Решение квадратных неравенств с параметрами

Учитель математики МАОУ лицей №3 города Кропоткин Краснодарского края Зозуля Елена Алексеевна

Цели:
формировать умения решать квадратные неравенства;
развивать логическое мышление, умение работать в проблемной ситуации;
активизировать познавательную и творческую деятельность.

Задание 1

При каких значениях $\boldsymbol{a}$ неравенство

$$ax^2+2ax+2x+2a+2\leq 0$$

выполняется при любых значениях $\boldsymbol{x}$?

Решение:

а)неравенство выполняется при любых значениях ***x***, если $\begin{cases} \grave{a} < 0 \\ D \le 0 \end{cases}$

$ax^2+x\cdot(2a+2)+2a+2\le 0$

D =***$(2a)^2-4a\cdot(2a+2)=4a^2+8a+4-8a^2-8a=4-4a=4\cdot(1-a^2)=4\cdot(1-a)\cdot(1+a)$***

$$\begin{cases} \grave{a} < 0 \\ 4(1-\grave{a})(1+\grave{a}) \le 0 \end{cases}$$

Итак, при а $\le$-1, уравнение имеет корни при любых значениях ***x***

Ответ: при *a* $\le$-1

Задание 2

а)При каких значениях ***а*** решением неравенства $(x-a)^2(x-3)(x+1) \leq 0$ является сплошной промежуток?

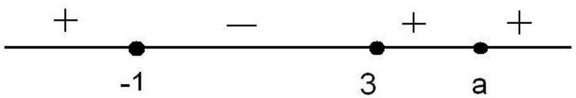
б) При каких значениях ***а*** неравенство

$$\frac{x-2a-1}{x-a}<0$$

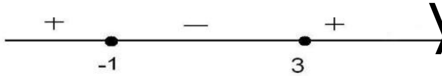
выполняется при всех значениях ***х*** из отрезка $[1;2]$

Решение а):

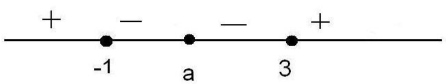
а)рассмотрим «плавающую» точку ***а*** на отрезке прямой относительно точек -1 и 3

1) a<3 

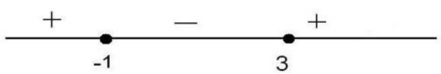
$x \in [-1;3] \cup \{a\}$ не удв.услов.

2) a=3 

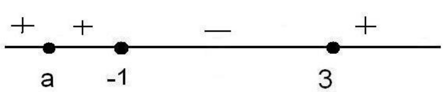
удв.услов. $x \in [-1;3]$

3) -1<a<3 

удв.услов. $x \in [-1;3]$

4) a= -1 

$x \in [-1;3]$ удв.услов.

5) a< -1 

$x \in [-1;3] \cup \{a\}$ не удв.услов.

Ответ: при -1≤a≤3

Решение б):

$$\frac{x-2a-1}{x-a}<0 \qquad \frac{x-(2a+1)}{x-a}<0$$

$x\in[1;2]$

1) при а >0 $\begin{cases} à>0 \\ à<1 \\ 2à+1>2 \end{cases}$ $\begin{cases} à>0 \\ à<1 \\ à>\frac{1}{2} \end{cases}$

$\frac{1}{2}$<a<1

2)при a<0 нет решений

Ответ: при $a\in\left(\frac{1}{2};1\right)$

Задание 3

Найти все ***a***, при которых неравенство

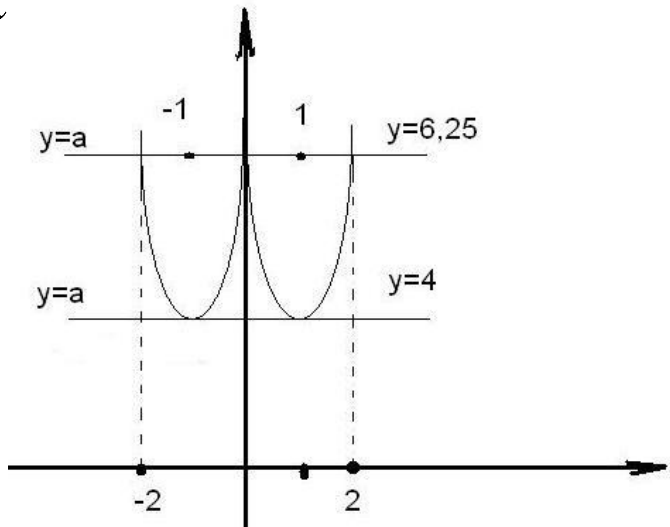
$$x^2 + \frac{1}{x^2} - a + 2 \leq 0$$

имеет не менее трех целых решений.

Решение:

$$x^2+\frac{1}{x^2}-a+2\le 0 \qquad x^2+2+\frac{1}{x^2}\le a \qquad \left(x+\frac{1}{x}\right)^2\le a$$

$$y=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 \qquad y=a$$

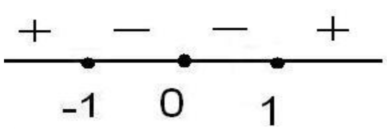


Рассмотрим две функции

и выполним рисунок:

При ***a=4*** нер-во примет вид

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\le 0 \qquad \frac{(x-1)(x+1)^2}{x^2}\le 0$$



при ***x=±2*** получаем нер-во

$$\left(2+\frac{1}{2}\right)^2\le a \qquad a\ge 6{,}25$$

Всего 2 целых решения(не удв.усл.) получается 4 целых корня: 2;1;1;2

При всех $a\ge 6{,}25$, тоже 4 корня, т.е. больше 3

Ответ: $a\in[6{,}25;+\infty)$

Задание 4

Найти все ***a***, при которых неравенство

$$4x^2 + \frac{4}{x^2} - 5a - 8 \le 0$$

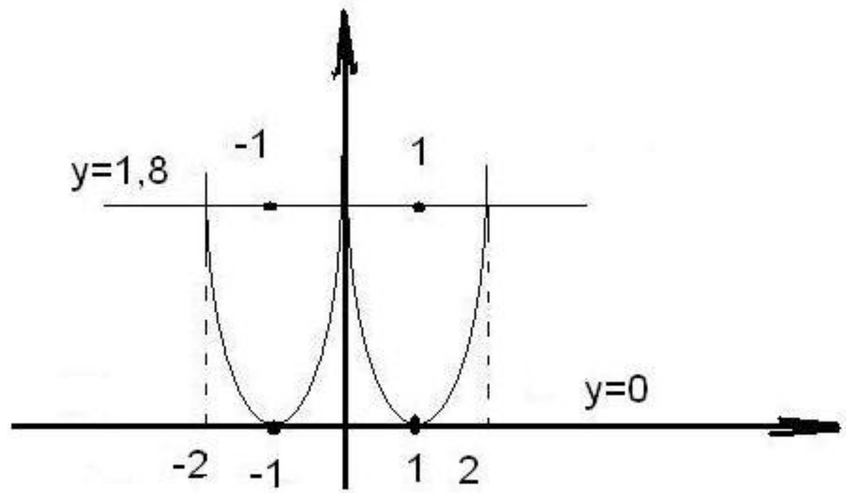
имеет ровно два целых решения.

Решение:

$$4x^2+\frac{4}{x^2}-5a-8\le 0 \qquad 4\left(x^2-2+\frac{1}{x^2}\right)-5a\le 0 \qquad \left(x+\frac{1}{x}\right)^2\le\frac{5}{4}a$$

Рассмотрим две функции и выполним рисунок:

$$y=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 \qquad y=\frac{5}{4}a$$



При 0≤***a<1,8*** нер-во имеет ровно 2 целых решения

при ***x=±2*** нер-во имеет 4 целых решения, значит при ***x>2*** найдем все ***a***

$$\left(2+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}a \qquad \frac{9}{4}=\frac{5}{4}a \qquad a=1{,}8$$

Ответ:

$$a\in[0;1{,}8)$$

a^2

Задание на дом

- Найдите все значения x, для каждого из которых неравенство
$(2-x)a^2+(x^2-2x+3)a-3x\geq 0$

выполняется для любого значения a, принадлежащего промежутку [-3;0].

- Ответ: -1