.

Пример 9.

Исследуйте функцию $f(x) = x^3 + 2x^2$ □- x -□ 2 и постройте график.

- **Р е ш е н и е** :

Исследуем функцию по схеме.

1) область определения *x прин.* ***R*** (x – любое действительное число); область значений *y прин.* ***R***, так как $f(x)$ – многочлен нечётной степени;

2) функция $f(x)$ не является ни чётной, ни нечётной

3) $f(x)$ – непериодическая функция

4) график функции пересекается с осью Y в точке (0, – 2), так как $f(0) = -2$; чтобы найти нули функции нужно решить уравнение: $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$, один из корней которого ($x = 1$) очевиден. Другие корни находятся (если они есть!) из решения квадратного уравнения: $x^2 + 3x + 2 = 0$, которое получено делением многочлена $x^3 + 2x^2 - x - 2$ на двучлен ($x - 1$). Легко проверить, что два других корня: $x_2 = -2$ и $x_3 = -1$. Таким образом, нулями функции являются: -2, -1 и 1.

5) Это значит, что числовая ось делится этими корнями на четыре интервала знакопостоянства, внутри которых функция сохраняет свой знак :

Этот результат может быть получен разложением многочлена на множители:

$x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x + 2) (x + 1 (x – 1)$

и оценкой знака произведения *методом интервалов* .

6) Производная $f'(x) = 3x^2 + 4x - 1$ не имеет точек, в которых она не существует, поэтому её область определения ***R*** (все действительные числа); нули $f'(x)$ – это корни уравнения:

$$3x^2 + 4x - 1 = 0 .$$

Эти корни: $x_{1,2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{28}}{6} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{7}}{3}$. Функция имеет две критические точки и три интервала монотонности:

$$\left(-\infty, \frac{-2-\sqrt{7}}{3}\right), \left(\frac{-2-\sqrt{7}}{3}, \frac{-2+\sqrt{7}}{3}\right) \text{ и } \left(\frac{-2+\sqrt{7}}{3}, +\infty\right).$$

Полученные результаты сведем в таблицу и построим график:

x	$\left(-\infty, \frac{-2-\sqrt{7}}{3}\right)$	$\frac{-2-\sqrt{7}}{3}$	$\left(\frac{-2-\sqrt{7}}{3}, \frac{-2+\sqrt{7}}{3}\right)$	$\frac{-2+\sqrt{7}}{3}$	$\left(\frac{-2+\sqrt{7}}{3}, +\infty\right)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	~0.631	$\searrow$	~ −2.112	$\nearrow$
		max		min	

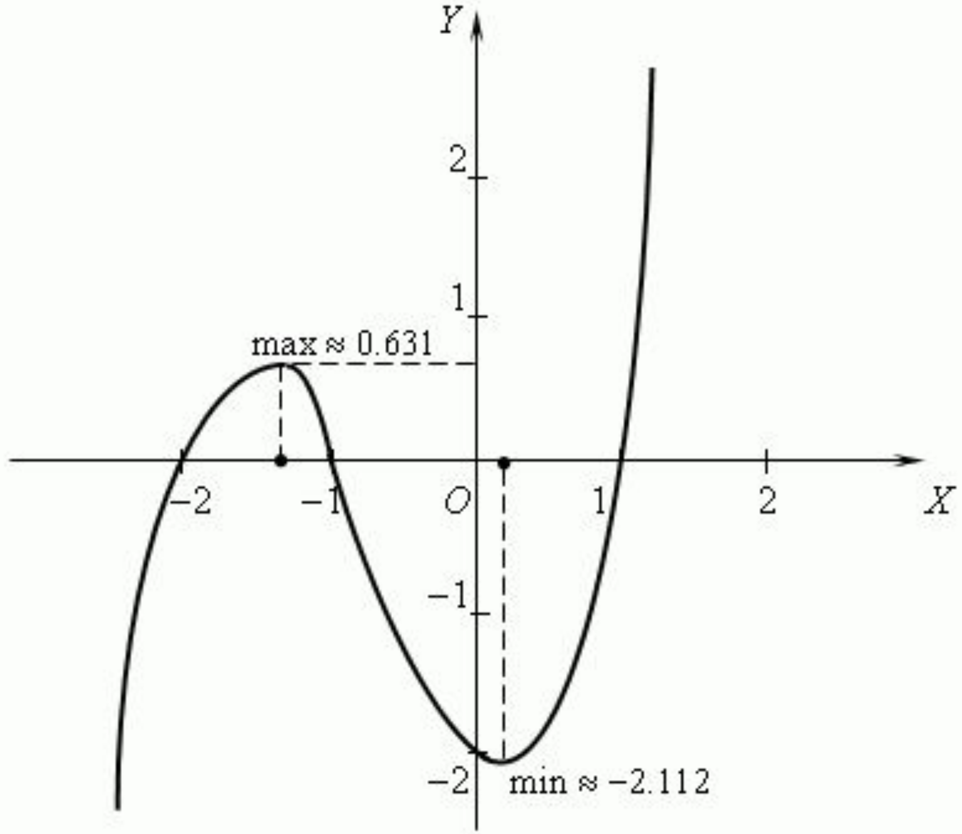


Рис. 7

Пример 10.

- **Найти сумму** $1+2*1/3+3(1/3)^2+\ldots+100(1/3)^{99}$;
- Решение.

  Найду сумму $g(x)=1+2x+3x^2+\ldots+100x^{99}$ и подставим в нее $x=1/3$.

  Для этого потребуется вспомогательная функция $f(x)=x+x^2+\ldots+x^{100}$.

  Ясно, что $f\,'(x)=g(x)$.

  $f(x)$ — сумма геометрической прогрессии.

  Легко подсчитать, что $f(x)=(x—x^{101})/(1—x)$. Значит,

  $g(x)=f\,'(x)=((1—101x^{100})(1—x)—(x—x^{100})(-1))/(1—x)^2=(1—102x^{100}+101x^{101})(1—x)^2$.

  Подставим $x=1/3$.
- Ответ: $0{,}25(9—205*3^{-99})$

Пример 11.

Зависимость пройденного телом пути от времени задается уравнением $s = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$ ($C = 0,1$ м/с, $D = 0,03$ м/с^2). Определить время после начала движения, через которое ускорение тела будет равно 2 м/с^2.

Решение:

$v(t) = s'(t) = B + 2Ct + 3Dt^2$;

$a(t) = v'(t) = 2C + 6Dt = 0,2 + 0,18t = 2$;

$1,8 = 0,18t$;

$t = 10$ с.

Пример 12.

Три резистора сопротивлениями R_1, R_2, R_3 соединены параллельно. Сопротивление R_1 в 9 раз больше сопротивления R_2. Если все три резистора соединить последовательно, то сопротивление цепи равно R.

Определить сопротивления резисторов при которых сопротивление исходной цепи будет наибольшим.

Решение:

$R_1 = 9R_2$

R_1, R_2, R_3

$R_{экв\ max}$ — ?

При параллельном соединении резисторов эквивалентное сопротивление по формуле:

$1/R_{экв} = 1/R_1+1/R_2+1/R_3$;

выражу R_3 через R_2:

$R_3 = R — R_1 — R_2 = R — 10R_2$;

тогда $1/R_{экв} = (10R — 91R_2)/(9R_2(R — 10R_2))$;

Задача сведена к определению наименьшего значения функции в интервале $[0;R/10]$.

Возьмем производную от $f(1/R_{экв})$ по R_2 и преобразуем ее:

$(1/R_{экв})' = -910(R_2 — R/7)(R_2 — R/13)/(9R_2^2(R-10R_2)^2)$;

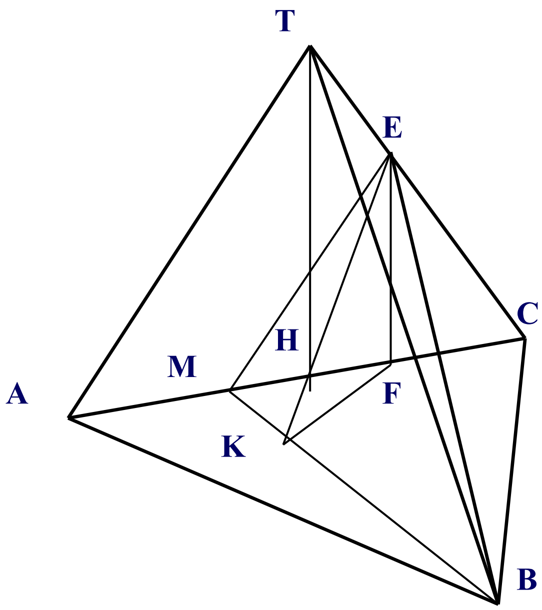
В интересующем нас интервале только одна точка $R_2 = R/13$ в которой эта производная меняет знак с “—” слева на ”+”справа. Поэтому в точке $R_2 = R/13$ достигается минимум функции $1/R_{экв}$ и максимум функции $R_{экв}$, при этом

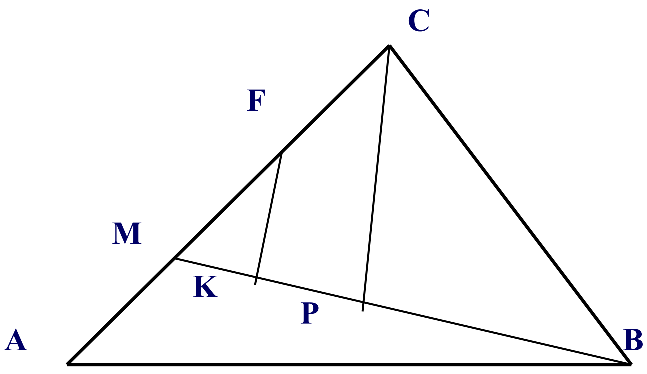
$R_1 = 9R/13;\ R_2 = 1R/13;\ R_3 = 3R/13;$

$R_{экв\ max} = 9R/169;$

Пример 12.

Высота пирамиды *TABC* с основанием *ABC* проходит через середину ребра *AC*. Выберите на *AC* точку *M* так, чтобы площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку *M*, середину ребра *TC* и вершину *B*, была наименьшей, если *AB=BC=AC=TC=2*.





Решение:

$HF=FC=1/2$;

$S\Delta BME = BM*EK*1/2$;

Из ΔTCH => $TH = \sqrt{4—1}=\sqrt{3}$;

$EF = TH/2=\sqrt{3}/2$;

Пусть $MC = x$.

Из ΔBMC по теореме косинусов $MB2= x2+4—2*2*x*1/2$;

$MB = \sqrt{x2—2x+4}$;

$S\Delta BMC = 0,5*MC*BC*\sin C=(x/2)*2\sqrt{3} /2 = x\sqrt{3}/2$;

$S\Delta BMC = 0,5*BM*PC$,

$PC = (2S\Delta BMC)/BM$, $PC = x\sqrt{3}/\sqrt{x2—2x+4}$;

ΔKMF подобен ΔPMC(по двум углам):

$KF/PC = MF/MC(рис\ 2),$

$KF = x\sqrt{3}(x-1/2)/(x\sqrt{x2-2x+4}) = \sqrt{3}(x-1/2)/(\sqrt{x2-2x+4})$;

Из ΔKEF => $KE = \sqrt{KF2+EF2} = \sqrt{3(x-1/2)2/(x2-2x+4)+3/4};$

$S\Delta BME = 0,5\sqrt{x2-2x+4} *\sqrt{3(x-1/2)2/(x2-2x+4)+3/4} = 0,5$
$\sqrt{3(x-1/2)2+(x2-2x+4)*3/4}$;

Если $S'(x) = 0$, то $6(x-1/2)+(2x-2)*3/4 = 0$;

$15x-9 = 0$;

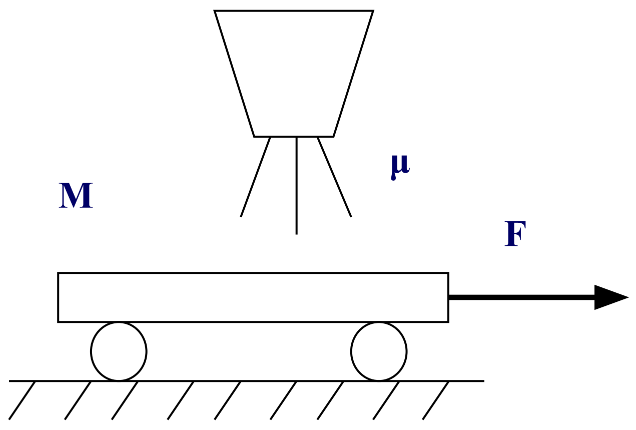
$x = 3/5$;

$S(3/5) = \sqrt{15}/5$ *кв.ед.*

Ответ: $\sqrt{15}/5$ *кв.ед.*

Пример 13.

Платформа массой *M* начинает двигаться вправо под действием постоянной силы *F*. Из неподвижного бункера на нее высыпается песок. Скорость погрузки постоянна и равна *μ* кг/с. Пренебрегая трением, найти зависимость от времени ускорения a платформы в процессе погрузки. Определить ускорение a_1 платформы в случае, если песок не насыпается на платформу, а из наполненной высыпается через отверстие в ее дне с постоянной скоростью *μ* кг/с.



Решение:

Рассмотрим сначала случай, когда песок насыпается на платформу

Движение системы платформа-песок можно описать с помощью второго закона Ньютона:

$dP/dt = F_{\Sigma}$

P – импульс системы платформа-песок, F_{Σ} – сила, действующая на систему платформа-песок.

Если через p обозначить импульс платформы, то можно написать:

$dp/dt = F$

Найдем изменение импульса платформы за бесконечно малый промежуток времени Δt:

$\Delta p = (M+\mu(t+\Delta t))(u+\Delta u) – (M+\mu t)u = F\Delta t$

где u – скорость платформы

Раскрыв скобки и, проведя сокращения получаем:

$\Delta p = \mu u\Delta t + M\Delta u+\mu\Delta ut+ \mu\Delta u\Delta t = F\Delta t$

Разделим на Δt и перейдем к пределу $\Delta t \to 0$

$M du/dt + \mu t du/dt + \mu u = F$ или

$d[(M+\mu t)u]/dt = F$

Это уравнение можно проинтегрировать, считая начальную скорость платформы равной нулю:

$(M+\mu t)u = Ft$

Следовательно:

$u = Ft/(M+\mu t)$

Тогда, ускорение платформы:

$a = du/dt = (F(M+\mu t)-Ft\mu)/(M+\mu t)^2 = FM / (M+\mu t)^2$

Рассмотрим случай, когда песок высыпается из наполненной платформы.

Изменение импульса за малый промежуток времени:

$\Delta p = (M-\mu(t+\Delta t))(u+\Delta u) + \mu \Delta t u - (M-\mu t)u = F\Delta t$

Слагаемое $\mu \Delta t u$ есть импульс количества песка, которое высыпалось из платформы за время Δt

Тогда:

$\Delta p = M\Delta u - \mu t\Delta u - \mu \Delta t \Delta u = F\Delta t$

Разделим на Δt и перейдем к пределу $\Delta t \to 0$

$(M-\mu t)du/dt = F$ или

$a_1 = du/dt = F/(M-\mu t)$

Ответ: $a = FM / (M+\mu t)^2$, $a_1 = F/(M-\mu t)$

Пример 14.

Выбрать оптимальный объем производства фирмой, функция прибыли которой может быть смоделирована зависимостью:

$\boldsymbol{\pi(q) = R(q) - C(q) = q^2 - 8q + 10}$

Решение:

$\pi'(q) = R'(q) - C'(q) = 2q - 8 = 0 \rightarrow q_{extr} = 4$

При $q < q_{extr} = 4 \rightarrow \pi'(q) < 0$ и прибыль убывает

При $q > q_{extr} = 4 \rightarrow \pi'(q) > 0$ и прибыль возрастает

Заключение.

Применение производной довольно широко и его сложно полностью охватить в работе такого типа, однако мы попытались раскрыть основные, базовые моменты. В наше время, в связи с научно-техническим прогрессом, в частности с быстрой эволюцией вычислительных систем, дифференциальное исчисление становится все более актуальным в решении как простых, так и сверхсложных задач.

Список использованной литературы.

- Ссылки:
- http://accoona.ru/referat/ref22360.html
- http://www.college.ru/mathematics/index.php
- http://do.rksi.ru/library/courses/mat_ec/tema2_4.dbk
- http://www.iteach.ru/UMPcatalog/f_v801/u_e901/f_f901?path=unit_support/teacher_support/teacher_web_site/new_page_1.htm