РАЗДЕЛ 1.
Применение методов планирования и прогнозирования к решению управленческих задач на транспорте

1. Метод индексного анализа

В задачах данного типа используется несколько видов индексов:

1. индекс роста;
2. индекс соотношения;
3. структурный индекс;
4. натуральный индекс;
5. стоимостной индекс.

Индексы могут применяться или в виде коэффициента, или в виде процента. Чтобы индекс-коэффициент перевести в проценты, достаточно коэффициент умножить на 100 %.

ИНДЕКС РОСТА применяется в том случае, когда необходимо сравнить два различных периода времени. Индекс роста показывает, во сколько раз экономический показатель одного периода больше (или меньше) того же показателя, но за другой период времени.

К примеру индекс роста объема производства (**JV**) рассчитывается по формуле:

$$J_V = \frac{V_i}{V_0}$$

где V_i - объем производства в отчетном году;

V_0- объем производства в базисном году.

ИНДЕКС СООТНОШЕНИЯ применяется, когда необходимо сравнить два экономических объекта (два предприятия, два района, две отрасли) за один и тот же период.

Индекс соотношения покажет, во сколько раз показатель, характеризующий один экономический объект, больше (или меньше) того же показателя, но характеризующего другой экономический объект.

К примеру чтобы сравнить два предприятия по величине производительности труда необходимо рассчитать индекс соотношения производительности труда ($J_{ПТ}$) первого и второго предприятий.

$$J_{ПТ} = \frac{ПТ_1}{ПТ_2}$$

$ПТ_1$ - производительность труда на первом предприятии в i-ом году; $ПТ_2$ - производительность труда на втором предприятии в i-ом году.

СТРУКТУРНЫЙ ИНДЕКС используется для характеристики структуры (состава) какого либо экономического явления.

Например, структурный индекс покажет, какую долю (в %) в общем объеме производства занимает то или иное предприятие. Индексы могут быть рассчитаны как на базе натуральных, так и на базе стоимостных показателей. В первом случае индекс называется натуральным, во втором - стоимостным.

- **Пример 1.** требуется рассчитать **стоимостной индекс** роста объема производства по району в целом, если известно что V_0 ,V_1 - объем производства за 2010 и 2011 гг. в денежном выражении; N_1,N_2 - количество продукции (услуг), выпускаемых на 1 и 2-ом предприятиях (объем производства в натуральном выражении); P_1,P_2- цена единицы изделия (услуги) на 1-ом и 2-ом предприятиях.

$$J_v = \frac{V_0}{V_1} = \frac{\left(P_1 \cdot N_1 + P_2 \cdot N_2\right) \text{за 2010 год}}{\left(P_1 \cdot N_1 + P_2 \cdot N_2\right) \text{за 2011 год}}$$

Соответственно, **натуральный индекс** роста объема производства

$$J_v = \frac{V_0}{V_1} = \frac{\left(N_1 + N_2\right) \text{за 2010 год}}{\left(N_1 + N_2\right) \text{за 2011 год}}$$

- Если необходимо определить стоимостной индекс роста производительности труда, то сначала нужно подсчитать **стоимостной показатель производительности труда** (руб./чел.),

$$ПТ_{стоим.} = \frac{P N \cdot}{Ч}$$

- для расчета натурального индекса роста производительности труда используется **натуральный показатель производительности труда** (шт./чел).

$$ПТ_{нат.} = \frac{N}{Ч}$$

- Где *Ч* – численность работающих

- **стоимостной индекс роста производительности труда**

$$J_{ПТ} = \frac{ПТ_{стоим.} \text{за 2010 год}}{ПТ_{стоим.} \text{за 2011 год}}$$

- **Натуральный индекс роста производительности труда**

$$J_{ПТ} = \frac{ПТ_{нат.} \text{за 2010 год}}{ПТ_{нат.} \text{за 2011 год}}$$

Если необходимо сравнение производительности труда 1-ого и 2-ого заводов то оно осуществляется с помощью **индекса соотношения**. При этом используются натуральные показатели производительности труда.

Структурные индексы должны показать долю каждого предприятия в общем объеме продукции района. Структурные индексы нужно рассчитать по натуральному объему производства. При этом объем продукции района принимается за 100 %.

2. Метод многофакторного экономического анализа

МЕТОД ЭКОНОМИЧЕСКОГО АНАЛИЗА - это метод, при котором сначала производится разложение исследуемого показателя на составные части, а затем производится анализ влияния каждой составляющей на изменение показателя в целом.

Например, показатель объема производства в денежном выражении, можно разложить на 3 составляющих:

1. производительность труда, измеряемую в натуральных единицах (Птн),
2. цену продукции (Р)
3. численность работающих (Ч):

$$\text{ИТ} = P_{H} \text{Ч} \quad \cdot$$

- Если в какой-либо период произошло изменение объекта производства (ΔV), то оно могло произойти и за счет изменений производительности труда, и за счет изменений цены и за счет изменения численности работающих.

$$\Delta V = \Delta V_{ПТ} + \Delta V_{P} + \Delta V_{Ч}$$

ΔV – общий прирост (уменьшение) объема производства;

ΔVпт – изменение объема производства за счет производительности труда;

ΔVр – изменение объема производства за счет цен;

ΔVч – изменение объема производства за счет численности работающих;

- Далее необходимо определить, в какой степени каждый из факторов повлиял на прирост (снижение) объема производства предприятия. Для этого сначала определяют, как влияет рост численности работников на изменение объема производства. Для этого используется формула:

$$\Delta V_{Ч} = \frac{V_0}{Ч_0} \times (Ч_1 - Ч_0)$$

Где V_0 – объем производства в базисном периоде;

$Ч_0$ и $Ч_1$ - численность работающих в базисном и отчетном периодах.

Далее определяется влияние фактора цен:

$$\Delta V_P = \frac{V_0}{\overline{P}_0} \times \left(\overline{P}_1 - \overline{P}_0\right)$$

$\overline{P}_0$, $\overline{P}_1$ - средняя цена на продукцию в базисном и отчетном периодах. Она определяется по формуле:

$$\overline{P} = \frac{P_1 \cdot N_1 + P_2 \cdot N_2 + ... + P_n \cdot N_n}{N_1 + N_2 + ... + N_n}$$

- $P_1, P_2, \ldots, P_n$ – цена за единицу продукции 1, 2, …, *n*-го вида;
- $N_1, N_2, \ldots, N_n$ – количество выпущенной продукции 1, 2,…, *n*-го вида.

В последнюю очередь рассчитывается влияние фактора «производительность труда» по формуле:

$$\Delta V_{ПТ} = \Delta V - \Delta V_{Р} - \Delta V_{Ч}$$

Последовательность расчета факторов нужно строго соблюдать.

Пример 2: Необходимо проанализировать причины изменения объемов производства компании оказывающей 2 вида услуг.

1. Определяем общий стоимостной прирост услуг компании.
2. Рассчитываем значения факторов прироста стоимостного объема услуг методом многофакторного экономического анализа:
   - определяется влияние численности работающих, в рублях (и доля фактора в общем приросте, в процентах);
   - определяется влияние фактора цен, в рублях (и доля в %);
   - определяется влияние производительности труда. Влияние производительности труда рассчитывается как разница: общий прирост (100 %) минус фактор численности минус фактор цен. Влияние производительности труда рассчитывается не только в процентах, но и в рублях.
3. Когда влияние всех трех факторов подсчитано, необходимо проанализировать, хорошо или плохо сработало предприятие и что нужно сделать в будущем, чтобы улучшить положение. На который из факторов нужно обратить наибольшее внимание, а какие факторы можно оставить в прежнем положении.

3. Основы снабжения автопредприятий материально-техническими ресурсами

Программа обеспечения автотранспортных предприятий сырьем и материалами рассчитывается:

1) по отдельным видам сырья (в натуральном выражении);

2) по отдельным видам продукции (в стоимостном выражении);

3) в целом по предприятию (в стоимостном выражении).

Для удобства решения задач подобного типа обычно составляются таблицы в Excel.

Вид сырья	Цена за единицу ресурса	Виды услуг (продукции)				Общее количество ресурса в месяц	Общее количество ресурса в год	Стоимость ресурсов
		Услуга 1	Услуга 2	…	Услуга n			
Ресурс 1								
Ресурс 2								
…								
Ресурс m								
							Общая стоимость	$\sum$

1. С помощью полученной таблицы определяют затраты сырья в натуральном выражении.
2. Подводят итоги по видам сырья.
3. Определяют затраты сырья в стоимостном выражении.
4. Подводят итоги по видам сырья.
5. Подводят итоги по видам продукции.
6. Подводят общий итог (по видам сырья и по видам продукции).

Соотношение экономичного размера заказа и других показателей

- Размер (вес) одной партии масел (с учетом минимизации издержек на доставку и хранение материалов) рассчитывается по формуле:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot Q \cdot b}{a \cdot \overline{P}}}$$

- где Q* - число единиц, соответствующих одной поставке (размер партии);
- Q - годовой расход масла на оказание услуг;
- a - издержки на содержание материала, %;
- P - цены единицы материала. При этом используется средневзвешенная цена за 1 кг (масел);
- b - расходы на получение одной поставки, %;

4. Метод статистических группировок в оценке деятельности транспортных компаний

МЕТОД ГРУППИРОВОК состоит в объединении экономических объектов в однородные группы для целей проведения анализа.

Группировки можно осуществлять по одному или нескольким группировочным признакам.

К примеру, группировка по видам автопредприятий - это группировка по одному группировочному признаку. Её можно осуществить следующим образом:

а) записываем в одну группу все предприятия одного и того же типа: в первую группу автобазы (АБ), во вторую – автоколонны (АК), в автокомбинаты (АКМ).

б) подсчитываем количество предприятий, попавших в каждую группу.

В практической задаче 4 такой группировки недостаточно, чтобы провести необходимый анализ, поэтому нужна группировка не только по видам автопредприятий (АТП), но и по размеру прибыли. Это уже группировка по двум группировочным признакам. Чтобы осуществить такую группировку, достаточно в уже полученной нами группировке (по видам АТП) записать для каждого предприятия соответствующий ему размер прибыли.

Такая группировка будет иметь уже не два, а три столбца, в первом из которых записаны виды предприятий, во втором - названия АТП, в третьем – проставлена сумма прибыли каждого предприятия.

Для анализа массы прибыли нужно суммировать её по каждой из выделенных групп. Для анализа прибыльности АТП можно рассчитывать два показателя:

1. Средняя прибыль, приходящаяся на предприятие данного вида.
2. Рентабельность продукции по группам предприятий.

Рентабельность продукции (*Pe*) рассчитывается по формуле:

$$П_e = \frac{П}{V} \cdot 100\%$$

где П - размер прибыли; V - объем продукции.

Для анализа рентабельности предприятий в соответствии с их величиной необходимо составить другую группировку: по объему производства и по рентабельности продукции. Для этого нужно:

a) записать АТП в порядке убывания объемов производства;

b) определить границы выделяемых групп и шаг группировки по формуле:

$$Ш_Г = \frac{\max - \min}{K}$$

где Шг - шаг группировки; max – максимальное значение объема производства, min - минимальное значение объема производства, К - количество выделяемых групп (К=3: крупные, средние и мелкие предприятия).

Верхней границей первой выделяемой группы значение выручки (max). Нижнюю границу ($Г_н$) первой группы рассчитывают по формуле:

$$Г_Н = \max - Ш_Г$$

Это же число будет верхней границей второй выделяемой группы и т.д.

) рассчитать рентабельность продукции по каждому сельхозпредприятию,

) полученную рентабельность занести в уже имеющуюся таблицу - группировку в третий столбец.

Определить зависимость между двумя показателями можно с помощью уже имеющейся у нас группировки. Для этого проследите по таблице, что происходит с показателем рентабельности (растет он или уменьшается) с уменьшением объема производства.

5. Использование корреляционно-регрессионного анализа при решении управленческих задач на транспорте

МЕТОД КОРРЕЛЯЦИОННО-РЕГРЕССИОННОГО АНАЛИЗА состоит из 2-х взаимосвязанных методов:

1. метода корреляционного анализа;
2. метода регрессивного анализа.

МЕТОД КОРРЕЛЯЦИОННОГО АНАЛИЗА позволяет определить, существует ли между экономическими показателями взаимосвязь и какова сила (степень) этой связи.

Для определения степени взаимосвязи (тесноты связи) рассчитывается коэффициент корреляции (R).

$$R = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{G_x \cdot G_x}$$

Считается, что при значениях величины R=± 0,7 и выше существует связь между рассматриваемыми факторами.

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \qquad \overline{y} = \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n}$$

$$\overline{xy} = \frac{x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \ldots + x_n \cdot y_n}{n}$$

$$G_x = \sqrt{\overline{x^2} - \bar{x}^2}$$

$$\overline{x^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}$$

$$\bar{x}^2 = \left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \right)^2$$

$$G_y = \sqrt{\overline{y^2} - \bar{y}^2}$$

$$\overline{y^2} = \frac{y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2}{n}$$

$$\bar{y}^2 = \left(\frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n} \right)^2$$

МЕТОД РЕГРЕССИВНОГО АНАЛИЗА позволяет определить точную формулу, отражающую взаимосвязь двух показателей ***x*** и ***y***. Эта формула называется уравнением регрессии.

Уравнение регрессии показывает как изменяется величина ***y***, если величина ***x*** изменится на единицу.

С помощью регрессивного анализа уравнение линейной зависимости ***y=kx + b*** определяется через его параметры ***k*** и ***b****, которые, в свою очередь* определяются решением системы уравнений:

$$\begin{cases} n \cdot b + k \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ b \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + k \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i \end{cases}$$

Если например, при решении системы уравнений получили k=2,5; b=1,8 , то x и y связаны между собой уравнением зависимости вида $\boldsymbol{y=2.5 \cdot x+1,8}$.

<u>Метод корреляционно-регрессионного прогнозирования осуществляется в следующем порядке:</u>

1) На основе вычисления R, устанавливается показатель (фактор X) в наибольшей степени определяющий Y (зависимую переменную)

2) с помощью корреляционно-регрессионного анализа определяется формула, показывающая зависимость между показателем Y и его фактором X. Пусть, например, полученная формула имеет вид уравнения: $y=2,5 \cdot x+1,8$

2) в полученное уравнение подставляется прогнозное значение X. Пусть, например, $\boldsymbol{X_{прогн}}$=4. Тогда: $y=2,5 \cdot 4+1,8$

3) вычисляется искомое прогнозное значение $\boldsymbol{Y}$. Таким образом: $y=2,5 \cdot 4+1,8=11,8$.

Значит в прогнозном периоде Y составит 11,8/

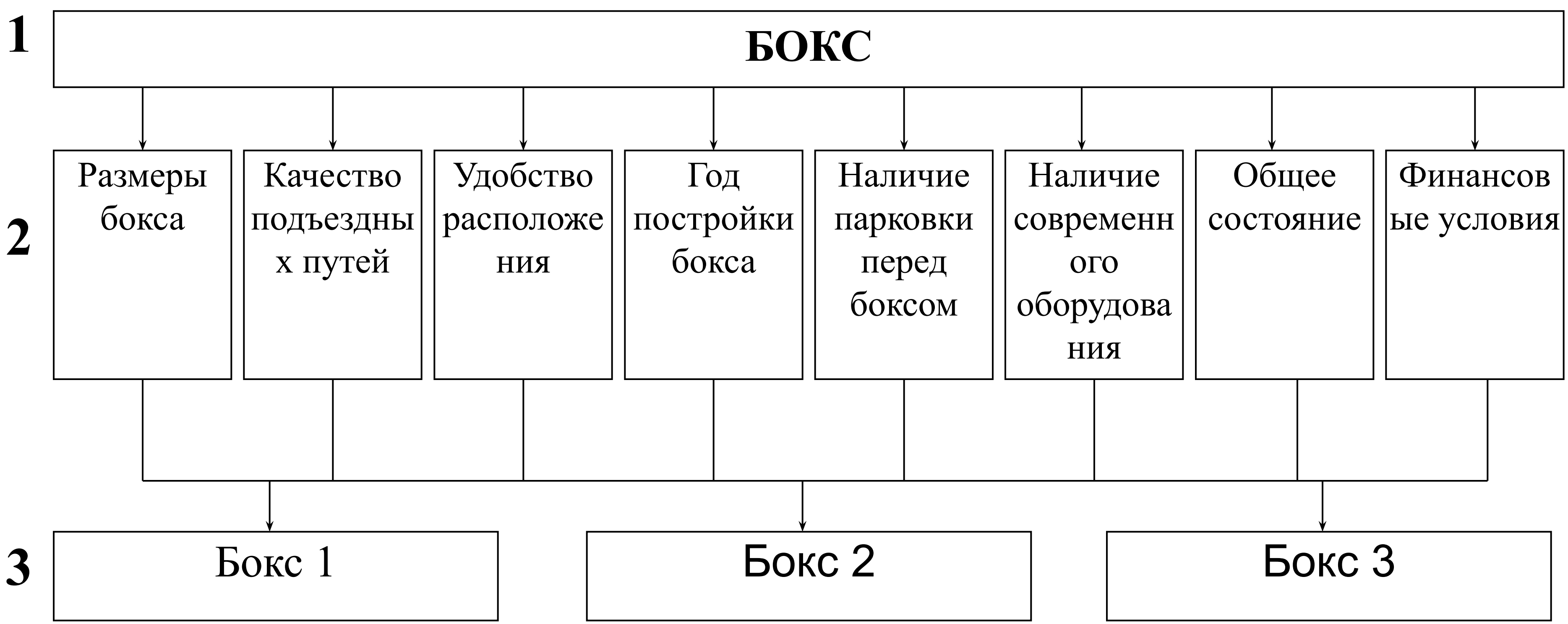
РАЗДЕЛ 2.
Применение метода анализа иерархий к решению управленческих задач на транспорте

- Метод анализа иерархий (МАИ) является процедурой для иерархического представления элементов, определяющих суть любой проблемы. Метод состоит в делении проблемы на все более простые составляющие части и дальнейшей обработке последовательности суждений лица, принимающего решение (ЛПР), **по парным сравнениям**. Эти суждения затем выражаются численно. МАИ включает процедуры синтеза множественных суждений, получения приоритетности критериев и нахождения альтернативных решений. Полученные таким образом значения соответствуют жестким оценкам.

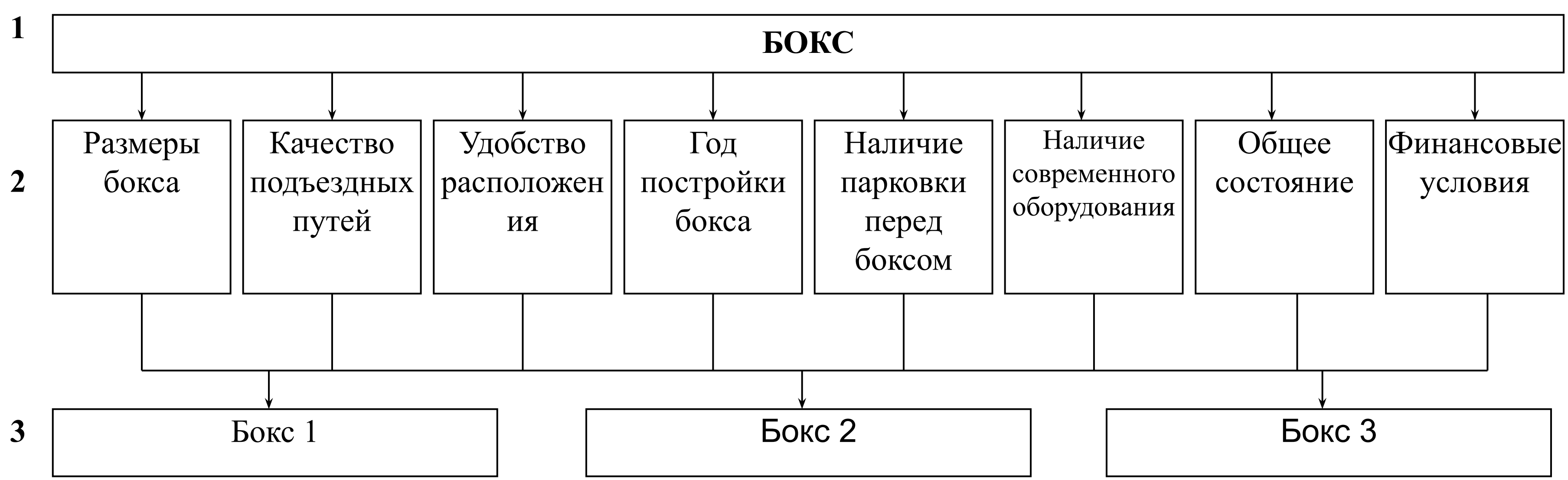
- На первом этапе выявляются наиболее важные элементы проблемы, на втором — осуществляются оценки элементов; следующим этапом может быть выработка способа применения решения и оценка его качества. Весь процесс подвергается проверке. Процесс может быть проведен над последовательностью иерархий: в этом случае результаты, полученные в одной из них, используются в качестве входных данных при изучении следующей.

Пример 3:

Автопредприятие решило приобрести ремонтный бокс для обслуживания своего автопарка и оказания сторонних услуг. В результате обсуждения удалось определить восемь критериев, которым, должен удовлетворять бокс.



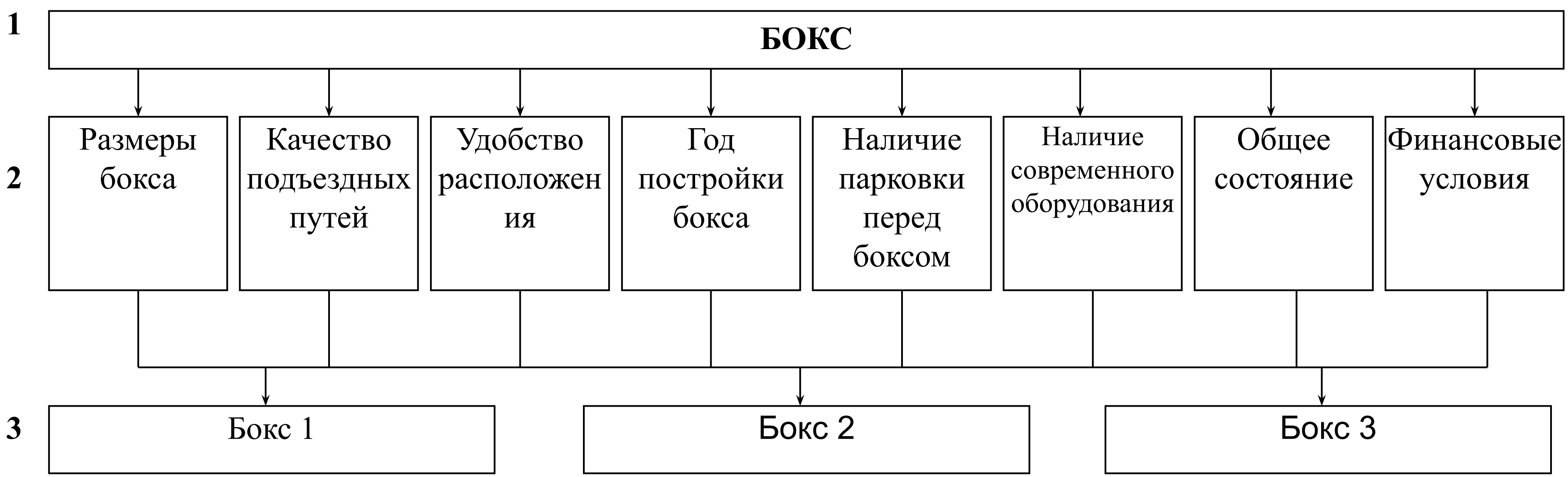
Менеджмент компании решил определять сравнительную важность всех факторов. Задача заключалась в выборе одного из трех боксов-кандидатов. Первый шаг состоит в декомпозиции и представлении задачи в иерархической форме. На первом (высшем) уровне находится общая цель — «Бокс». На втором уровне находятся восемь критериев, уточняющих цель, и на третьем (нижнем) уровне находятся три бокса-кандидата, которые должны быть оценены по отношению к критериям второго уровня.



У менеджеров компании были следующие критерии:

1. *Размеры бокса:* количество машиномест; размеры мест; общая площадь бокса.
2. *Качество подъездных путей:* наличие и состояние подъездных путей к боксу.
3. *Удобство расположения:* интенсивность движения транспорта; близость к транспортным маршрутам, реализуемым автопредприятием.
4. *Год постройки бокса:* не нуждается в объяснении.
5. *Наличие парковки перед боксом:* включает пространство перед боксом, которое могло бы использоваться для стоянки и маневрирования автомобилей.
6. *Современное оборудование:* ямы и подъемники; система удаления газа; кондиционирование воздуха; система сигнализации и другие подобные устройства, имеющиеся в боксе.
7. *Общее состояние:* потребность в ремонте; стены, состояние оборудования; электропроводка; крыша; водопроводная система.
8. *Финансовые условия:* условия продажи, возможность банковского кредитования и установленный процент.

- Элементы нижнего уровня иерархии должны быть попарно сравнимы по отношению к элементам следующего уровня и т.д. вплоть до вершины иерархии.
- Например, менеджмент компании должен получить ответы на вопросы такого типа: «Насколько бокс А лучше бокса Б или В по критерию «Удобство расположения?» или «Насколько по отношению к основной цели (выбор бокса) размеры бокса важнее качества подъездных путей?» и т.д.



- МАИ требует структурирования проблемы участниками в процессе решения; в этом простом примере менеджеры автопредприятия составляют иерархию в соответствии с их потребностями, пониманием ограничений (например, денежных средств) и существующими вариантами выбора. Этот этап требует обсуждения, чтобы быть уверенными, что критерии и альтернативы отражают весь диапазон предпочтений и восприятия участников.

Пусть $A_1,\ A_2,\ A_3,\ldots A_n$ — множество из *n* элементов

И $\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ldots \omega_n$ — соответственно их веса, или интенсивности. С использованием МАИ сравним вес, или интенсивность, каждого элемента с весом, или интенсивностью, любого другого элемента множества по отношению к общему для них свойству или цели.

Для проведения субъективных парных сравнений разработана специальная шкала.

Шкала относительной важности МАИ

Интенсивность относительной важности	Определение	Объяснения
1	Равная важность	Равный вклад двух видов деятельности в цель
3	Умеренное превосходство одного над другим	Опыт и суждения дают легкое превосходство одному виду деятельности над другим
5	Существенное или сильное превосходство	Опыт и суждения дают сильное превосходство одному виду деятельности над другим
7	Значительное превосходство	Одному виду деятельности дается настолько сильное превосходство, что оно становится практически значительным
9	Очень сильное превосходство	Очевидность превосходства одного вида деятельности над другим подтверждается наиболее сильно
2, 4, 6, 8	Промежуточные решения между двумя соседними суждениями	Применяются в компромиссном случае
Обратные величины приведенных выше чисел	Если при сравнении одного вида деятельности с другим получено одно из вышеуказанных чисел (например 3), то при сравнении второго вида деятельности с первым получим обратную величину (т е. 1/3)	

Сравнение весов можно представить следующим образом:

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & A_1 & A_2 & A_3 & \cdots & A_n \\
\hline
A_1 & \boxed{\dfrac{\omega_1}{\omega_1}} & \dfrac{\omega_1}{\omega_2} & \boxed{\dfrac{\omega_1}{\omega_3}} & \cdots & \dfrac{\omega_1}{\omega_n} \\
A_2 & \dfrac{\omega_2}{\omega_1} & \boxed{\dfrac{\omega_2}{\omega_2}} & \dfrac{\omega_2}{\omega_3} & \cdots & \dfrac{\omega_2}{\omega_n} \\
A_3 & \boxed{\dfrac{\omega_3}{\omega_1}} & \dfrac{\omega_3}{\omega_2} & \boxed{\dfrac{\omega_3}{\omega_3}} & \cdots & \dfrac{\omega_3}{\omega_n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
A_n & \dfrac{\omega_n}{\omega_1} & \dfrac{\omega_n}{\omega_2} & \dfrac{\omega_n}{\omega_3} & \cdots & \boxed{\dfrac{\omega_n}{\omega_n}}
\end{array}
$$

- Когда проблемы представлены иерархически, матрица составляется для сравнения относительной важности критериев на втором уровне по отношению к общей цели на первом уровне. Подобные матрицы должны быть построены для парных сравнений каждой альтернативы на третьем уровне по отношению к критериям второго уровня. Матрица составляется, если записать сравниваемую цель-(или критерий) вверху и перечислить сравниваемые элементы слева и сверху.

- В примере, связанном с покупкой бокса, потребуется девять таких матриц: одна для второго уровня иерархии и восемь — для третьего уровня.

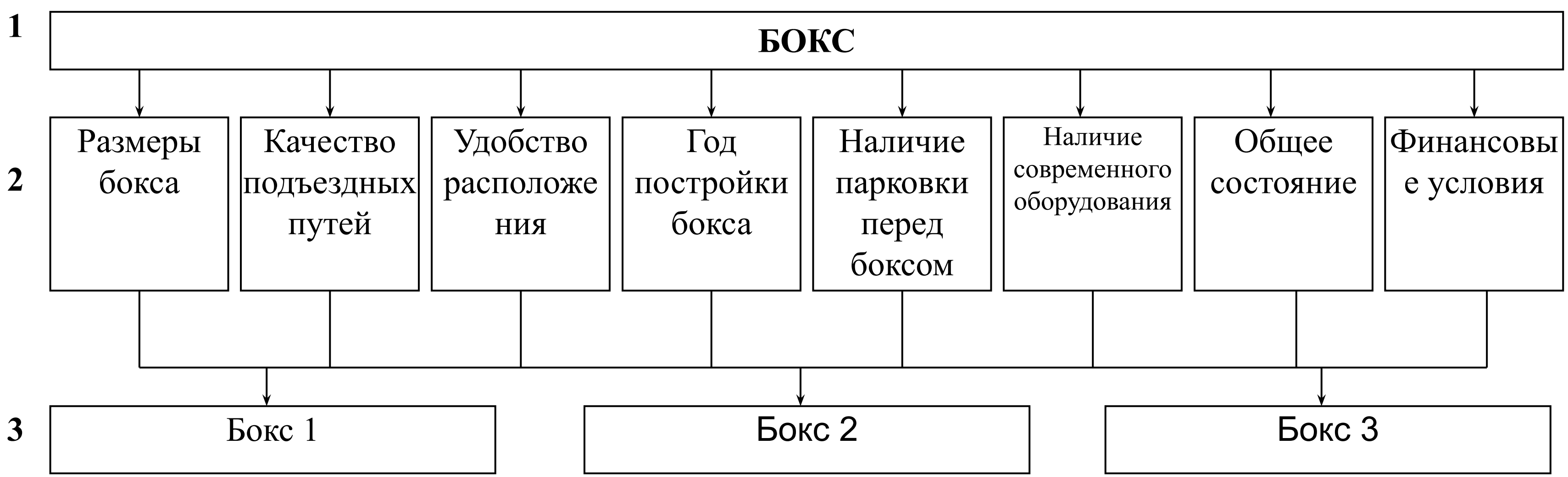
Покупка бокса: матрица попарных сравнений для уровня 2

	Размеры бокса	Качество подъездных путей	Удобство располож ения	Год постройки бокса	Наличие парковки перед боксом	Наличие современного оборудования	Общее состояние	Финансов ые условия
Размеры бокса								
Качество подъездных путей								
Удобство расположения								
Год постройки бокса								
Наличие парковки перед боксом								
Наличие современного оборудования								
Общее состояние								
Финансовые условия								

Покупка бокса: матрица попарных сравнений для уровня 3

Размеры бокса	А	Б	В	Качество подъездных путей	А	Б	В
А				А			
Б				Б			
В				В			
Удобство расположения	А	Б	В	**Год постройки бокса**	А	Б	В
А				А			
Б				Б			
В				В			
Наличие парковки перед боксом	А	Б	В	**Наличие современного оборудования**	А	Б	В
А				А			
Б				Б			
В				В			
Общее состояние	А	Б	В	**Финансовые условия**	А	Б	В
А				А			
Б				Б			
В				В			

- Пока клетки этих матриц не заполнены; они оставлены для оценок или суждений об относительной важности сравниваемых отдельных предметов по отношению к цели, или критерию, обозначенному вверху.
- Для примера с покупкой бокса вопросы, которые следует задавать при сравнении двух критериев на втором уровне, будут такого рода: который из двух сравниваемых критериев считается более важным для менеджеров компании, покупающей бокс, и насколько он более важен именно по отношению к цели «БОКС»?
- Аналогично на третьем уровне следует спросить: какой из сравниваемых боксов более желателен для компании и насколько он более желателен по отношению к определенному критерию второго уровня по которому производится сравнение(например, «по размеру»)?



- **ВАЖНО:** сравнивается относительная важность левых элементов матрицы с элементами наверху. Поэтому если элемент слева важнее, чем элемент наверху, то в клетку заносится положительное целое (от 1 до 9); в противном случае — обратное число (дробь). Относительная важность любого элемента, сравниваемого с самим собой, равна 1; поэтому диагональ матрицы (элементы от левого верхнего угла до нижнего правого) содержит только единицы. Наконец, обратными величинами заполняют симметричные клетки, т. е. если элемент А воспринимается как «слегка более важный» (3 на шкале) относительно элемента Б, то считаем, что элемент Б «слегка менее важен» (1/3 на шкале) относительно элемента А.

Шкала относительной важности МАИ

Интенсивность относительной важности	Определение	Объяснения
1	Равная важность	Равный вклад двух видов деятельности в цель
3	Умеренное превосходство одного над другим	Опыт и суждения дают легкое превосходство одному виду деятельности над другим
5	Существенное или сильное превосходство	Опыт и суждения дают сильное превосходство одному виду деятельности над другим
7	Значительное превосходство	Одному виду деятельности дается настолько сильное превосходство, что оно становится практически значительным
9	Очень сильное превосходство	Очевидность превосходства одного вида деятельности над другим подтверждается наиболее сильно
2, 4, 6, 8	Промежуточные решения между двумя соседними суждениями	Применяются в компромиссном случае
Обратные величины приведенных выше чисел	Если при сравнении одного вида деятельности с другим получено одно из вышеуказанных чисел (например 3), то при сравнении второго вида деятельности с первым получим обратную величину (т е. 1/3)	

Сравнение весов можно представить следующим образом:

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & A_1 & A_2 & A_3 & \cdots & A_n \\
\hline
A_1 & \boxed{\dfrac{\omega_1}{\omega_1}} & \dfrac{\omega_1}{\omega_2} & \boxed{\dfrac{\omega_1}{\omega_3}} & \cdots & \dfrac{\omega_1}{\omega_n} \\
A_2 & \dfrac{\omega_2}{\omega_1} & \boxed{\dfrac{\omega_2}{\omega_2}} & \dfrac{\omega_2}{\omega_3} & \cdots & \dfrac{\omega_2}{\omega_n} \\
A_3 & \boxed{\dfrac{\omega_3}{\omega_1}} & \dfrac{\omega_3}{\omega_2} & \boxed{\dfrac{\omega_3}{\omega_3}} & \cdots & \dfrac{\omega_3}{\omega_n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
A_n & \dfrac{\omega_n}{\omega_1} & \dfrac{\omega_n}{\omega_2} & \dfrac{\omega_n}{\omega_3} & \cdots & \boxed{\dfrac{\omega_n}{\omega_n}}
\end{array}
$$

- Вернемся к менеджерам компании, покупающей бокс, и рассмотрим второй уровень иерархии. Клетки матрицы заполнены в соответствии с субъективными суждениями менеджеров на основании их предпочтений, восприятия ограничений, возможностей, с использованием шкалы от 1 до 9. Например, на вопрос: какова важность размеров бокса относительно качества подъездных путей по отношению к общей цели? Менеджеры пришли к соглашению, что размеры существенно важнее, и поэтому они внесли 5 в соответствующую клетку матрицы; 1/5 автоматически заносится в симметричную относительно диагонали клетку, что соответствует противоположному сравнению.

	Размеры бокса	Качество подъездных путей	Удобство располож ения	Год постройки бокса
Размеры бокса	1	5	3	7
Качество подъездных путей	1/5	1	1/3	5
Удобство расположения	1/3	3	1	6
Год постройки бокса	1/7	1/5	1/6	1
Наличие парковки перед боксом	1/6	1/3	1/3	3

Покупка бокса: матрица попарных сравнений для уровня 2 (заполненная)

	Размеры бокса	Качество подъездных путей	Удобство располож ения	Год постройки бокса	Наличие парковки перед боксом	Наличие современного оборудования	Общее состояние	Финансов ые условия
Размеры бокса	1	5	3	7	6	6	1/3	1/4
Качество подъездных путей	1/5	1	1/3	5	3	3	1/5	1/7
Удобство расположения	1/3	3	1	6	3	4	6	1/5
Год постройки бокса	1/7	1/5	1/6	1	1/3	1/4	1/7	1/8
Наличие парковки перед боксом	1/6	1/3	1/3	3	1	1/2	1/5	1/6
Наличие современного оборудования	1/6	1/3	1/4	4	2	1	1/5	1/6
Общее состояние	3	5	1/6	7	5	5	1	1/2
Финансовые условия	4	7	5	8	6	6	2	1

Аналогично парные сравнения делаем для элементов на нижнем уровне. Сравниваемые попарно элементы — это возможные варианты выбора бокса. Сравнивается, насколько более желателен тот или иной бокс для удовлетворения каждого критерия второго уровня.

Покупка бокса: матрица попарных сравнений для уровня 3 (заполненная)

Получаем восемь матриц суждений размерностью 3х3, поскольку имеется восемь критериев на втором уровне и три бокса, которые попарно сравниваются по каждому из критериев. Матрицы вновь содержат суждения менеджмента. Для того чтобы понять суждения, дадим краткое описание боксов.

Размеры бокса	А	Б	В	**Качество подъездных путей**	А	Б	В
А	1	6	8	А	1	7	1/5
Б	1/6	1	4	Б	1/7	1	1/8
В	1/8	1/4	1	В	5	8	1
Удобство расположения	А	Б	В	**Год постройки бокса**	А	Б	В
А	1	8	6	А	1	1	1
Б	1/8	1	1/4	Б	1	1	1
В	1/6	4	1	В	1	1	1
Наличие парковки перед боксом	А	Б	В	**Наличие современного оборудования**	А	Б	В
А	1	5	4	А	1	8	6
Б	1/5	1	1/3	Б	1/8	1	1/5
В	1/4	3	1	В	1/6	5	1
Общее состояние	А	Б	В	**Финансовые условия**	А	Б	В
А	1	1/2	1/2	А	1	1/7	1/5
Б	2	1	1	Б	7	1	3
В	2	1	1	В	5	1/3	1

1. *Бокс А.* Это — самый большой бокс, он удобно расположен, рядом транспортные развязки, налоги на бокс невелики. У бокса имеется паркинг больше, чем у боксов Б и В. Тем не менее общее состояние не очень хорошее, нужна основательная починка и проведение малярных работ. Из-за того что бокс финансируется банком с высокой процентной ставкой, финансовые условия можно считать неудовлетворительными.
2. *Бокс Б.* Этот бокс меньше бокса А, плохие подъездные пути и расположен неудобно. Бокс довольно маленький и в нем низкая обеспеченность оборудованием для сервиса техники. С другой стороны, общее состояние очень хорошее. Кроме того, на этот бокс можно получить низкую процентную ставку по кредиту - финансовые условия вполне удовлетворительны
3. *Бокс В.* Этот бокс самый маленький, и в нем нет отсутствует сервисное оборудование. Расположен крайне неудобно, но бокс в хорошем состоянии и представляется безопасным. Паркинг перед боксом больше, чем у бокса Б, однако несравненно меньше обширного пространства перед боксом А. Общее состояние бокса. Финансовые условия намного лучше, чем для бокса А, но не так хороши, как для бокса Б.

Синтез локальных приоритетов

Из группы матриц парных сравнений необходимо сформировать **набор *локальных* приоритетов**, которые выражают относительную ценность (желательность) каждого отдельного объекта. Для этого нужно вычислить множество *собственных векторов* для каждой матрицы, а затем нормализовать результат к единице, получая тем самым вектор приоритетов.

- Вычисление собственных векторов — можно сделать, перемножая элементы в каждой строке и извлекая корни *n*-й степени, где *n* — число элементов. Полученный таким образом столбец чисел нормализуется делением каждого числа на сумму всех чисел.
- *Попросту говоря, если задано десять видов десерта на выбор, то имеется возможность не только расположить их в порядке нашего предпочтения, но и разрешить вопрос о сравнительной интенсивности нашего желания попробовать каждый из них.*

1) Вычисление компонент собственного вектора приоритетов

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & A_1 & A_2 & A_3 & \cdots & A_n \\
\hline
A_1 & \dfrac{\omega_1}{\omega_1} & \dfrac{\omega_1}{\omega_2} & \dfrac{\omega_1}{\omega_3} & \cdots & \dfrac{\omega_1}{\omega_n} \\
A_2 & \dfrac{\omega_2}{\omega_1} & \dfrac{\omega_2}{\omega_2} & \dfrac{\omega_2}{\omega_3} & \cdots & \dfrac{\omega_2}{\omega_n} \\
A_3 & \dfrac{\omega_3}{\omega_1} & \dfrac{\omega_3}{\omega_2} & \dfrac{\omega_3}{\omega_3} & \cdots & \dfrac{\omega_3}{\omega_n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
A_n & \dfrac{\omega_n}{\omega_1} & \dfrac{\omega_n}{\omega_2} & \dfrac{\omega_n}{\omega_3} & \cdots & \dfrac{\omega_n}{\omega_n}
\end{array}
$$

компонента собственного вектора первой строки равна

$$\longrightarrow \quad \sqrt[n]{\frac{\omega_1}{\omega_1} \times \frac{\omega_1}{\omega_2} \times \frac{\omega_1}{\omega_3} \times \ldots \times \frac{\omega_1}{\omega_n}}$$

$$\longrightarrow \quad \sqrt[n]{\frac{\omega_3}{\omega_1} \times \frac{\omega_3}{\omega_2} \times \frac{\omega_3}{\omega_3} \times \ldots \times \frac{\omega_3}{\omega_n}}$$

компонента собственного вектора третьей строки равна

После того как компоненты собственного вектора получены для всех *n*-строк, становится возможным их использование для дальнейших вычислений

2) Оценки компонент собственного вектора по строкам

3) Нормализация результата для получения оценки вектора приоритетов

$$\sqrt[n]{\frac{\omega_1}{\omega_1}\times\frac{\omega_1}{\omega_2}\times\frac{\omega_1}{\omega_3}\times\ldots\times\frac{\omega_1}{\omega_n}} = a_1 \qquad = \frac{a_1}{} = x_1$$

$$\sqrt[n]{\frac{\omega_2}{\omega_1}\times\frac{\omega_2}{\omega_2}\times\frac{\omega_2}{\omega_3}\times\ldots\times\frac{\omega_2}{\omega_n}} = a_2 \qquad = \frac{a_2}{} = x_2$$

$$\sqrt[n]{\frac{\omega_3}{\omega_1}\times\frac{\omega_3}{\omega_2}\times\frac{\omega_3}{\omega_3}\times\ldots\times\frac{\omega_3}{\omega_n}} = a_3 \qquad = \frac{a_3}{\text{сумма}} = x_3$$

$$\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$

$$\sqrt[n]{\frac{\omega_n}{\omega_1}\times\frac{\omega_n}{\omega_2}\times\frac{\omega_n}{\omega_3}\times\ldots\times\frac{\omega_n}{\omega_n}} = a_n \qquad = \frac{a_n}{} = x_n$$

$$\text{сумма}\ \overline{}$$

сумма сумма сумма

- Умножение матрицы на вектор приоритетов производится следующим образом: умножаем первый элемент строки на первый элемент столбца **x**; второй элемент в строке на второй элемент столбца **x**, и т.д. Затем суммируем эти величины и получаем одно число для этой строки:

$$\begin{bmatrix} \frac{\omega_1}{\omega_1} & \frac{\omega_1}{\omega_2} & \frac{\omega_1}{\omega_3} & \dots & \frac{\omega_1}{\omega_n} \\ \frac{\omega_2}{\omega_1} & \frac{\omega_2}{\omega_2} & \frac{\omega_2}{\omega_3} & \dots & \frac{\omega_2}{\omega_n} \\ \frac{\omega_3}{\omega_1} & \frac{\omega_3}{\omega_2} & \frac{\omega_3}{\omega_3} & \dots & \frac{\omega_3}{\omega_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\omega_n}{\omega_1} & \frac{\omega_n}{\omega_2} & \frac{\omega_n}{\omega_3} & \dots & \frac{\omega_n}{\omega_n} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{matrix} \frac{\omega_1}{\omega_1} \cdot x_1 + \frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot x_2 + \frac{\omega_1}{\omega_3} \cdot x_3 + \dots + \frac{\omega_1}{\omega_n} \cdot x_n = Y_1 \\ \frac{\omega_2}{\omega_1} \cdot x_1 + \frac{\omega_2}{\omega_2} \cdot x_2 + \frac{\omega_2}{\omega_3} \cdot x_3 + \dots + \frac{\omega_2}{\omega_n} \cdot x_n = Y_2 \\ \frac{\omega_3}{\omega_1} \cdot x_1 + \frac{\omega_3}{\omega_2} \cdot x_2 + \frac{\omega_3}{\omega_3} \cdot x_3 + \dots + \frac{\omega_3}{\omega_n} \cdot x_n = Y_3 \\ \dots \; \dots \; \dots \; \dots \; \dots \; \dots \; \dots \; \dots \; \dots \\ \frac{\omega_n}{\omega_1} \cdot x_1 + \frac{\omega_n}{\omega_2} \cdot x_2 + \frac{\omega_n}{\omega_3} \cdot x_3 + \dots + \frac{\omega_n}{\omega_n} \cdot x_n = Y_n \end{matrix}$$

Для иллюстрации этих идей на конкретной задаче вернемся к автопредприятию, покупающему бокс. На рисунке представлена матрица попарных сравнений для второго уровня иерархии, которая содержит восемь критериев, воспринимаемых как воздействующие на общую цель— «БОКС». Вычислим вектор приоритетов.

КОРЕНЬ =СТЕПЕНЬ(D5*E5*F5*G5*H5*I5*J5*K5;1/8)

СТЕПЕНЬ(**число**; степень)

Удобство расположения	Год постройки бокса	Наличие парковки перед боксом	Наличие современного оборудования	Общее состояние	Финансовые условия	Компоненты собственного вектора приоритетов	Вектор приоритетов
3,00	7,00	6,00	6,00	0,33	0,25	2,053	0,175
0,33	5	3	3	0,20	0,14	=СТЕПЕНЬ(D5	0,063
1,00	6	3	4	6	0,20	1,746	0,149
0,17	1,00	0,33	0,25	0,14	0,13	0,227	0,019
0,33	3	1,00	0,50	0,20	0,17	0,418	0,036
0,25	4	2	1,00	0,20	0,17	0,497	0,042
0,17	7	5	5	1,00	0,50	1,961	0,167
5	8	6	6	2	1,00	4,105	0,350
					Сумма	11,742	

На рисунке вводятся парные сравнения для третьего уровня иерархии, иллюстрирующие сравнительную желательность боксов А, Б и В по отношению к критериям второго уровня. Видно, что бокс Б — лучший по критерию финансирования, а бокс А воспринимается как лучший относительно размеров.

=СТЕПЕНЬ(Y59*Z59*AA59;1/3)

СТЕПЕНЬ(число; **степень**)

	Y	Z	AA	AB	AC
Размеры бокса	А	Б	В	Компоненты собственного вектора приоритетов	Вектор приоритетов
А	1	6	8	=СТЕПЕНЬ(Y5	**0,754**
Б	0,17	1	4	0,874	0,181
В	0,13	0,25	1	0,315	0,065
		сумма		4,82	
Удобство расположения	А	Б	В	Компоненты собственного вектора приоритетов	Вектор приоритетов
А	1	8	6	3,634	0,166

=СТЕПЕНЬ(AE75*AF75*AG75;1/3)

СТЕПЕНЬ(**число**; степень)

		AF	AG	AH	AI
А	1	8	6	3,634	0,747
Б	0,13	1	0,20	0,292	0,060
В	0,17	5	1	0,941	0,193
				4,87	
Финансовые условия	А	Б	В	Компоненты собственного вектора приоритетов	Вектор приоритетов
А	1	0,14	0,20	0,306	0,072
Б	7	1	3	=СТЕПЕНЬ(А	**0,649**
В	5	0,33	1	1,186	0,279
		сумма		4,25	

Размеры бокса	А	Б	В	Компоненты собственного вектора приоритетов	Вектор приоритетов
А	1	6	8	3,634	**0,754**
Б	0,17	1	4	0,874	0,181
В	0,13	0,25	1	0,315	0,065
	сумма			4,82	

Качество подъездных путей	А	Б	В	Компоненты собственного вектора приоритетов	Вектор приоритетов
А	1	7	0,20	1,119	0,233
Б	0,14	1	0,13	0,261	0,054
В	5	8	1	3,420	0,712
	сумма			4,80	

Удобство расположения	А	Б	В	Компоненты собственного вектора приоритетов	Вектор приоритетов
А	1	8	6	3,634	0,166
Б	0,13	1	1/4	17,443	0,795
В	0,17	4	1	0,874	0,040
	сумма			21,95	

Год постройки бокса	А	Б	В	Компоненты собственного вектора приоритетов	Вектор приоритетов
А	1	1	1	1,000	0,333
Б	1	1	1	1,000	0,333
В	1	1	1	1,000	0,333
	сумма			3,00	

Наличие парковки перед боксом	А	Б	В	Компоненты собственного вектора приоритетов	Вектор приоритетов
А	1	5	4	2,714	0,674
Б	0,20	1	0,33	0,405	0,101
В	0,25	3	1	0,909	0,226
	сумма			4,03	

Наличие современного оборудования	А	Б	В	Компоненты собственного вектора приоритетов	Вектор приоритетов
А	1	8	6	3,634	0,747
Б	0,13	1	0,20	0,292	0,060
В	0,17	5	1	0,941	0,193
				4,87	

Общее состояние	А	Б	В	Компоненты собственного вектора приоритетов	Вектор приоритетов
А	1	0,50	0,50	0,630	0,200
Б	2	1	1	1,260	0,400
В	2	1	1	1,260	0,400
	сумма			3,15	

Финансовые условия	А	Б	В	Компоненты собственного вектора приоритетов	Вектор приоритетов
А	1	0,14	0,20	0,306	0,072
Б	7	1	3	2,759	**0,649**
В	5	0,33	1	1,186	0,279
	сумма			4,25	

Проверка согласованности локальных приоритетов

Используя метод МАИ к примеру при взвешивании предметов можно оценить, что А тяжелее, чем Б, Б тяжелее, чем В, однако В тяжелее, чем А. В частности, это может случиться, когда веса предметов А, Б и В близки, а прибор недостаточно точен, чтобы их различить. *Отсутствие согласованности* может быть серьезным **ограничивающим фактором**.

Для оценки согласованности используют **индекс согласованности** (ИС), который дает информацию о степени нарушения согласованности оценок.

Алгоритм расчета индекса согласованности в каждой матрице и для всей иерархии:

1. Сначала суммируется каждый столбец суждений,
2. Сумма первого столбца умножается на величину первой компоненты нормализованного вектора приоритетов, сумма второго столбца — на вторую компоненту и т.д.
3. Полученные числа суммируются. Таким образом получаем величину, обозначаемую $\boldsymbol{\lambda}_{max}$.

Алгоритм расчета индекса согласованности в каждой матрице и для всей иерархии:

4. Индекс согласованности вычисляется по формуле

$$\text{ИС} = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1}$$

где *n* — число сравниваемых элементов.

Размер матрицы	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Случайная согласованность	0	0	0,58	0,9	1,12	1,24	1,32	1,41	1,45	1,49

Если разделить ИС на число, соответствующее случайной согласованности матрицы того же порядка, получим отношение согласованности (ОС). Величина ОС должна быть порядка 10 % или менее, чтобы быть приемлемой. Если ОС выходит из этих пределов, то участникам нужно исследовать задачу и проверить свои суждения.

Определение отношения согласованности

в матрице уровня 2

=D12*M4+E12*M5+F12*M6+G12*M7+H12*M8+I12*M9+J12*M10+K12*M11

C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
	Размеры бокса	Качество подъездных путей	Удобство расположе ния	Год постройки бокса	Наличие парковки перед боксом	Наличие современного оборудования	Общее состояние	Финансов ые условия	Компоненты собственного вектора приоритетов	Вектор приорите тов
Размеры бокса	1,00	5,00	3,00	7,00	6,00	6,00	0,33	0,25	2,053	0,175
Качество подъездных путей	0,20	1,00	0,33	5,00	3,00	3,00	0,20	0,14	0,736	0,063
Удобство расположения	0,33	3,00	1,00	6,00	3,00	4,00	6,00	0,20	1,746	0,149
Год постройки бокса	0,14	0,20	0,17	1,00	0,33	0,25	0,14	0,13	0,227	0,019
Наличие парковки перед боксом	0,17	0,33	0,33	3	1,00	0,50	0,20	0,17	0,418	0,036
Наличие современного оборудования	0,17	0,33	0,25	4	2	1,00	0,20	0,17	0,497	0,042
Общее состояние	3,00	5,00	0,17	7,00	5,00	5,00	1,00	0,50	1,961	0,167
Финансовые условия	4,00	7,00	5,00	8,00	6,00	6,00	2,00	1,00	4,105	0,350
	9,01	21,87	10,25	34,00	24,33	25,75	10,08	2,55		

Сумма	11,74
ЛЯМБДА max	2*M9+J12
ИС	0,237
ОС	0,168

Определение отношения согласованности в матрице уровня 3

Размеры бокса	А	Б	В	Компоненты собственного вектора приоритетов	Вектор приоритетов
А	1,00	6,00	8,00	3,634	**0,754**
Б	0,17	1,00	4,00	0,874	0,181
В	0,13	0,25	1,00	0,315	0,065
сумма	1,29	7,25	13,00	4,82	
ЛЯМБДА max					3,14
ИС					0,068
ОС					0,117

Качество подъездных путей	А	Б	В	Компоненты собственного вектора приоритетов	Вектор приоритетов
А	1,00	7,00	0,20	1,119	0,233
Б	0,14	1,00	0,13	0,261	0,054
В	5,00	8,00	1,00	3,420	0,712
сумма	6,14	16,00	1,33	4,80	
ЛЯМБДА max					3,25
ИС					0,123
ОС					0,213

Удобство расположения	А	Б	В	Компоненты собственного вектора приоритетов	Вектор приоритетов
А	1,00	8,00	6,00	3,634	0,754
Б	0,13	1,00	0,25	0,315	0,065
В	0,17	4,00	1,00	0,874	0,181
сумма	1,29	13,00	7,25	4,82	
ЛЯМБДА max					3,14
ИС					0,068
ОС					0,117

Год постройки бокса	А	Б	В	Компоненты собственного вектора приоритетов	Вектор приоритетов
А	1,00	1,00	1,00	1,000	0,333
Б	1,00	1,00	1,00	1,000	0,333
В	1,00	1,00	1,00	1,000	0,333
сумма	3,00	3,00	3,00	3,00	
ЛЯМБДА max					3,00
ИС					0,000
ОС					0,000

Наличие парковки перед боксом	А	Б	В	Компоненты собственного вектора приоритетов	Вектор приоритетов
А	1,00	5,00	4,00	2,714	0,674
Б	0,20	1,00	0,33	0,405	0,101
В	0,25	3,00	1,00	0,909	0,226
сумма	1,45	9,00	5,33	4,03	
ЛЯМБДА max					3,09
ИС					0,043
ОС					0,074

Наличие современного оборудования	А	Б	В	Компоненты собственного вектора приоритетов	Вектор приоритетов
А	1,00	8,00	6,00	3,634	0,747
Б	0,13	1,00	0,20	0,292	0,060
В	0,17	5,00	1,00	0,941	0,193
сумма	1,29	14,00	7,20	4,87	
ЛЯМБДА max					3,20
ИС					0,099
ОС					0,170

Общее состояние	А	Б	В	Компоненты собственного вектора приоритетов	Вектор приоритетов
А	1,00	0,50	0,50	0,630	0,200
Б	2,00	1,00	1,00	1,260	0,400
В	2,00	1,00	1,00	1,260	0,400
сумма	5,00	2,50	2,50	3,15	
ЛЯМБДА max					3,00
ИС					0,000
ОС					0,000

Финансовые условия	А	Б	В	Компоненты собственного вектора приоритетов	Вектор приоритетов
А	1,00	0,14	0,20	0,306	0,072
Б	7,00	1,00	3,00	2,759	**0,649**
В	5,00	0,33	1,00	1,186	0,279
сумма	13,00	1,48	4,20	4,25	
ЛЯМБДА max					3,06
ИС					0,032
ОС					0,056

- Заключительным этапов МАИ является применение принципа синтеза. Для, выявления составных, или глобальных, приоритетов боксов локальные приоритеты располагаются по отношению к каждому критерию - каждый столбец векторов умножается на приоритет соответствующего критерия и результат складывается вдоль каждой строки. Например, для бокса А имеем:

$$(0,175\times0,754)+(0,063\times0,233)+(0,149\times0,754)+\ldots$$
$$+(0,35\times0,072)=0,379$$

	Размеры бокса	Качество подъезд ных путей	Удобств о располо жения	Год постройк и бокса	Наличие парковк и перед боксом	Наличие совреме нного оборудо вания	Общее состояни е	Финансо вые условия	Глобальные приоритеты
	0,175	**0,063**	**0,149**	**0,019**	**0,036**	**0,042**	**0,167**	**0,350**	
А	0,754	0,233	0,754	0,333	0,674	0,747	0,200	0,072	**0,379**
Б	0,181	0,054	0,065	0,333	0,101	0,060	0,400	0,649	0,351
В	0,065	0,712	0,181	0,333	0,226	0,193	0,400	0,279	0,270

РАЗДЕЛ 3.
Применение методики линейного программирования к решению управленческих задач на транспорте

1. ВВЕДЕНИЕ

Существует множество форм деятельности предприятий, которые связаны с распределением ресурсов. Эти ресурсы включают труд, сырье, оборудование и денежные средства. Процесс распределения ресурсов называют **программированием.** Размеры ресурсов ограничены, поэтому при программировании возникают проблемы. Если транспортное предприятие осуществляет различные рейсы с использованием одного автопарка и трудовых ресурсов, то ее администрация должна решить, какие рейсы и в каком количестве совершать. Обычно решение администрации направлено на организацию перевозок таким образом, чтобы максимизировать выручку, максимизировать время использования автопарка или минимизировать затраты труда. Переменные решения — это количество рейсов каждого маршрута, которое необходимо произвести за данный период времени.

- Аналогично, если компания обладает определенным капиталом для инвестирования ряда проектов, распределение денежных сумм по каждому проекту будет подчинено некоторой цели. Она может заключаться в минимизации риска или максимизации темпов роста капитала. Переменные решения в данном случае - это денежные суммы, помещаемые в каждый проект.
- В общем случае цель состоит в определении наиболее эффективного метода такого распределения ресурсов по соответствующим переменным, которое оптимизирует некоторый результат функционирования системы. Очень часто полезным инструментом в процессе распределения ресурсов являются методы моделирования. **Математическим программированием** называется использование математических моделей и методов для решения проблем программирования. Существует ряд различных методов, основанных на идеях математического программирования, мы рассмотрим **линейное программирование**

Линейное программирование можно использовать, если цель и ограничения на ресурсы можно выразить количественно в форме линейных уравнений. <u>Последовательность метода:</u>

1. Математическая формализация задачи. Это означает, что нужно идентифицировать управляемые переменные и цель задачи. Затем с помощью этих переменных цель и ограничения на ресурсы описываются в форме линейных уравнений
2. Рассматриваются все допустимые сочетания переменных. Из них выбирается то, которое оптимизирует целевую функцию задачи. Если исследуемая задача содержит только две переменные, ее можно решить графически. В случае исследования задачи со многими переменными необходимо использовать специальные программы.
3. Когда оптимальное решение получено, производится его оценка. Она включает в себя анализ задачи на чувствительность.

2. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ НА ТРАНСПОРТЕ

Процедура является общей для формулирования всех задач линейного программирования:

1. Определение переменных задачи, значения которых нужно получить в пределах существующих ограничений.

2. Определение цели и ограничений на ресурсы.

3. Описание цели через переменные задачи.

4. Описание ограничений через переменные задачи.

ПРИМЕР 1.

- Водитель-экспедитор осуществляет перевозки двух видов товаров: «Рыбные товары и мясо» и «Молочные товары». По санитарным нормам продукция должна перевозиться отдельно (то есть водитель ведет машину, загруженную либо рыбой, либо молоком).
- Работа экспедитора будет выражаться в количестве «сделанных» тонно-километров (т·км, 1 тонна-километр – перевозка 1 тонны груза на расстояние в 1 км).
- Товары имеют различную плотность поэтому **затраты на перевозку** будут различными: затраты на 1 т·км перевозки товарной группы **«Рыба» - 0,02 ч**; затраты на 1 т·км перевозки товара **«Молоко» - 0,04 ч**

ПРИМЕР 1.

- Товары доставляются в различные магазины, поэтому пробег автомобиля, а следовательно и расход топлива будет отличатся при перевозке различных товарных груп: **расход топлива** на 1 т·км при перевозке **«Рыбы» 0,1 л; расход топлива** на 1 т·км при перевозке **«Молоко» 0,4 л.**
- Суточный **лимит топлива**, оплачиваемый компанией экспедитору компании составляет **160 л**.
- Возможный **график работы** – **24 часа** в сутки.
- Оплата водителя составляет **0,10 $ за 1 т·км на развозе «Рыбы» и 0,30 $ за 1 т·км на развозе «Молока».** Сколько и каких рейсов следует производить ежедневно, если цель водителя состоит *в* максимизации ежедневного дохода?

Решение

1. ***Шаг.*** Определение переменных. В рамках заданных ограничений экспедитор должен принять решение о том, какое количество рейсов каждого вида следует совершить. Пусть **p** – число т·км по доставке «Рыбы» в сутки. Пусть **m** — число т·км по доставке «Молока» в сутки.
2. ***Шаг.*** Определение цели и ограничений. Цель состоит в максимизации суточного дохода водителя. Пусть **P** — общий ежедневный доход, $. Он максимизируется в рамках ограничений на количество часов автомобиля (водителя) и лимита топлива.

3. ***Шаг.*** Выразим цель через переменные:

$$\boxed{P = 0{,}1 \cdot p + 0{,}30 \cdot m \quad (\$)}$$

- Это целевая функция — соотношение, которое подлежит оптимизации.

4. ***Шаг.*** Выразим ограничения через переменные. Существуют следующие ограничения на процесс перевозки:

   1. **<u>Время работы</u>**. Для осуществления **p** т·км на рейсах по «Рыбе» и **m** т·км на рейсах по «Молоку» требуется: (0,02*p + 0,04*m) часов работы машины ежедневно. Максимальное время работы машины в сутки составляет 24 ч, следовательно, объем перевозок должен быть таким, чтобы число затраченных часов работы автомашины было меньше либо равно 24 ч ежесуточно:

$$\boxed{0{,}02 \cdot p + 0{,}04 \cdot m \le 24 \quad (\text{ч/сутки})}$$

2. **<u>Топливо.</u>** Осуществление **p** т·км на рейсах по «Рыбе» и **m** т·км на рейсах по «Молоку» требует (0,1*p+0,4*m) л топлива ежедневно. Максимальный расход оплачиваемый водителю составляет 160 л в день, следовательно, объем перевозок должен быть таким, чтобы требуемое количество топлива не превышало 160 л в сутки. Таким образом:

$$\boxed{0,1\cdot p + 0,4\cdot m \le 160 \ (\text{л/сутки})}$$

1. **<u>Условие неотрицательности.</u>** Разумно предположить что водитель н может осуществлять рейсы в отрицательных количествах. Следовательно:

$$\boxed{p \ge 0, \quad m \ge 0}$$

Окончательная формулировка задачи линейного программирования имеет следующий вид.

$$\boxed{P = 0,1 \cdot p + 0,30 \cdot m \to \max \qquad (\$)}$$

при ограничениях:

На время работы автомобиля

$$\boxed{0,02 \cdot p + 0,04 \cdot m \le 24 \qquad (\text{ч/сутки})}$$

На топливо:

$$\boxed{0,1 \cdot p + 0,4 \cdot m \le 160 \quad (\text{л/сутки})}$$

Неотрицательность

$$\boxed{p \ge 0, \quad m \ge 0}$$

ПРИМЕР 2.

Автопредприятие осуществляет автобусное сообщение по 2-м маршрутам (условно назовем их **X** и **Y**). Фонд рабочего времени предприятия 4000 чел.-ч в месяц.

- Один рейс маршрута X требует 1 чел.-ч работы водителей
- Один рейс маршрута Y требует 2 чел.-ч работы водителя

Автобусный парк предприятия позволяет осуществлять в месяц:

- 2250 рейсов маршрута X
- 1750 рейсов маршрута Y

ПРИМЕР 2.

Автобусный парк на маршрутах представлен автобусами разных типов, некоторые из них переведены на газ, другие работают на бензине. В среднем расходы по маршрутам:

- 1 рейс маршрута X требует 2 л газа и 5 л бензина
- 1 рейс маршрута Y требует 5 л газа и 2 л бензина
- Месячный лимит топлива автоперевозчика составляет по 10 т (10 000 л) каждого вида горючего.

ПРИМЕР 2.

Дополнительные условия:

- У автопредприятия договор с Администрацией о выполнении минимум 600 рейсов по маршруту X (социальная нагрузка).
- У автопредприятия договор с профсоюзом водителей о том что общее количество рейсов в месяц будет не меньше 1500.

<u>Доход от рейсов:</u>

- 1 рейс по маршруту **X** приносит доход в **30 $**
- 1 рейс по маршруту **Y** приносит доход в **40 $**

<u>ЗАДАЧА:</u> Сколько и каких рейсов необходимо сделать автоперевозчику чтобы максимизировать общий месячный доход.

Решение

Сначала необходимо сформулировать задачу линейного программирования.

1. ***Шаг.*** Идентификация переменных. Необходимо произвести x рейсов типа X и y рейсов типа Y в неделю.
2. ***Шаг.*** Какова цель задачи? Каковы ограничения на процесс перевозок? Цель состоит в максимизации общего дохода за месяц. Процесс перевозок ограничивается уровнем:
    1. фонда рабочего времени - максимально возможный **фонд рабочего времени** составляет **4000 чел -ч.** в мес.
    2. производственной мощности — для каждого рейса существует отдельное ограничение по количеству. Автопарк позволяет выполнять не более **2250 рейсов типа X и 1750 типа Y** в месяц.
    3. Лимит **газа** составляет **10 000 л** в месяц.
    4. Лимит **бензина** равен **10 000 л** месяц.

Кроме того, существуют ограничения на минимальный объем рейсов каждого вида:

5. Социальный заказ - число произведенных рейсов по маршруту **X** должно быть достаточным для выполнения договоренности с Администрацией (минимум 600 рейсов в месяц по маршруту X).
6. Профсоюзное соглашение - общее число рейсов (**x + y**) не должно быть ниже объема, предусмотренного соглашением.

3. ***Шаг.*** Целевая функция. Пусть **P** - общий доход за месяц, $, где

$$\boxed{P = 30 \cdot x + 40 \cdot y \to \max \qquad (\$)}$$

4. ***Шаг.*** Ограничения на перевозочный процесс.

$$\boxed{P = 30\cdot x + 40\cdot y \to \max \qquad (\$)}$$

Ограничения по фонду рабочего времени: $1\cdot x + 2\cdot y \le 4000$ (чел.-ч.)

Ограничения по перевозочным возможностям:

$x \le 3250$ (рейсов)

$y \le 1750$ (рейсов)

Ограничения по газу: $2\cdot x + 5\cdot y \le 10000$ (л)

Ограничения по бензину: $5\cdot x + 2\cdot y \le 10000$ (л)

Требования по социальным рейсам: $x \ge 600$ (рейсов)

Требования профсоюза: $x + y \ge 1500$ (рейсов)

Условия неотрицательности: $x, y \ge 0$

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Решение задачи будем рассматривать на примере водителя-экспедитора (**пример 1).** Ограничения задачи можно изобразить графически. Время работы автомобиля:

$$\boxed{0,02 \cdot p + 0,04 \cdot m \le 24 \quad (\text{ч/сутки})}$$

Проведем прямую

0,02 p + 0,04 m = 24.

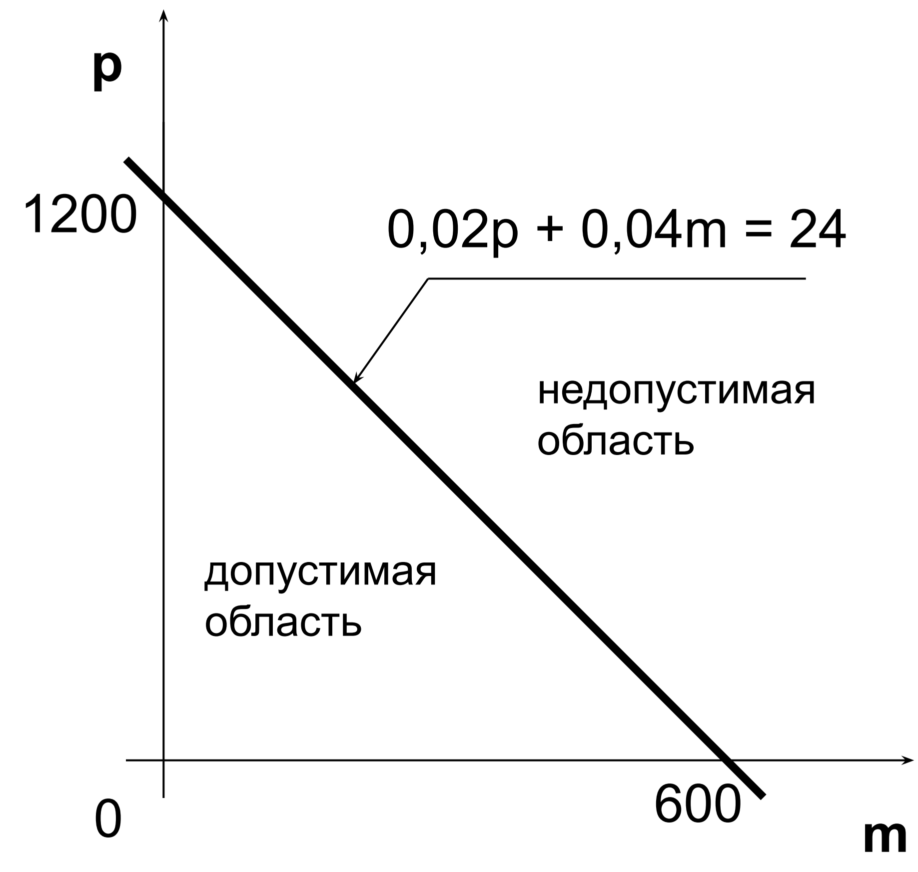
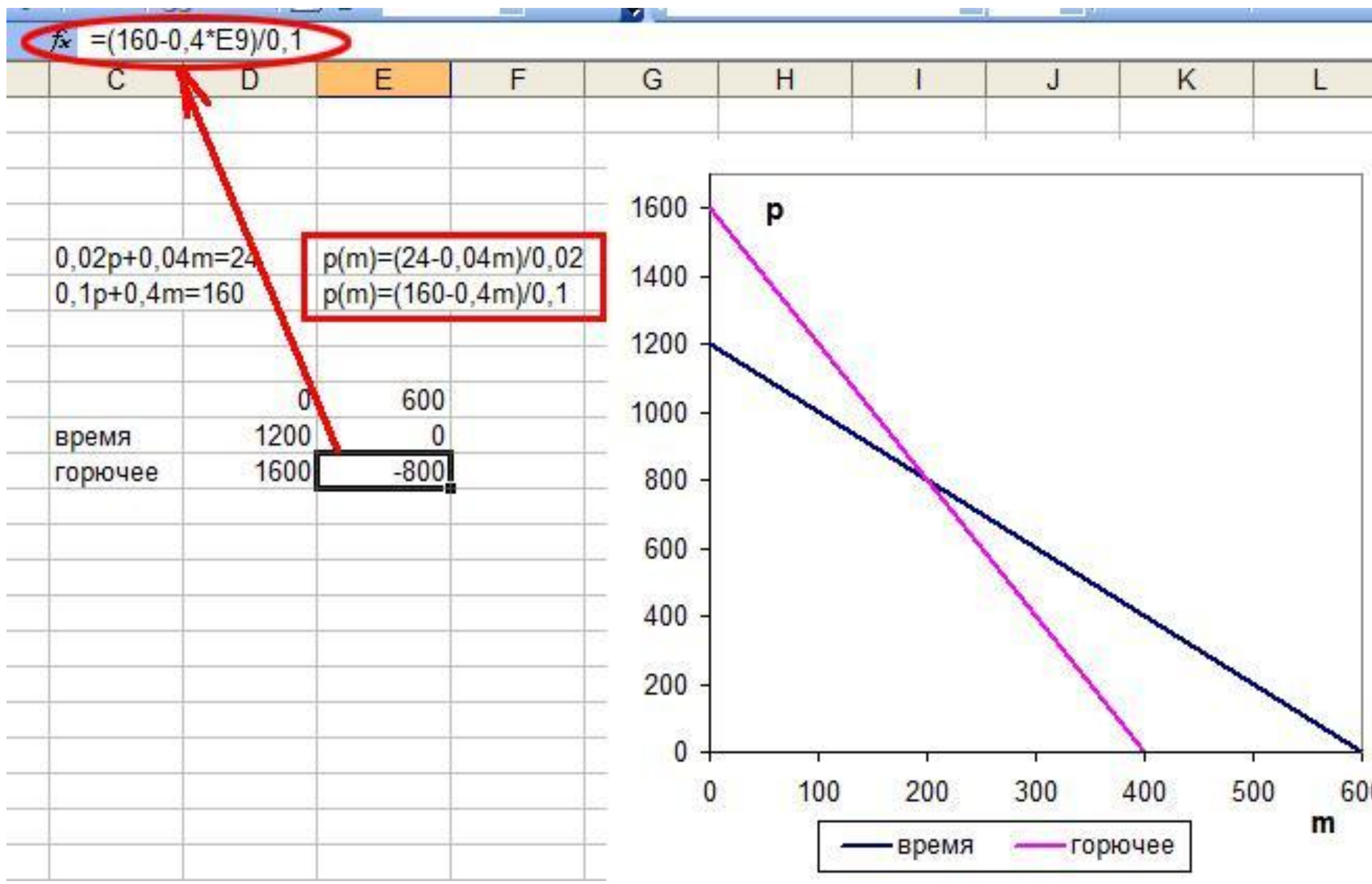


Рис.1. Графическое изображение неравенства

$$0,02 \cdot p + 0,04 \cdot m \le 24$$

Простейшим способом нанесения прямой на график является нахождение точек пересечения данной прямой с осями координат. Подставив p=0 в уравнение и рассчитав значение m, получим, что при p=0 m = 600. Подставив m=0 в уравнение и рассчитав значение p, получим, что при m=0 p=1200. Нанесем эти две точки на график и соединим их прямой.

Однако, если вы будете делать графики в Excel удобнее будет выразить независимую переменную через зависимую. Это целесообразно при построении двух и более прямых на одном графике



Ограничение на топливо:

$$\boxed{0,1\cdot p+0,4\cdot m\le 160\ (\text{л/сутки})}$$

Проведем прямую: 0,01 p + 0,04 m = 16.

Как и в предыдущем ограничении, начало координат принадлежит допустимой области, поэтому следует заштриховать область, лежащую выше прямой.

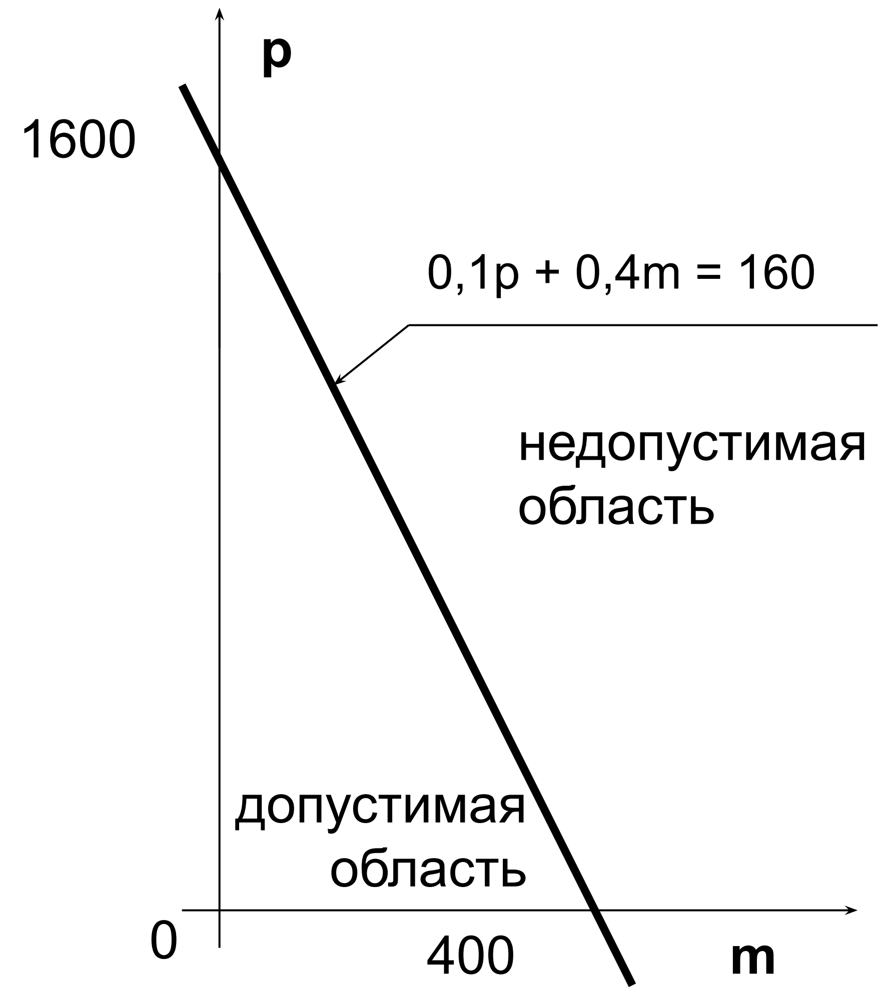


Рис.2. Графическое изображение неравенства

$$0,1\cdot p+0,4\cdot m\le 160$$

Условие неотрицательности

$$\boxed{p \geq 0, \quad m \geq 0}$$

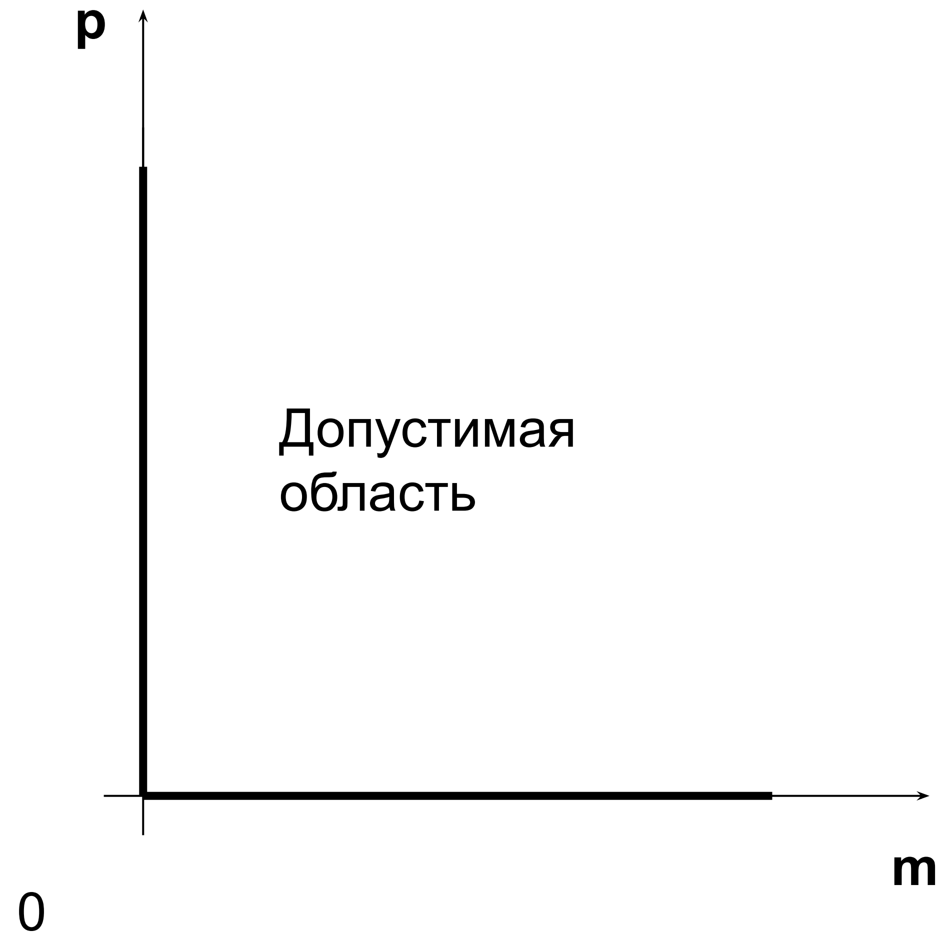


Рис.3. Графическое изображение условия неотрицательности переменных

$$p \geq 0, \quad m \geq 0$$

- Нанеся все ограничения задачи на один график, получим:

Область, оставшаяся незаштрихованной для всех ограничений, - это допустимое множество, которое содержит все возможные сочетания объемов перевозок, удовлетворяющие данным ограничениям. Координаты любой точки, принадлежащей допустимому множеству, являются возможным сочетанием двух видов перевозок

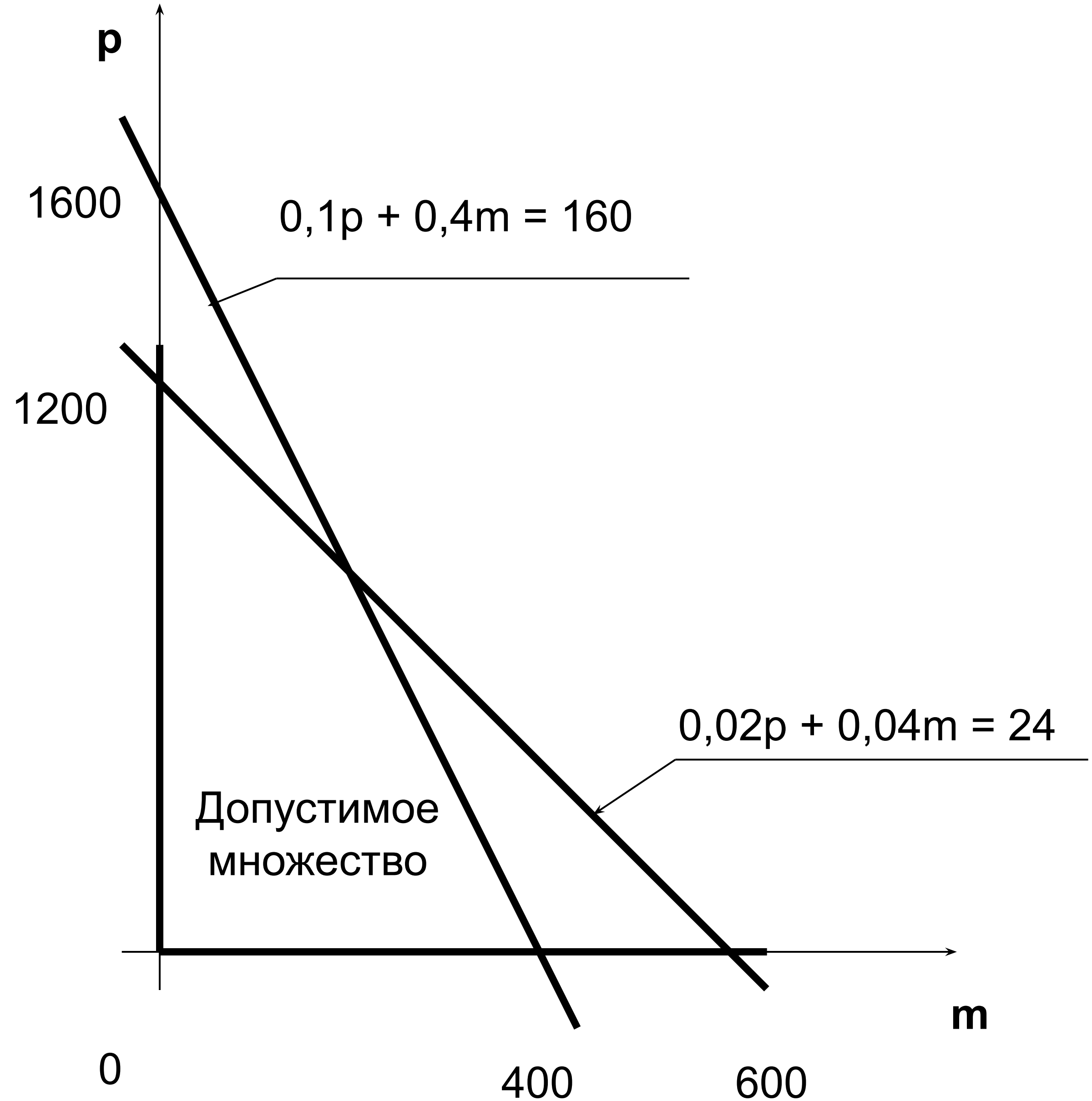


Рис. 3. Графическое изображение ограничений примера 1

- Рассмотрим алгоритм выбора объема перевозок, максимизирующего ежедневный общий доход водителя. Целевая функция задачи имеет следующий вид:

$$P = 0{,}1 \cdot p + 0{,}30 \cdot m \quad (\$)$$

$$0{,}1 \cdot p + 0{,}30 \cdot m = 100$$

$$p = 0 \quad m = {}^{100}\!/_{0,3} = 300$$

$$m = 0 \; p = {}^{100}\!/_{0,1} = 1000$$

- Если задать P = 100 $ в сутки, целевую функцию можно проиллюстрировать графически. Если затем придать P другое значение, то новая прямая будет параллельна прямой, соответствующей значению P = 100 $ в сутки (рис. 4.)

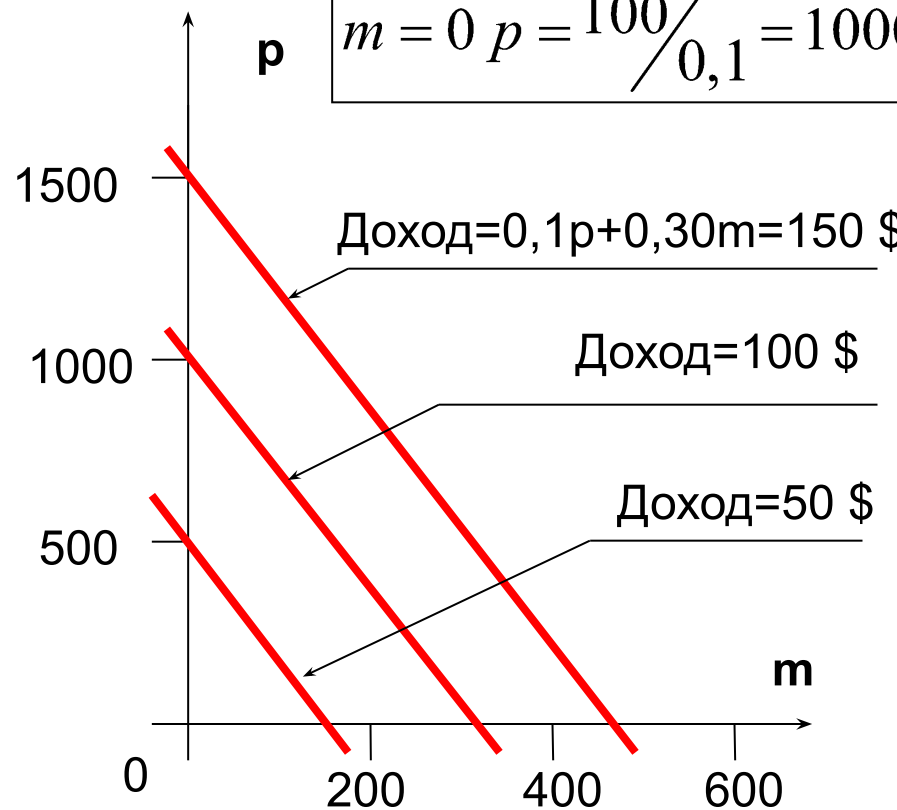


Рис. 4. Целевая функция

Очевидно, что последним допустимым решением является точка А. Координаты этой точки соответствуют оптимальному сочетанию объемов перевозок двух товаров. Приближенные значения координат точки А можно найти непосредственно и графика, а точные их значения можно получить, решив систему из двух уравнений, описывающих те ограничения, на пересечении которых находится точка А.

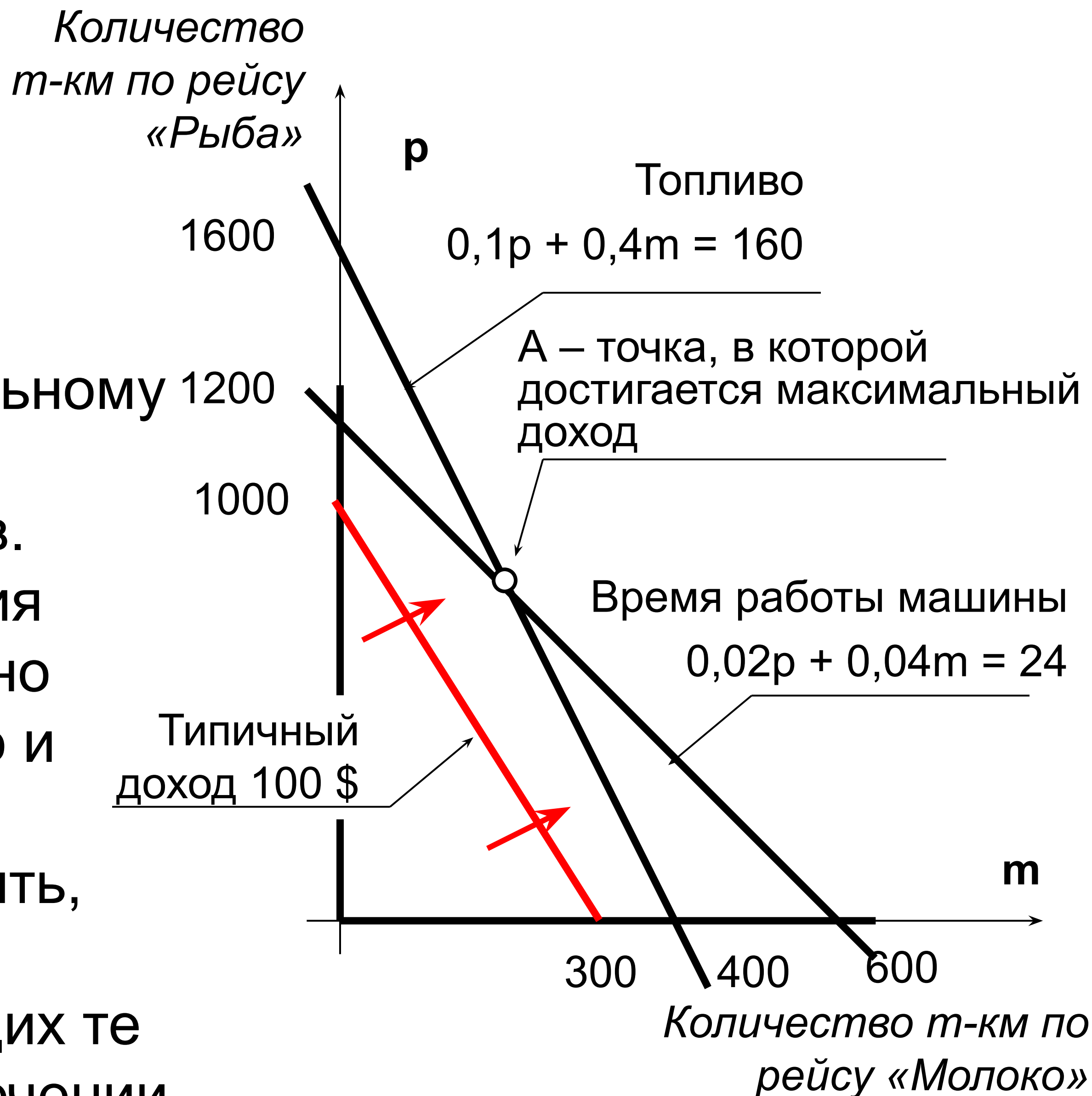


Рис. 5. Задача линейного программирования для водителя из примера 1

Если построить на графике линию уровня задачи линейного программирования так, как показано на рис. 5, можно двигаться параллельно этой линии вдоль допустимого множества в направлении увеличения дохода до тех пор, пока не будет достигнуто последнее допустимое решение (или решения), т.е. до тех пор, пока все точки линии уровня не окажутся за пределами допустимого множества.

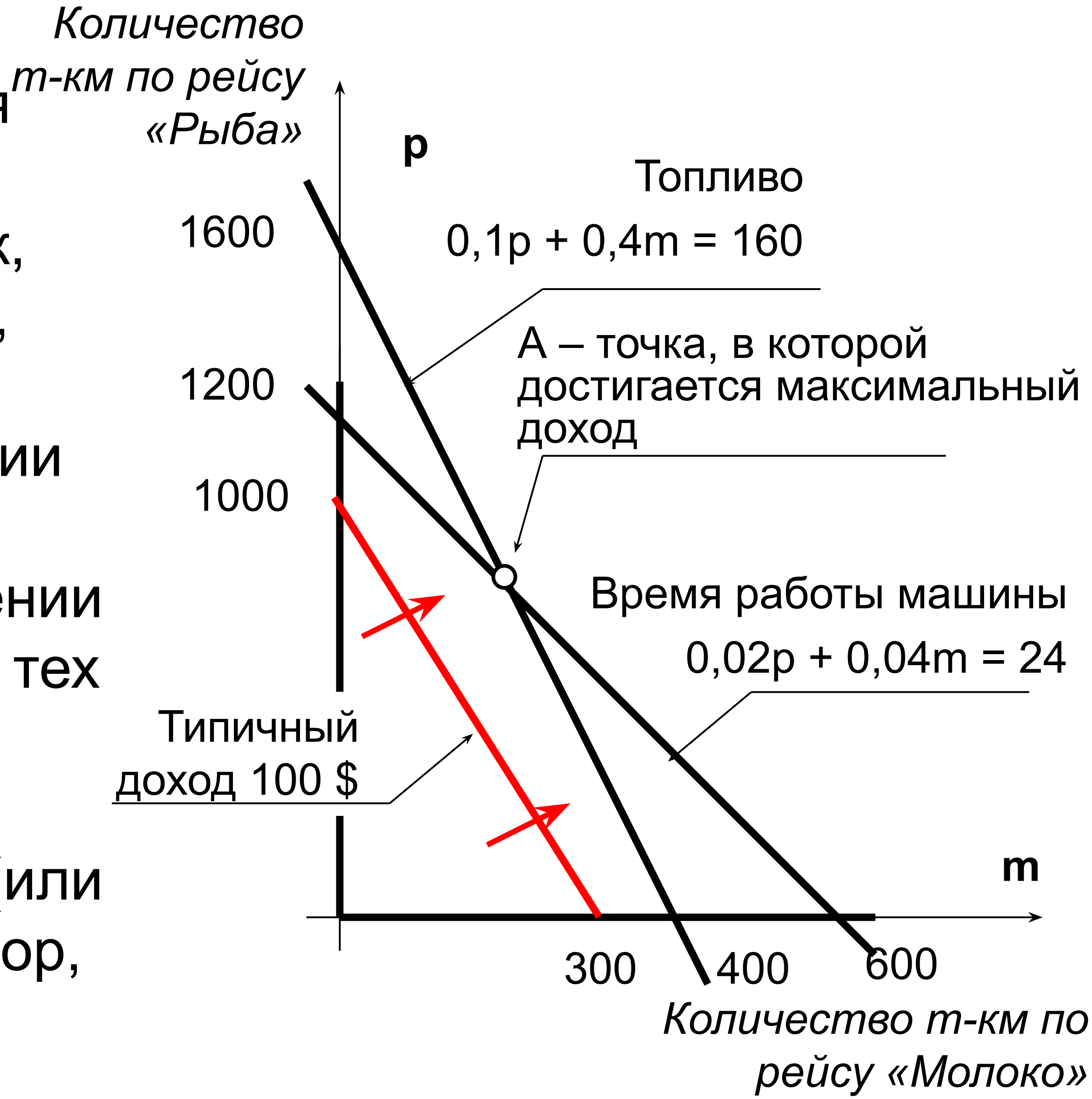
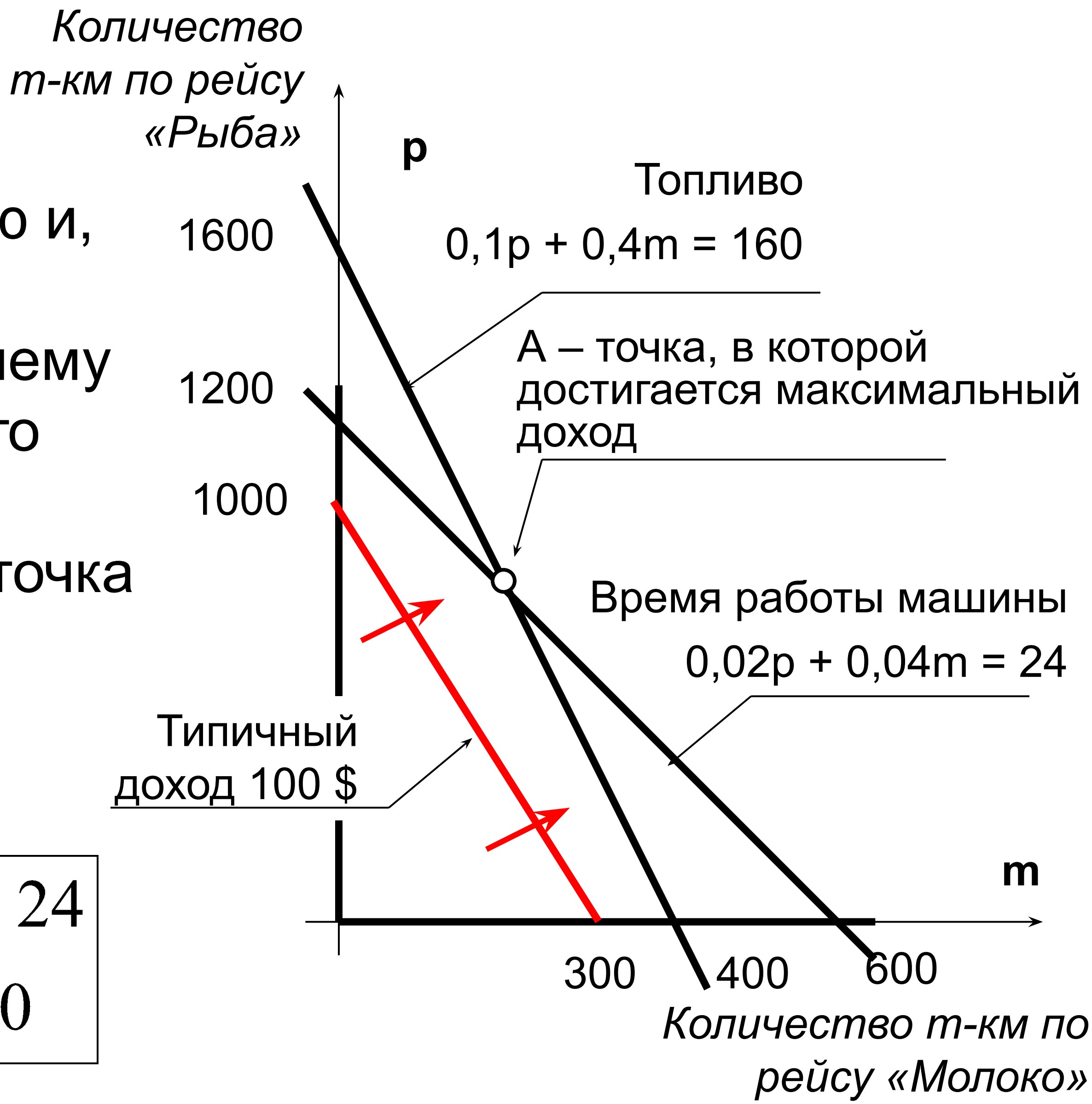


Рис. 5. Задача линейного программирования для водителя из примера 1

Эти два ограничения называются **лимитирующими** ограничениями.

Они соответствуют тем ресурсам, которые в процессе производства используются полностью и, следовательно, препятствуют дальнейшему увеличению ежедневного дохода. Оптимальное решение задачи — это точка пересечения прямых.



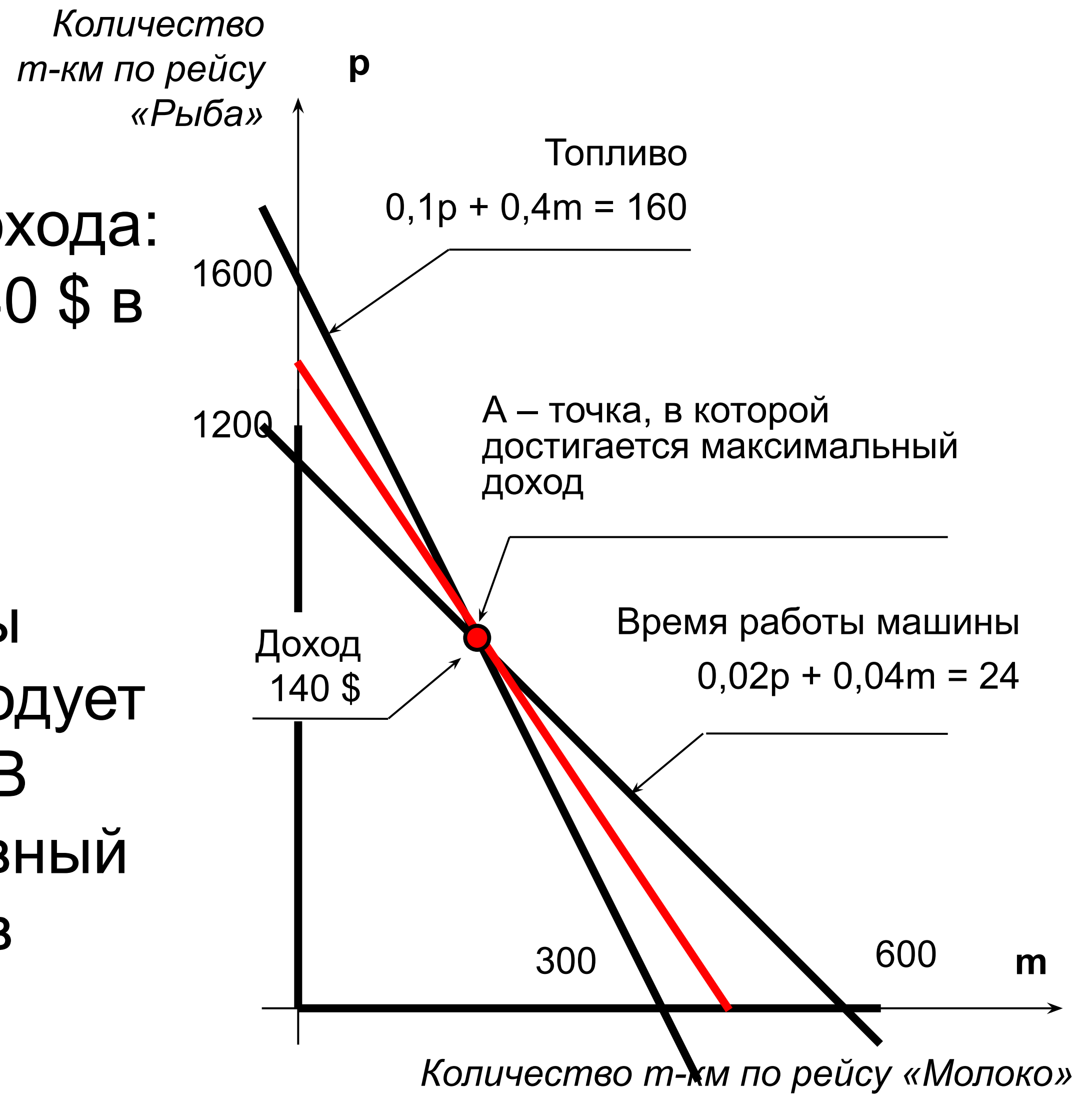
$$\begin{cases} 0,02\cdot p+0,04\cdot m=24 \\ 0,1\cdot p+0,4\cdot m=160 \end{cases}$$

Решая систему уравнений получаем p=800 т-км m=200 т-км

Таким образом, чтобы получать максимальный ежедневный доход, водитель должен «сделать» 800 т-км по развозу «Рыбы» и 200 т-км по развозу «Молока» в сутки.

Это сочетание объемов производства дает максимальное значение дохода: 0,10 х 800 + 0,30 х 200 = 140 $ в день.

При таком распределении водитель максимально используется время работы машины и полностью расходует суточный лимит горючего. В обоих ограничениях резервный запас или остаток ресурсов отсутствует.



- Обратимся к примеру **2,** в котором рассматривалась максимизация дохода автоперевозчика реализующего два маршрута

Решение

- Допустимые области для каждого из ограничений задачи выглядят следующим образом:

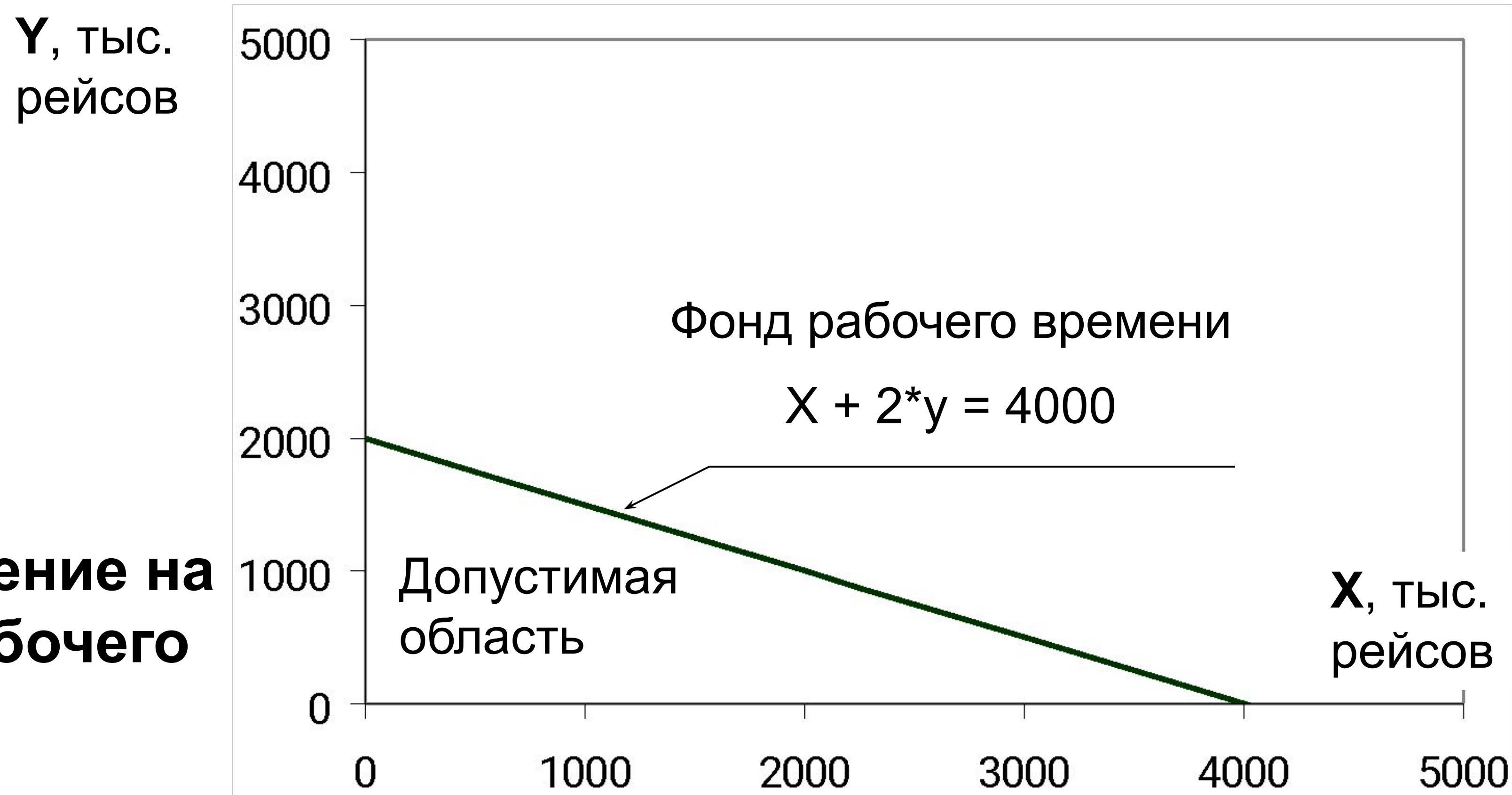


Рис. 6. Ограничение на фонд рабочего времени

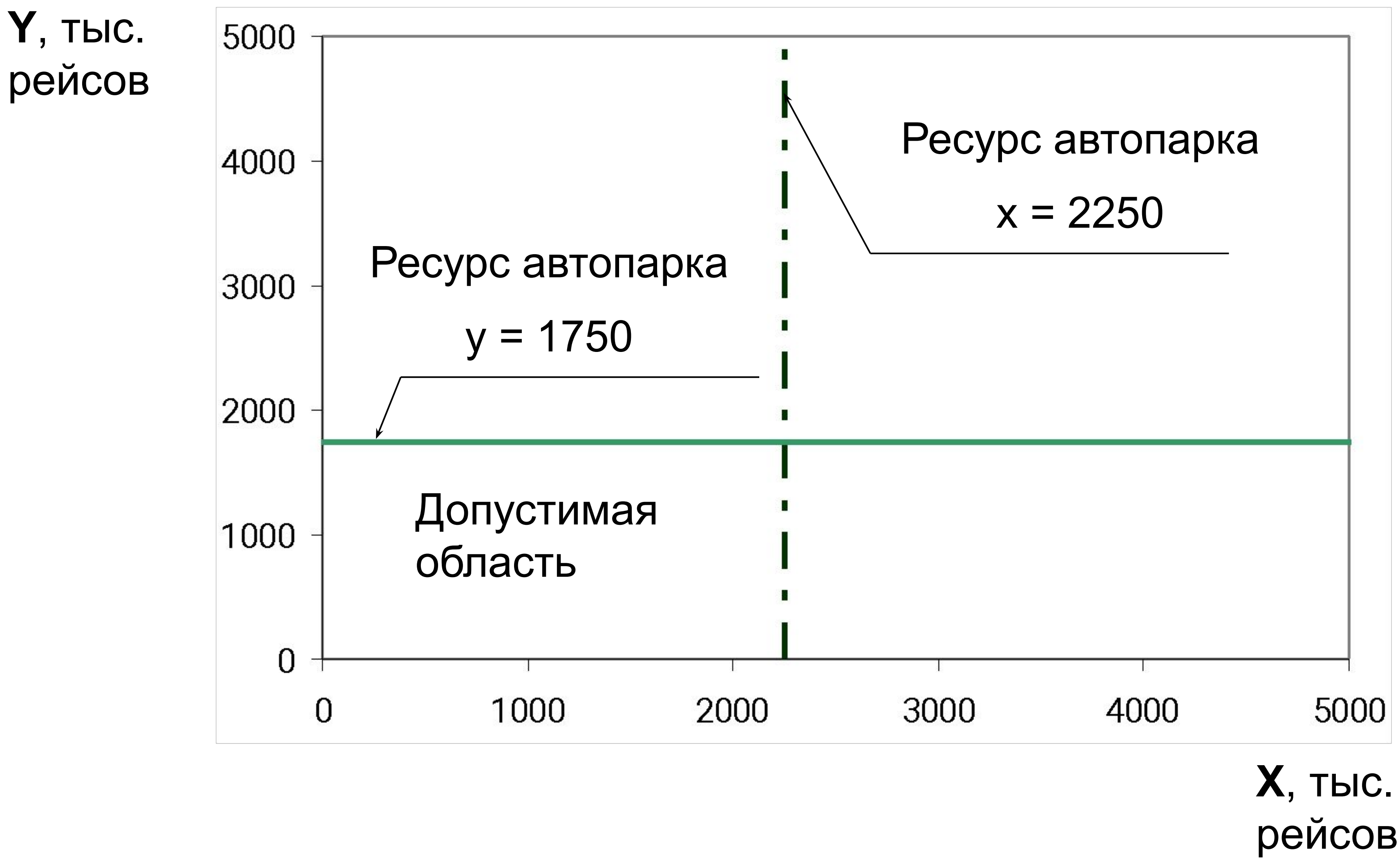


Рис. 7. Ограничение на производственные мощности (ресурс автопарка).

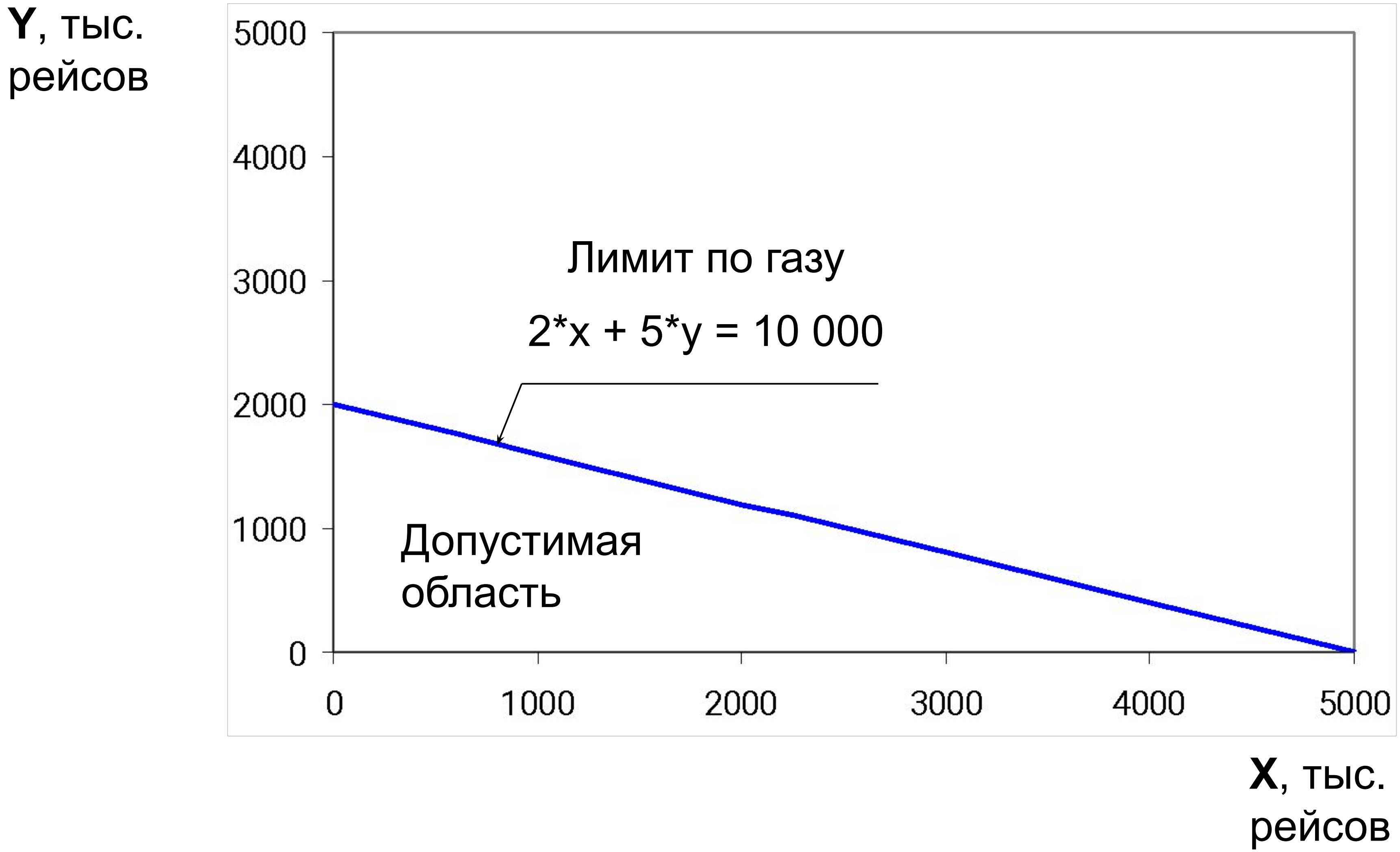


Рис. 8. Ограничение на газ

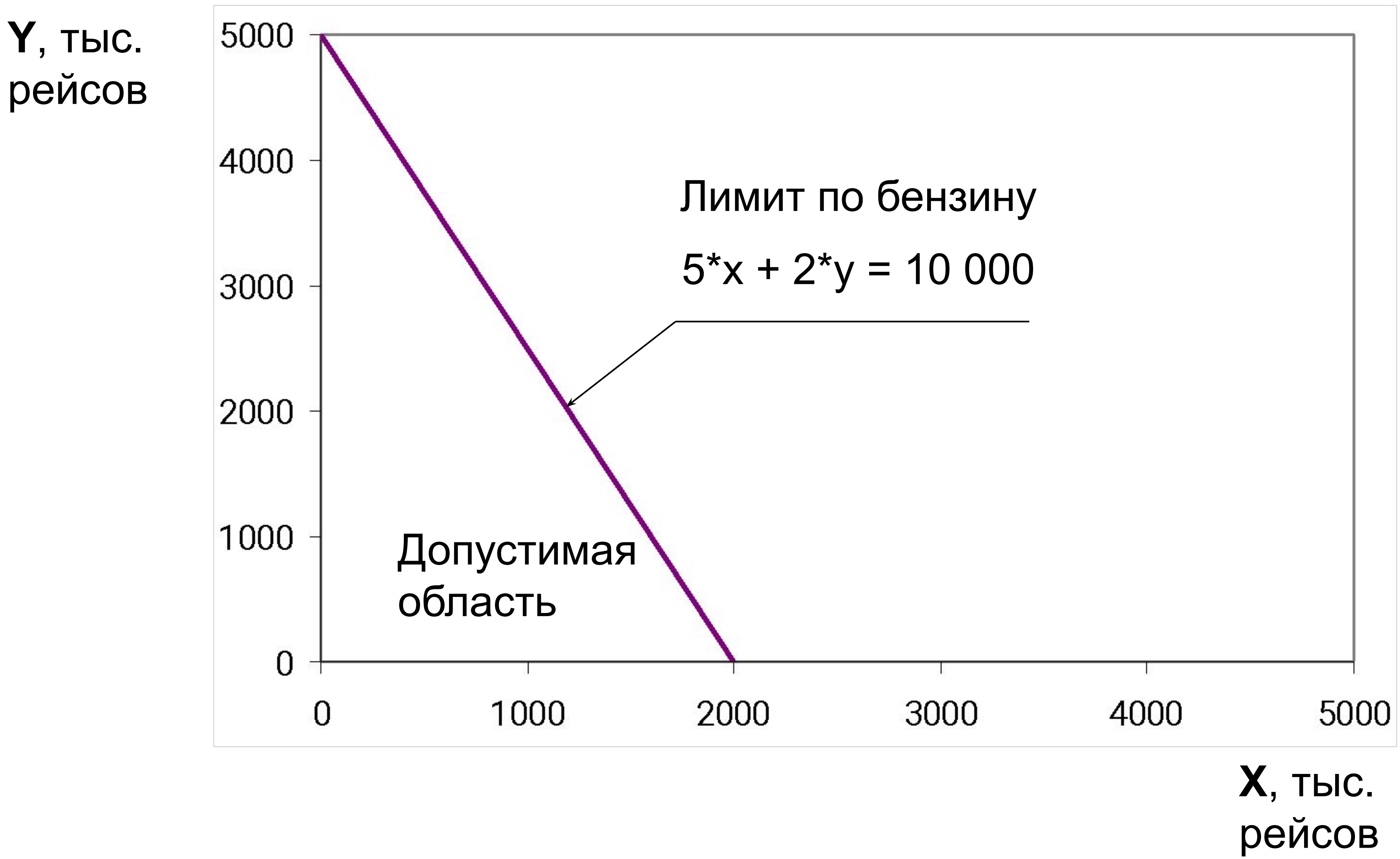


Рис. 9. Ограничение на бензин

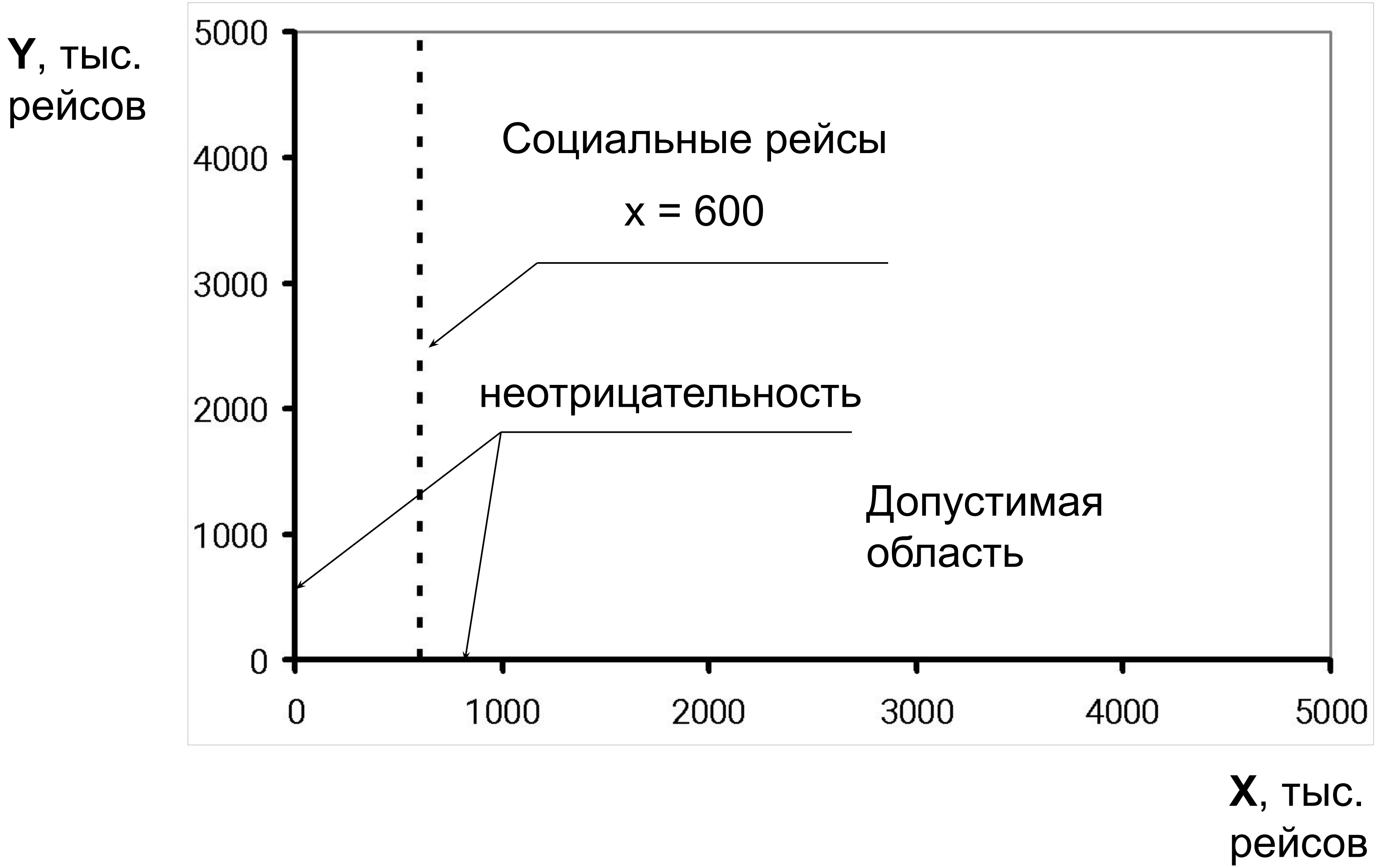


Рис. 10. Ограничение на социальные рейсы и неотрицательность

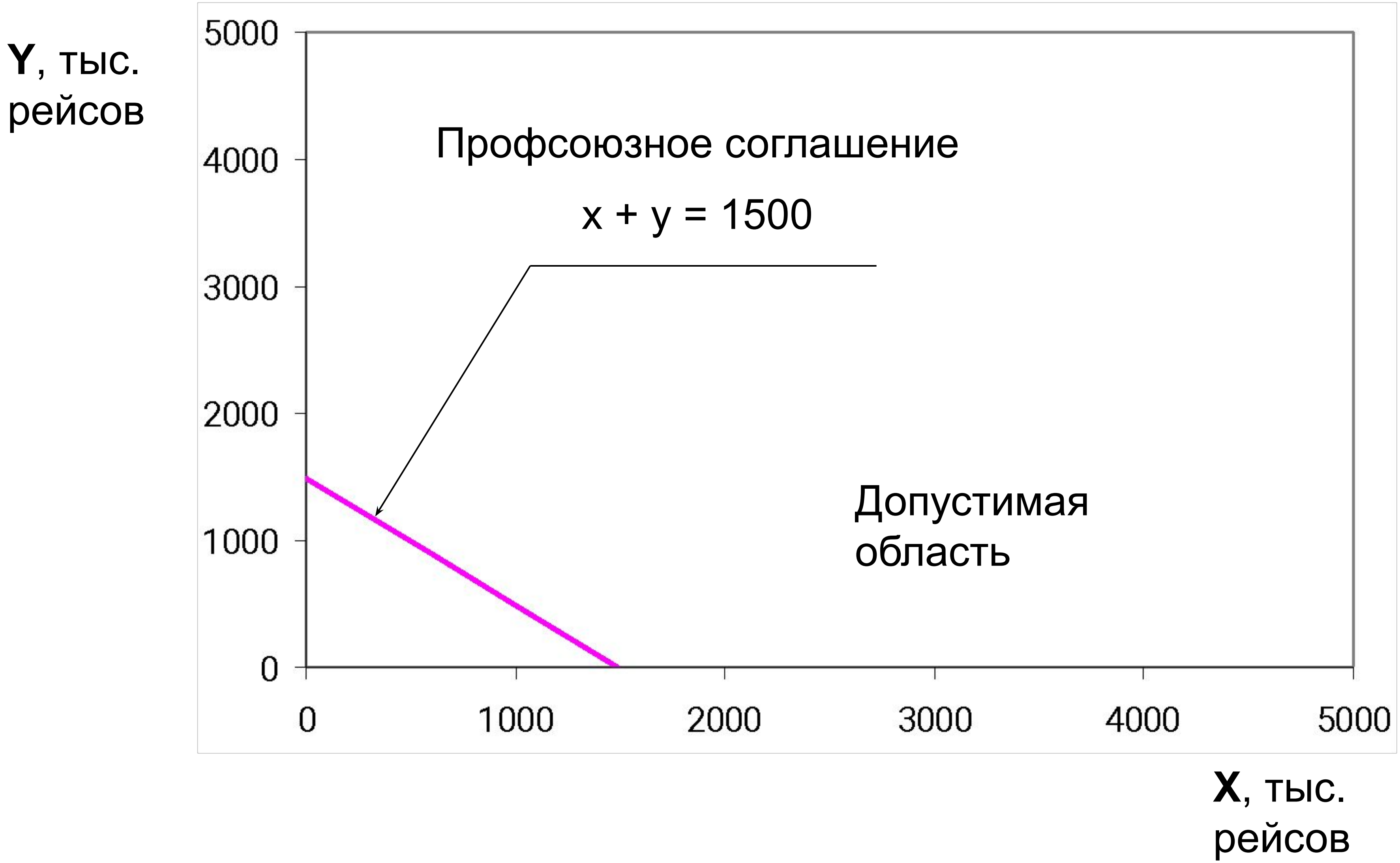


Рис. 11. Ограничение на профсоюзное соглашение

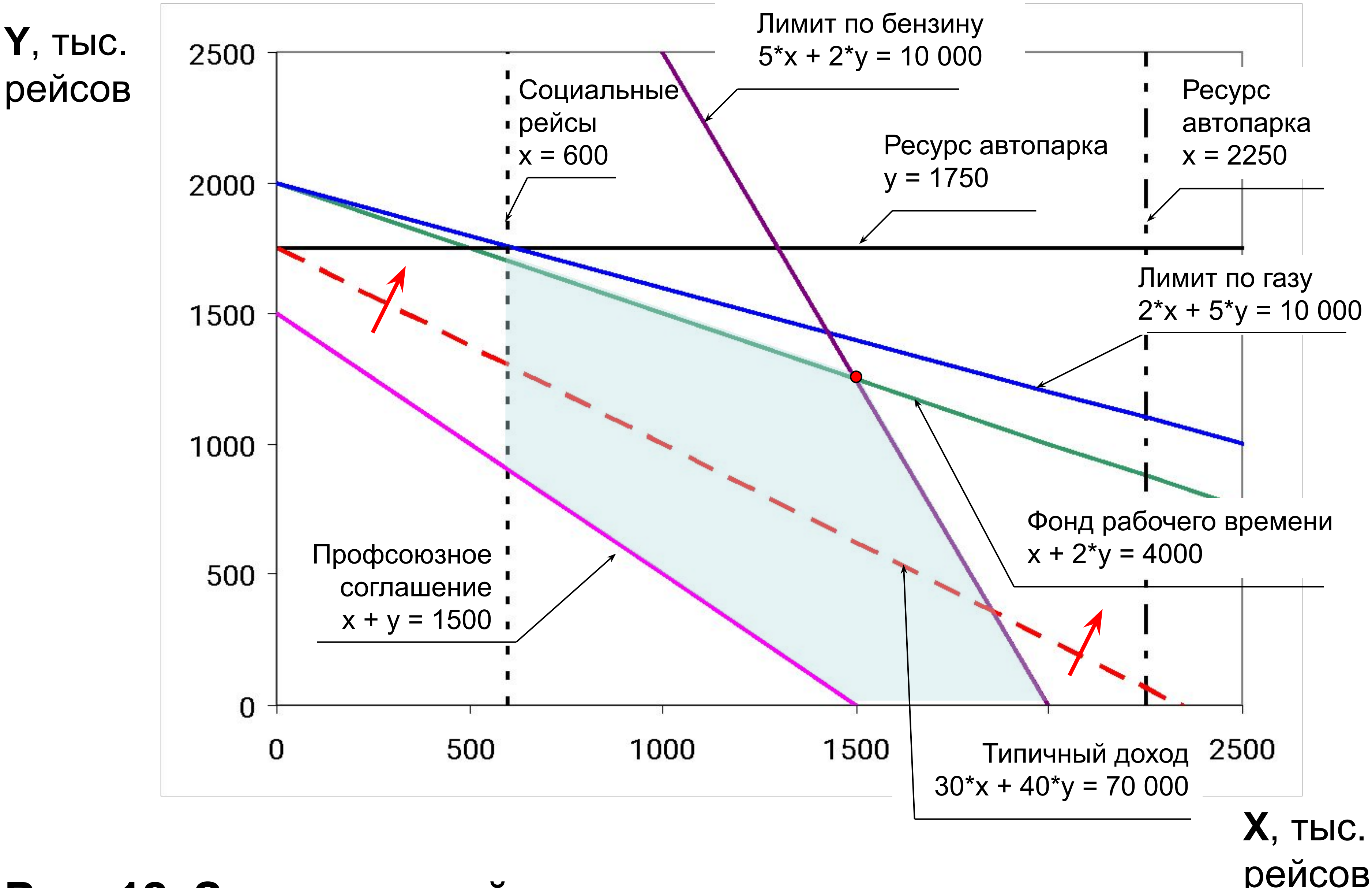


Рис. 12. Задача линейного программирования для осуществления рейсов по двум маршрутам

Лимитирующими являются ограничения на:

Фонд рабочего времени $1 \cdot x + 2 \cdot y \le 4000 \quad (\qquad)$ чел.-ч.

Бензин $5 \cdot x + 2 \cdot y \le 10000 \quad (\ )$

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} 1 \cdot x + 2 \cdot y = 4000 \\ 5 \cdot x + 2 \cdot y = 10000 \end{cases}$$

Получим **x = 1500** и **y = 1250**. Оптимальной стратегией автоперевозчика является 1500 рейсов по маршруту X и 1250 рейсов по маршруту Y в месяц. Таким образом, максимальный доход за неделю составит:

$$\boxed{P = 30 \cdot 1500 + 40 \cdot 1250 = 95\ 000}$$

Процесс преобразования неравенств, в систему уравнений достаточно прост. Для этого в левую часть неравенства вводится дополнительная переменная. Эта переменная призвана отразить величину разности между правой и левой частями неравенства. Рассмотрим рейсы по маршрутам X и Y (**пример 2**). Для получения системы уравнений в каждое ограничение введем дополнительную переменную. Обозначим данную переменную через **s**. Кроме того, примем предпосылку о неотрицательности значений этих переменных. Это значит, что дополнительные переменные прибавляются к левым частям всех ограничений знака и вычитаются $\leq$ из левых частей ограничений знака . Задача линейного программирования в данном случае принимает следующий вид:

$$1 \cdot x + 2 \cdot y + s_1 = 4000$$

$$x + s_2 = 2250$$

$$y + s_3 = 1750$$

$$2 \cdot x + 5 \cdot y + s_4 = 10000$$

$$5 \cdot x + 2 \cdot y + s_5 = 10000$$

$$x - s_6 = 600$$

$$x + y - s_7 = 1500$$

- Значения остаточных переменных в ограничениях на мощность автопарка равны 750 для рейсов по маршруту X и 500 для рейсов по маршруту Y, а именно:

$$1500 + s_2 = 2250 \quad \Rightarrow \quad s_2 = 750$$

$$1250 + s_3 = 1750 \quad \Rightarrow \quad s_3 = 500$$

- Остаточная переменная ограничения на газ:

$$2 \cdot 1500 + 5 \cdot 1250 + s_4 = 10000 \quad \Rightarrow \quad s_4 = 750$$

- Избыточная переменная ограничения на соцзаказ:

$$1500 - s_6 = 600 \quad \Rightarrow \quad s_6 = 900$$

- Избыток по профсоюзному соглашению составил:

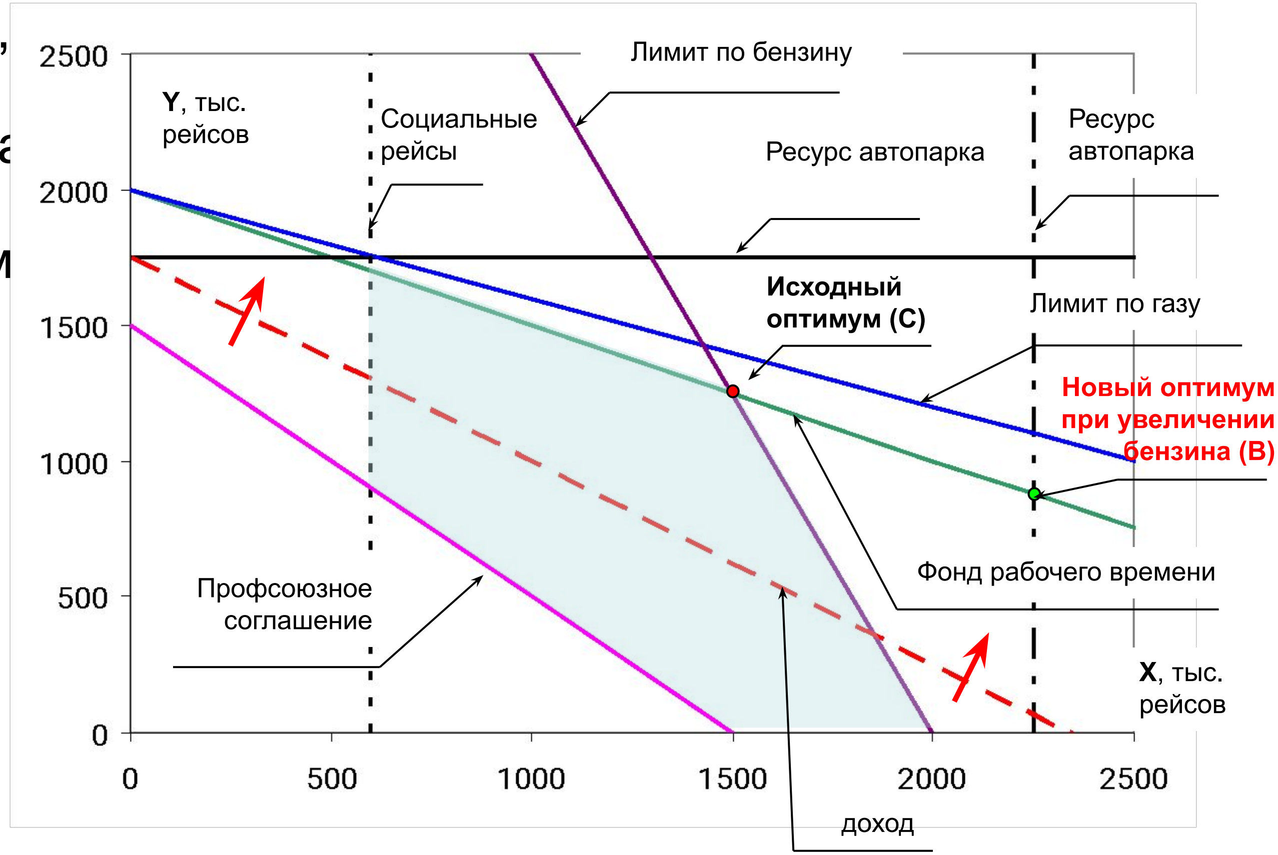
$$1500 + 1250 - s_7 = 1500 \quad \Rightarrow \quad s_6 = 1250$$

- **Воздействие изменений в обеспечении лимитирующим ресурсом на решение задачи линейного программирования**

- Поскольку один или несколько ресурсов используются полностью, значение целевой функции ограничено. Если появляется дополнительное количество лимитирующего ресурса, то оптимальное решение может быть улучшено. <u>Однако изменение оптимального решения приведет к улучшению значения целевой функции только в том случае, если сумма дополнительных издержек по обеспечению дополнительным количеством ресурса не превышает сумму прибыли, полученной ь результате его использования.</u>

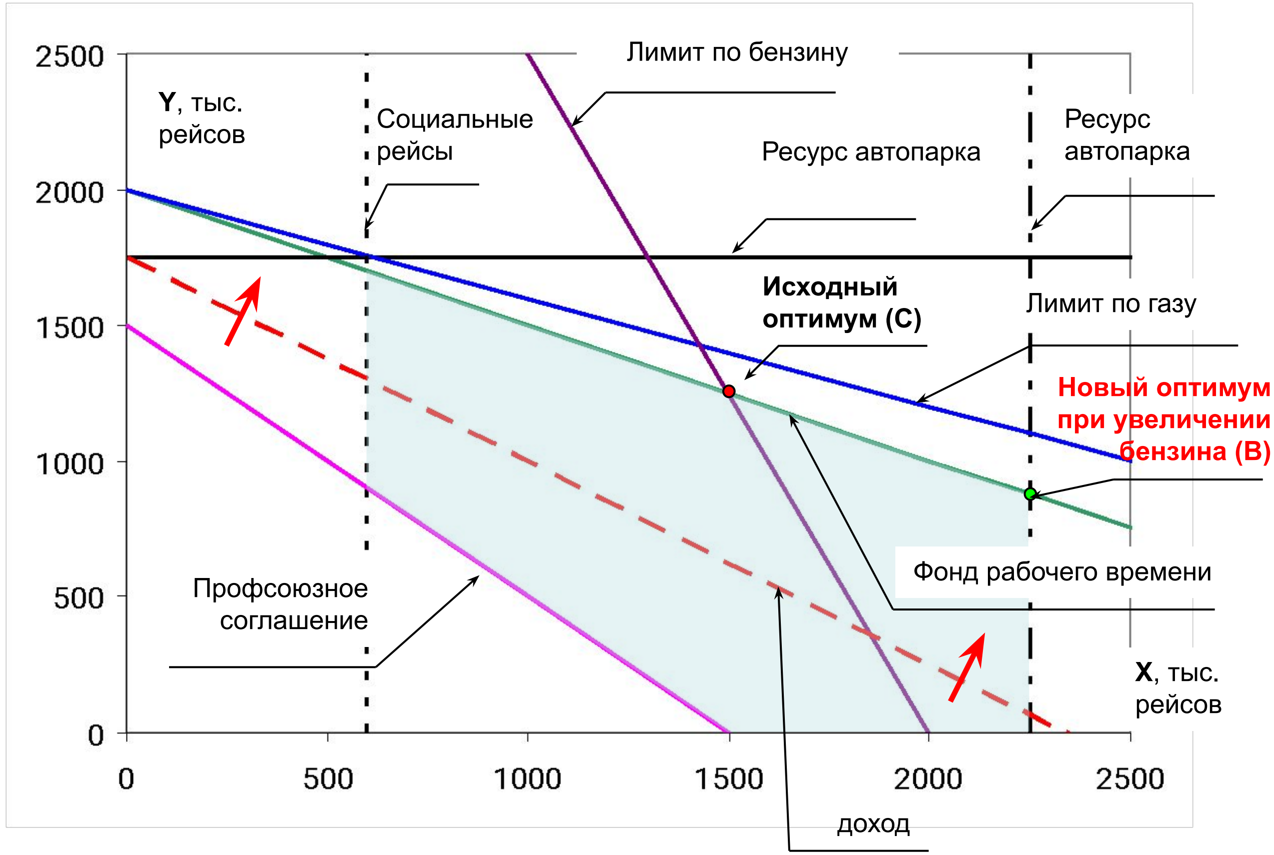
С увеличением объема лимитирующего ресурса соответствующее ограничение становится менее жестким. Так как жесткость лимитирующего ограничения постепенно снижается, его график будет перемещаться параллельно своему начальному положению, одновременно будет происходить перемещение оптимальной крайней точки в направлении, которое улучшает значение целевой функции. Этот процесс будет продолжаться до тех пор, пока какой-либо другой ресурс не будет полностью использован и рассматриваемое ограничение, перестанет быть лимитирующим. Величина, на которую увеличивается значение целевой функции при снижении жесткости лимитирующего ограничения на единицу, т.е. при увеличении количества лимитирующего ресурса на единицу; называется **теневой ценой ресурса**. Теневая цена ресурса - это стоимость единицы данного ресурса в оптимальном решении Увеличение объема лимитирующего ресурса на единицу целесообразно только в том случае, если существует возможность его получения по стоимости которая ниже, чем теневая цена данного ресурса.

Из **примера 2** мы знаем, что лимитирующими являются ограничения на фонд рабочего времени и на бензин. Рассмотрим сначала последнее из указанных ограничений. Жесткость ограничения на бензин снижается по мере перемещения линии ограничения параллельно ее исходному положению в противоположном направлении начала



координат. Допустимое множество расширяется, а оптимальная крайняя точка перемещается вниз по линии ограничения на фонд рабочего времени. Снижение жесткости ограничения на бензин является эффективным до тех пор, пока линия ограничения не достигнет точки пересечения ограничений на фонд рабочего времени и мощность автобусного парка для рейсов маршрута X, т.е. точки В. Если и далее снижать жесткость ограничения на бензин, оно перестанет быть лимитирующим, что приведет к появлению остатка в виде неиспользованного горючего.

Новой оптимальной крайней точкой является теперь точка В. Координаты точки В можно определить, решив систему уравнении для ограничений на фонд рабочего времени и ресурс автопарка X.



$$x + 2 \cdot y = 4000$$

$$x = 2250 \text{ рейсов} \qquad \Rightarrow \quad y = 875$$

Новым оптимальным сочетанием рейсов является 2250 рейсов по маршруту X и 875 по маршруту Y. Это сочетание дает доход, равный 30 x 2250 + 40 x 875 = 102 500 $ в месяц, таким, образом, увеличение дохода составит: 102 500-95 000 = 7500 $

Количество бензина, используемого для осуществления нового сочетания рейсов по маршрутам, составит:

$$5 \cdot 2250 + 2 \cdot 875 = 13\ 000\ \left(л\right)$$

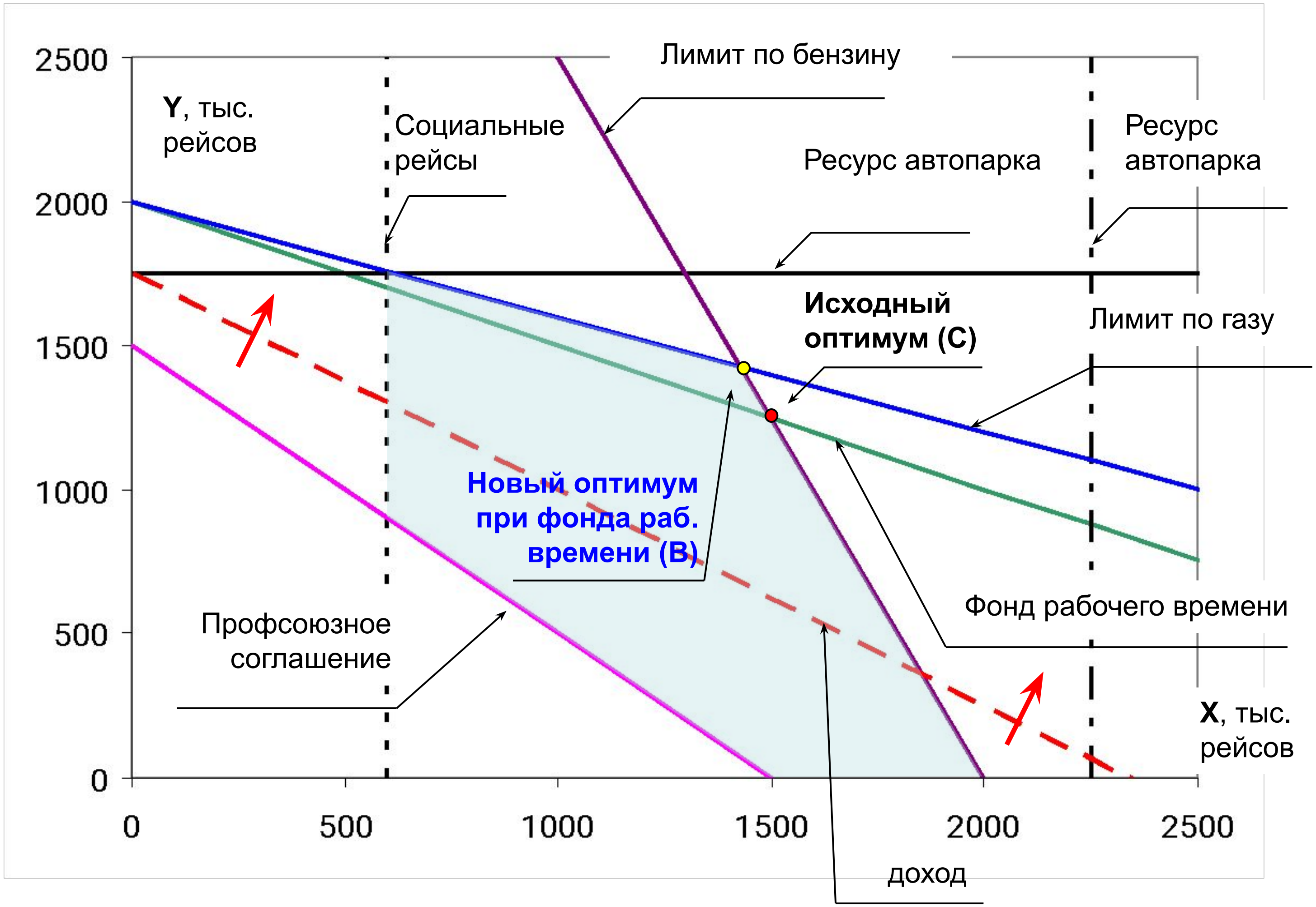
Оно превышает начальное количество на 3000 л в неделю. В новой оптимальной точке фонд рабочего времени и ресурс автобусного парка для маршрута X также используются максимально.

Дополнительное количество бензина в 3000 л позволяет получать дополнительный доход, равный 7500 $ в месяц, следовательно, теневая цена данного ресурса составит:

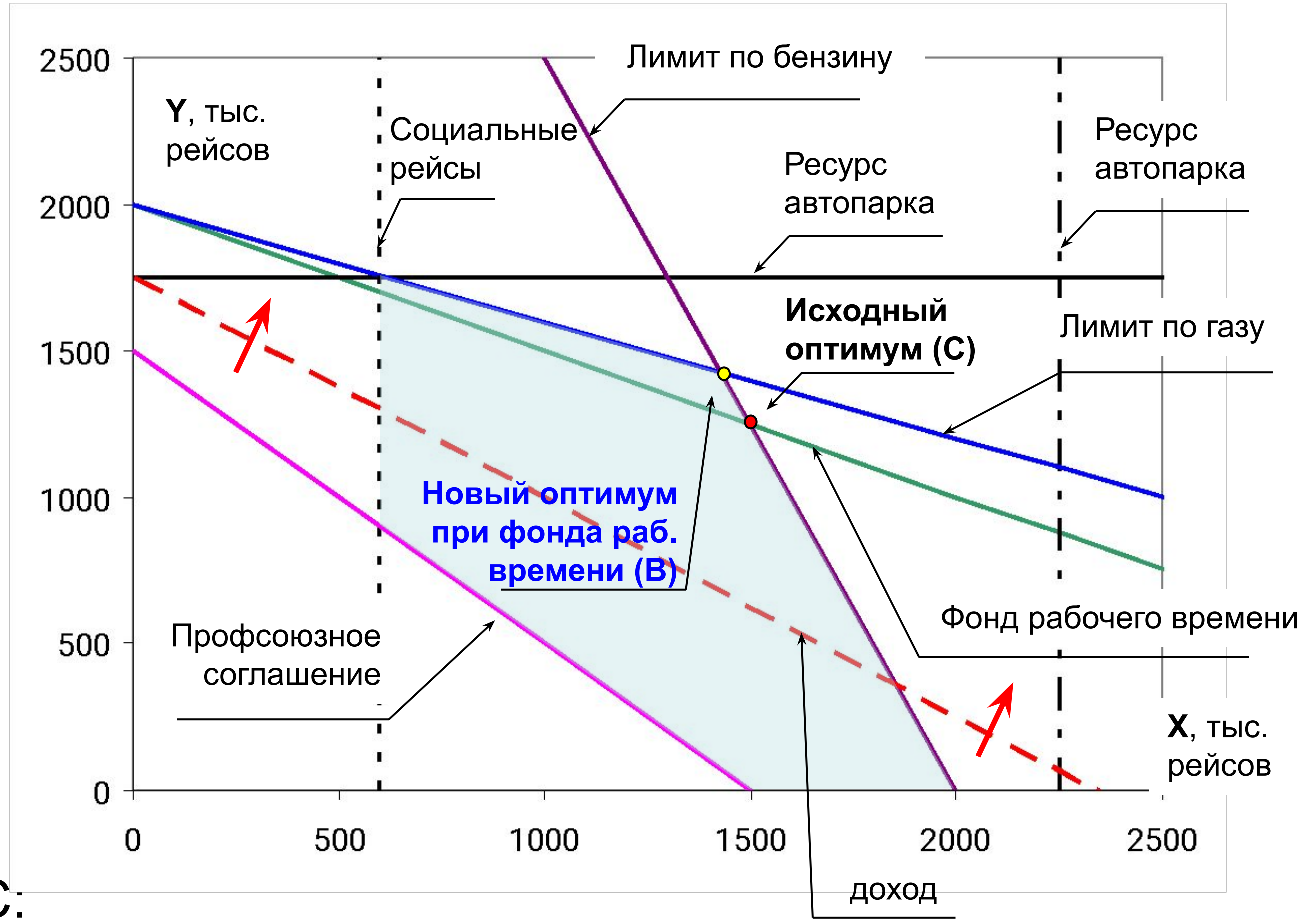
7500 : 3000 = 2,50 $ за 1 л.

Каждый дополнительный литр бензина ведет к увеличению еженедельного дохода в 2,50 $. Из этого следует, что сверхнормативный запас этого ресурса целесообразен только в случае, если стоимость получения дополнительного количества ресурса не превышает 2,50 $. за 1 л.

Предположив, что ограничение на бензин остается неизменным, применим аналогичную процедуру ко второму лимитирующему ограничению. Какое количество дополнительного рабочего времени следует купить? Поскольку линия ограничения на фонд рабочего времени движется параллельно своему исходному положению в направлении от начала координат, она стремится к точке пересечения ограничений на бензин и газ (точка С).

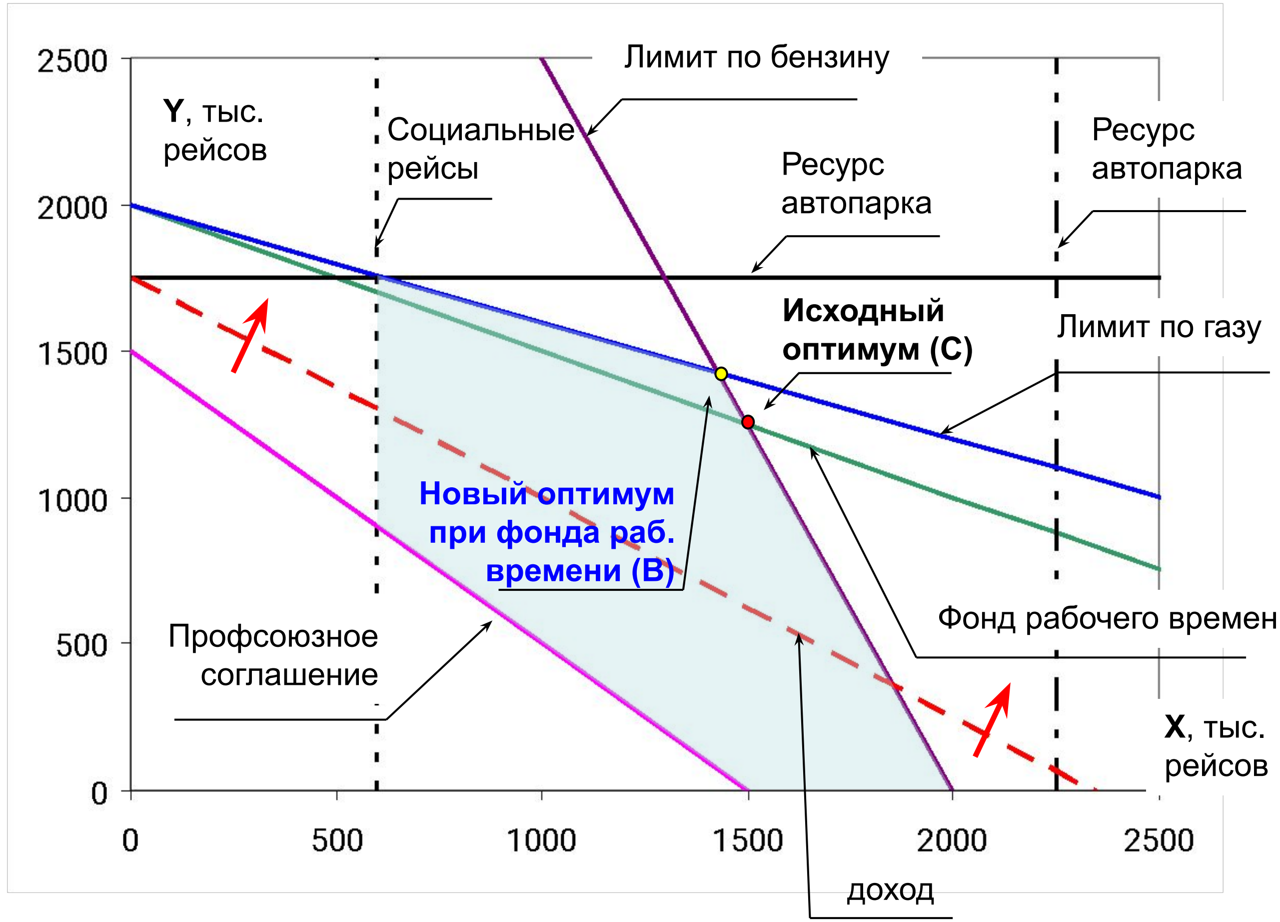


Если и далее снижать жесткость ограничения на фонд рабочего времени, то оно перестанет быть лимитирующим, и дальнейшее привлечение дополнительного рабочего времени нецелесообразно. Максимальное число дополнительных человеко-часов можно определить, решив систему ограничений, линии которых пересекаются в точке С:



$$\begin{cases} 2 \cdot x + 5 \cdot y + s_4 = 10000 \\ 5 \cdot x + 2 \cdot y + s_5 = 10000 \end{cases}$$

$$x = \frac{10000}{7} \qquad y = \frac{10000}{7}$$



Число используемых в точке С человеко-часов равно:

$$x + 2y = \frac{10000}{7} + 2 \cdot \frac{10000}{7} = 4385,7 \quad (\text{чел.-ч})$$

- Это значение на 285,7 чел.-ч превосходит первоначальное максимальное значение 4000 чел.-ч.
- Новый максимальный доход составляет:

$$P = 30 \cdot \frac{10000}{7} + 40 \cdot \frac{10000}{7} = 100\ 000\ (\$)$$

- Дополнительное количество человеко-часов в 285,7 позволяет получать дополнительный доход, равный 5 000 $ в месяц (100 000 – 95 000), следовательно, теневая цена данного ресурса составит:

5 000 : 285,7 = 17,50 $ за 1 чел.-ч.

- Получение максимального сверхнормативного запаса в 285,7 чел.-ч в месяц целесообразно при условии, что стоимость единицы дополнительного человекочаса не превосходит 17,50 $ в месяц.