# Вычисление площади плоской фигуры с помощью определенного интеграла.

# Площади фигур, расположенных над осью *Ox*

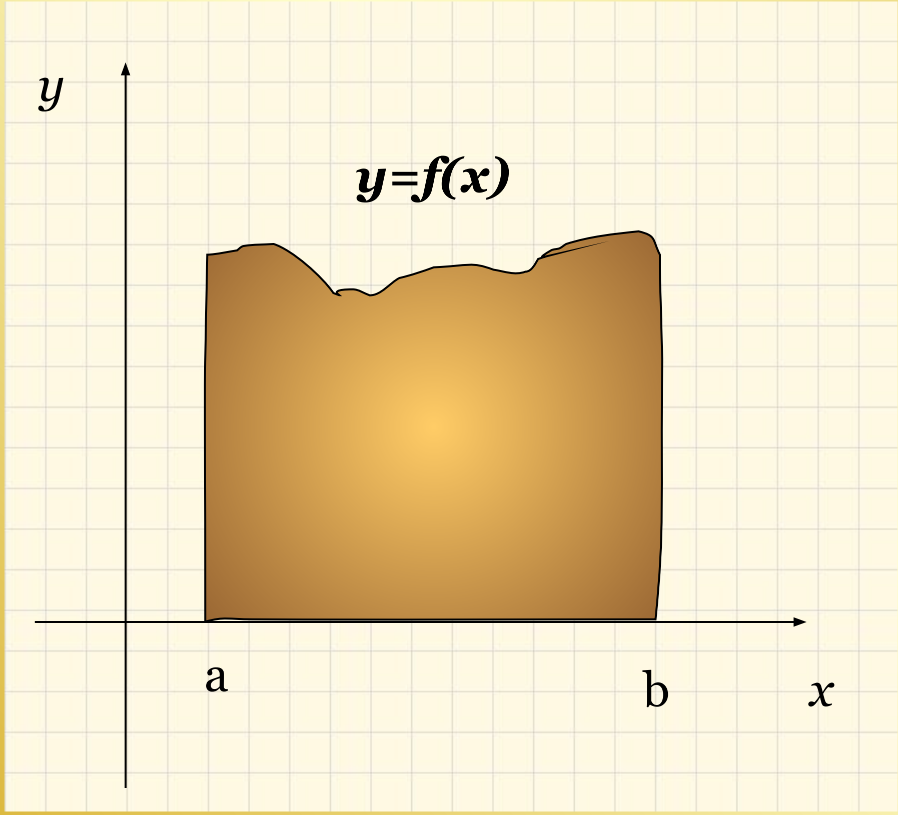
Пусть на отрезке $[a,b]$ функция *f(x)* принимает неотрицательные значения, т.е. $f(x) \geq 0$ для любого $x \in [a,b]$. Тогда график функции *y=f(x)* расположен над осью *Ox*.

Если фигура, расположенная над осью *Ox,* является криволинейной трапецией( рис 1), то ее площадь вычисляется по известной формуле

$$S = \int_a^b f(x)dx \text{ или } S = \int_a^b ydx$$

где *y* находится из уравнения корней.

# Площадь криволинейной трапеции.

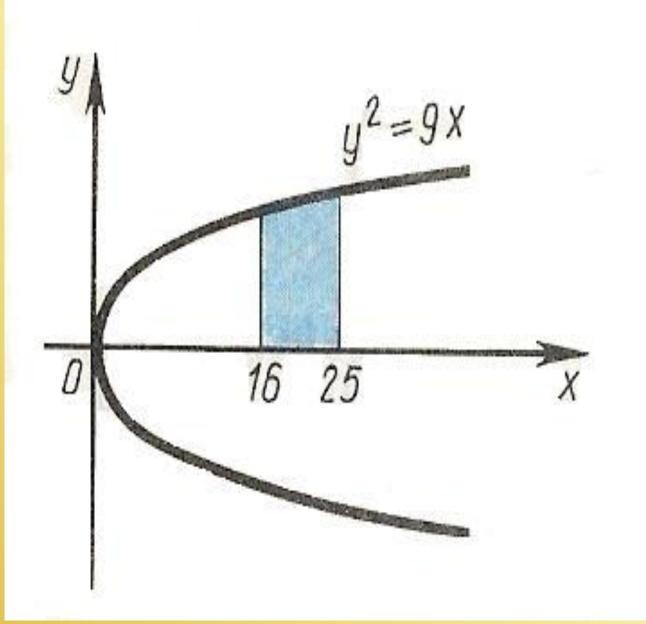



(рис.1)

$$S_{крив.трап.} = \int_a^b f(x)dx$$

**Криволинейной трапецией** называется фигура, ограниченная осью ОХ, прямыми x=a и x=b и кривой y=f(x).

Вычислим площади фигур, ограниченных заданными линиями:




- **Дано:** $y^2=9x$, $x=16$, $x=25$ и $y=0$
- **Решение:**

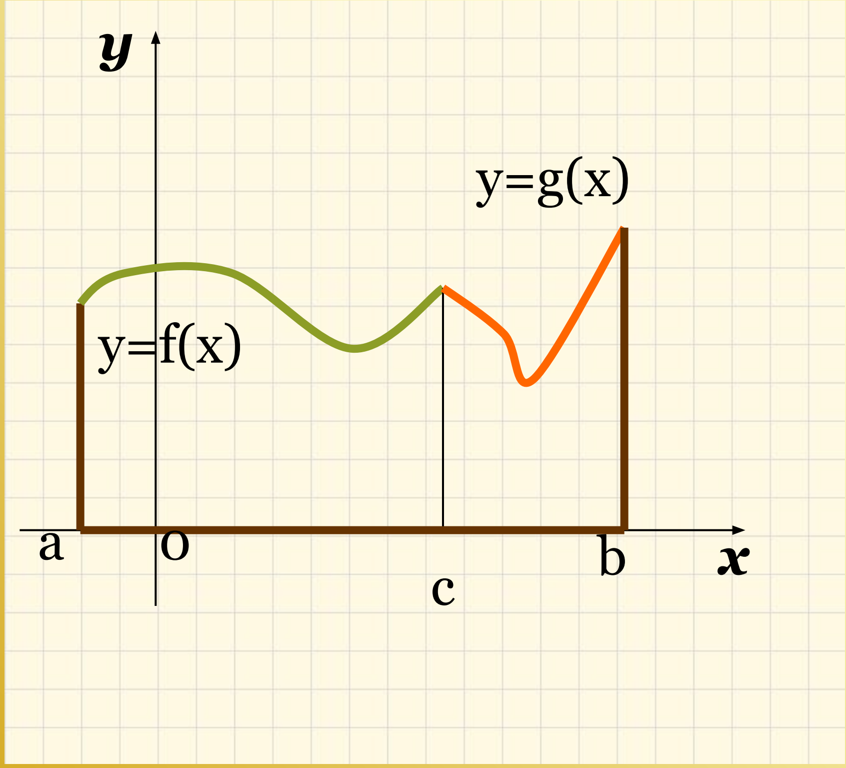
Для любого $x \in [16, 25]$ функция $y=\sqrt{9x}$ принимает положительные значения; поэтому для вычисления площади данной криволинейной трапеции следует воспользоваться формулой:

$$S=\int_{16}^{25}\sqrt{9}xdx=\int_{16}^{25}3x^{1/2}dx=$$

$$=3\frac{x^{3/2}}{3/2}\Bigg|_{16}^{25}=2x\sqrt{x}\Bigg|_{16}^{25}=2(125-64)=2\cdot 61=122$$ (кв.ед)

# Фигура, ограниченная различными кривыми.

- Если рассматриваемая фигура не является криволинейной трапецией, то искомую площадь нужно представить как сумму нескольких криволинейных трапеций.

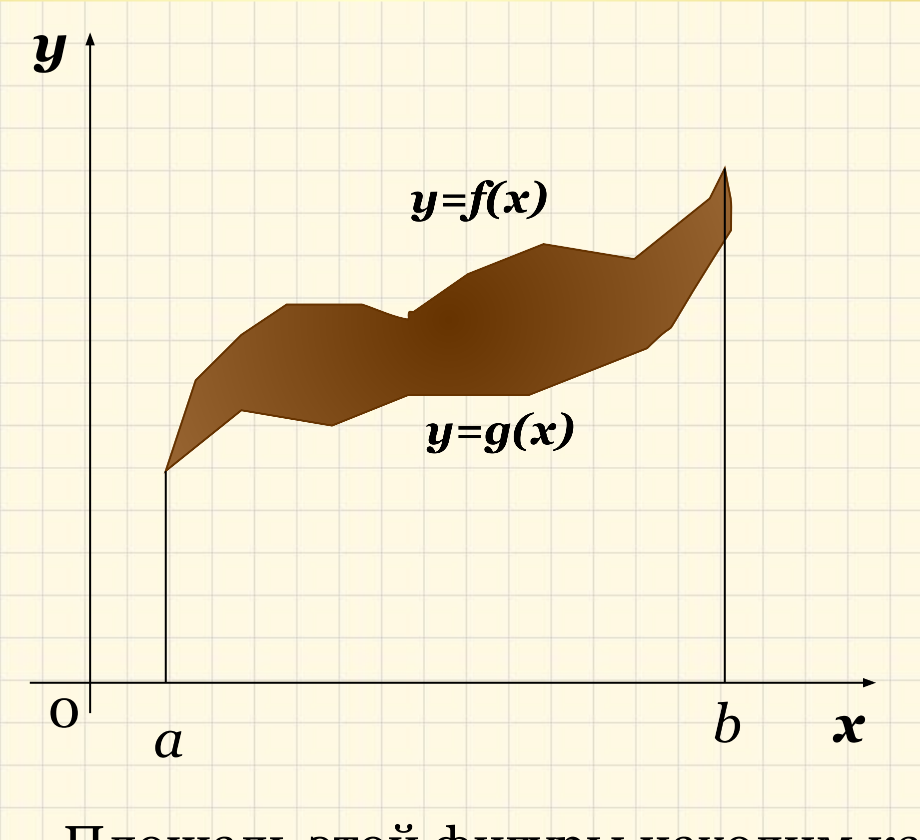



Найдем точку пересечения кривых y=f(x) и y=g(x). Для этого решим систему уравнений:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$$

Пусть **x=c**, тогда

$$S_{крив.трап.} = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b g(x)dx$$




Найдем точку пересечения кривых y=f(x) и y=g(x). Для этого решим систему уравнений:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$$

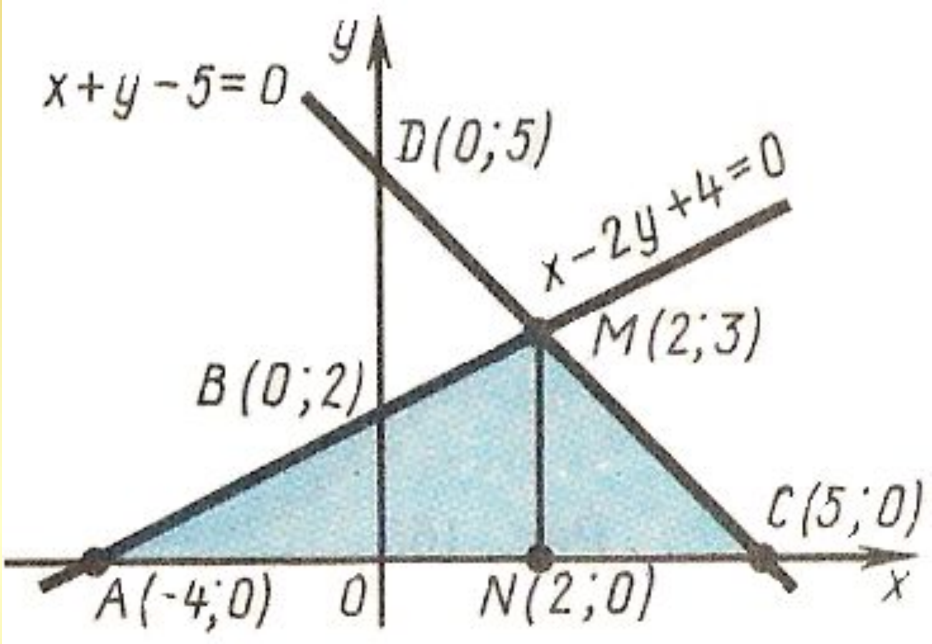
Полученные значения переменной ***x*** являются пределами интегрирования.

Площадь этой фигуры находим как разность площадей криволинейных трапеций , ограниченными кривыми y=f(x) и y=g(x).

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

- *Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями* $x$-2$y$+4=0, $y$+$x$-5=0 и $y$=0

- Решение: 1. Выполним построение




фигуры. Построим прямую $x$-2$y$+4=0; $У$=0, $x$=-47, $A$(-4, 0); $x$=0, $y$=2, $B$(0, 2). Построим прямую $x$+$y$-5=0; $y$=0, $x$=5, $C$(5,0); $x$=0, $y$=5, $D$(0,5).

2. Найдем точку пересечения прямых, для чего решим систему

$$\begin{cases} x-2y+4=0, \\ x+y-5=0. \end{cases}$$

Отсюда $x$=2, $y$=3,

т.е. $M$(2;3). Для вычисления искомой площади разобьем треугольник $AMC$ на два треугольника $AMN$ и $NMC$, так как при изменении $x$ от $N$ до $C$ – прямой $x$+$y$-5=0.

3. Для треугольника AMN имеем x-2y+4=0; $y=\frac{1}{2}x+2$ , $f\left(x\right)=\frac{1}{2}x+2$ ;

a=-4; b=2. Для треугольника NMC получим x+y-5=0; y=-x+5; f(x)=-x+5; a=2; b=5.

4. Вычислим площадь каждого из этих треугольников:

$$S_{AMN}=\int_{-4}^{2}\left(\frac{1}{2}x+2\right)dx=\left(\frac{x^2}{4}+2x\right)\Big|_{-4}^{2}=9$$ (кв.ед.).

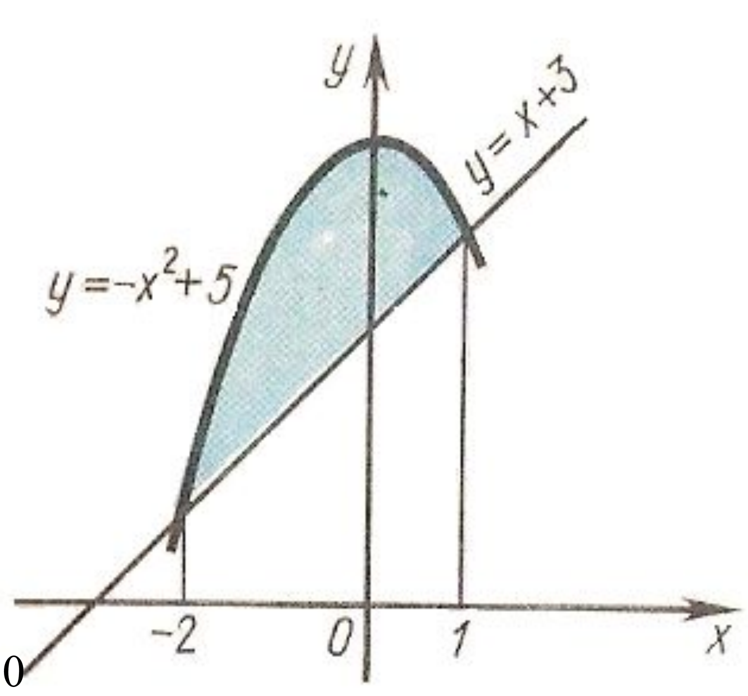
$$S_{NMC}=\int_{2}^{5}\left(-x+5\right)dx=\left(-\frac{x^2}{2}+5x\right)\Big|_{2}^{5}=4,5$$ (кв.ед.).

Следовательно, $S=S_{AMN}+S_{NMC}=9+4,5=13,5$ (кв.ед.).

Проверка: $S_{\triangle AMC}=\frac{1}{2}AC\cdot NM=\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 3=13,5$ (кв.ед.).

- $y=-x^2+5, y=x+3$
- Решение: Найдем абсциссы точек

пересечения параболы $y=-x^2+5$ и прямой $y=x+3$. Для этого решим систему $\begin{cases} y=-x^2+5 \\ y=x+3 \end{cases}$, откуда $x_1=-2, x_2=1$




Найдем площадь $S_1$ фигуры, ограниченной параболой $y=-x^2+5$, прямыми $x=-2, x=1$ и $y=0$

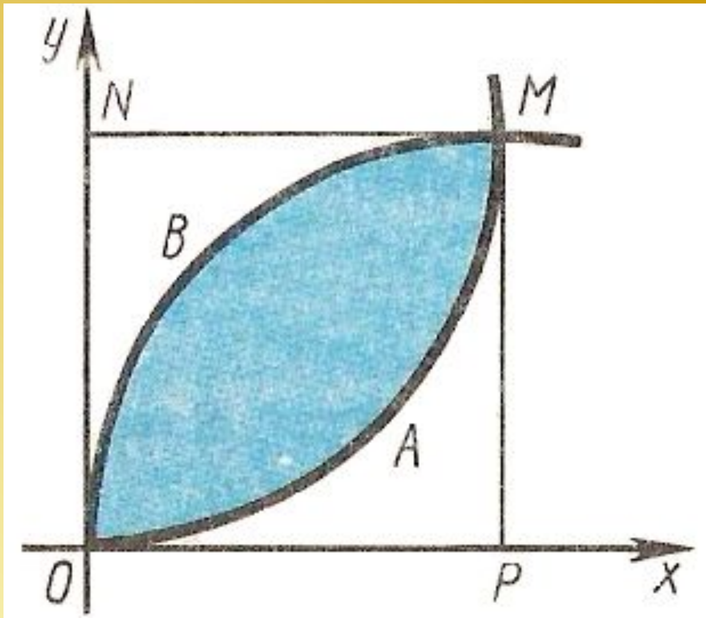
Получим: $S_1=\int_{-2}^{1}\left(-x^2+5\right)dx=\left(-\frac{x^3}{3}+5x\right)\Big|_{-2}^{1}=12$ (кв.ед.)

Найдем площадь $S_2$ фигуры, ограниченной прямыми $y=x+3, x=-2, x=1, y=0$:

$$S_2=\int_{-2}^{1}(x+3)\,dx=\left(\frac{x^2}{2}+3x\right)\Big|_{-2}^{1}=7,5 \text{(кв.ед.)}$$

Площадь искомой фигуры есть $S=S_1-S_2=12-7,5=4,5$ (кв.ед)

- Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $y^2 = 4x, x^2 = 4y$




- Решение: Как видно из рисунка, площадь фигуры *OBAMAO* можно представить как разность площадей фигур *OBMPO* и *OAMPO*, где *MP* – перпендикуляр, опущенный из точки *M* на ось *Ox*.

Найдем координаты точки *M*. Решив систему уравнений $\begin{cases} y^2 = 4x \\ y = x^2/4 \end{cases}$ получим $x=4$, $y=4$, т.е. $M(4,4)$.

Следовательно,

$$S = \int_0^4 \sqrt{4}x dx - \int_0^4 \frac{x^2}{4} dx = \frac{4}{3} x^{3/2} \Big|_0^4 - \frac{x^3}{12} \Big|_0^4 = \frac{16}{3} \text{ (кв.ед.)}$$

- Данную задачу можно решить и другим способом.

Представим искомую площадь в виде разностей площадей фигур *OAMNO* и *OBMNO* ( *MN* –

- перпендикуляр, опущенный из точки *M* на ось *Oy*),

т.е. $S = S_{OAMNO} - S_{OBMNO}$

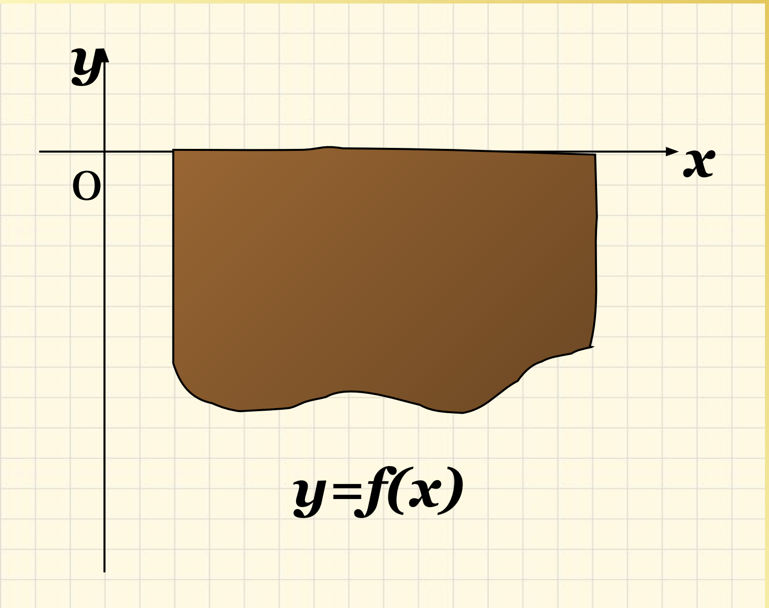
Тогда:

$$S = \int_0^4 \sqrt{4y}\,dy - \int_0^4 \frac{y^2}{4}\,dy = \frac{4}{3} y^{3/2} \Big|_0^4 - \frac{y^3}{12} \Big|_0^4 = \frac{16}{3} \text{ (кв.ед.)}$$

# Площади фигур, расположенных полностью или частично под осью *Ox*

- Пусть на отрезке [*a,b*] задана неположительная непрерывная функция *y=f(x)*, т.е. $f(x) \le 0$ для любого $x \in [a,b]$. Тогда график функции *y=f(x)* расположен под осью *Ox*.
- Если фигура, расположенная под осью Ox, является криволинейной трапецией, например, то ее площадь вычисляется по формуле

$$S = \left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \quad \text{или} \quad S = \left| \int_a^b y\,dx \right|$$

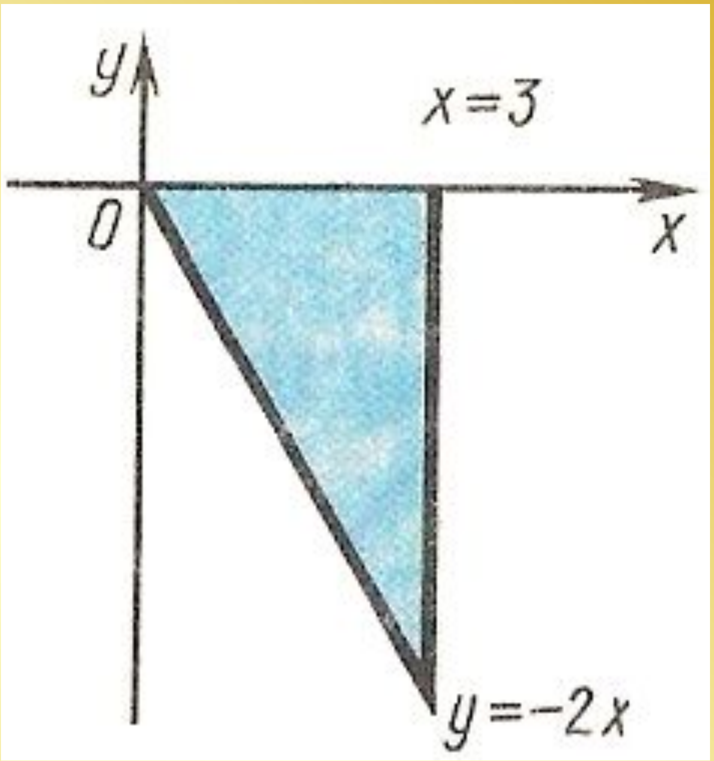



где *y* находится из уравнения кривой.

- $y=-2x$, $y=0$ и $x=3$
- Решение: На отрезке [0,3] функция

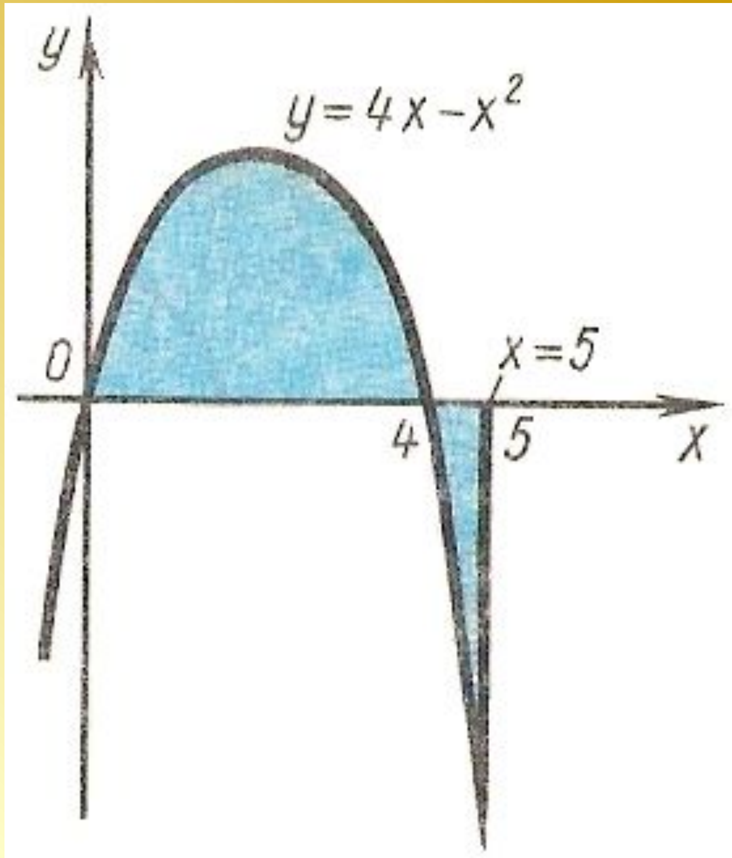
f(x)=-2x отрицательна; поэтому для вычисления площади искомой фигуры воспользуемся приведенной выше формулой: $S=\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = \left|\int_0^3 (-2x)\,dx\right| =$

$= \left|-x^2\right|_0^3 = 9$ (кв.ед)



- $y = 4x - x^2,\ y = 0,\ x = 5.$
- Решение: Парабола

пересекает ось абсцисс в точках $x$=0 и $x$=4. Фигура, площадь которой требуется найти, отмечена голубым цветом. Пусть $S_1$ и $S_2$ - площади частей этой фигуры, соответствующих отрезкам [0,4] и [4,5] а $S$ – искомая площадь; тогда




$$S = S_1 + S_2.$$

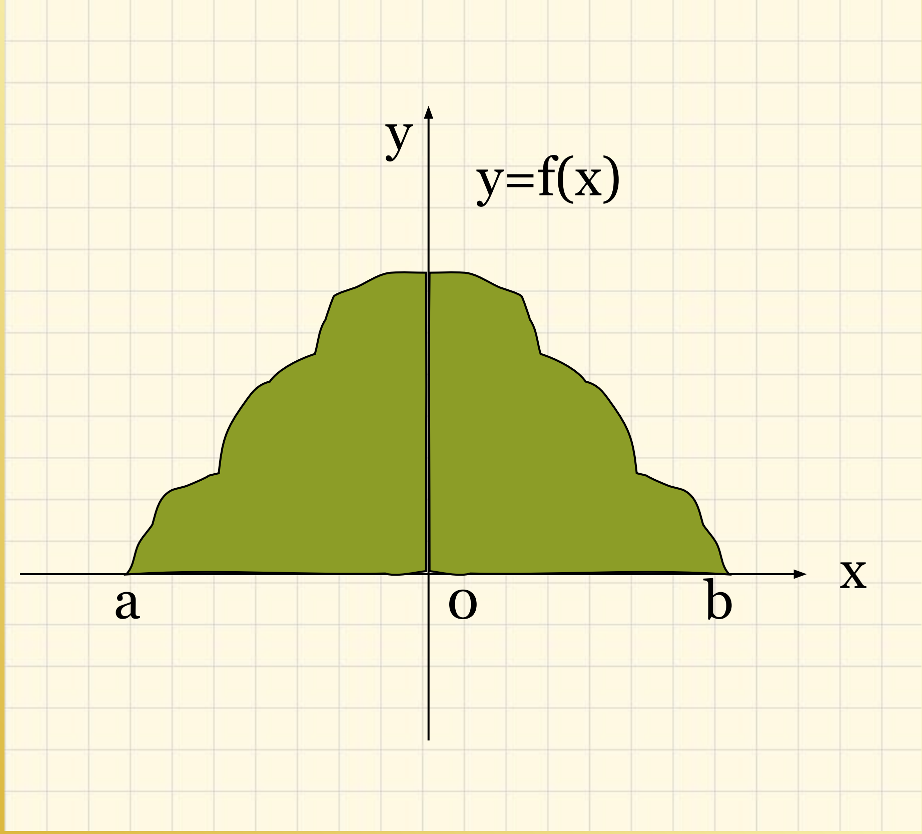
Используя первую из рассмотренных формул, получим:

$$S_1 = \int_0^4 (4x - x^2)\,dx = \left(2x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^4 = 32 - \frac{64}{3} = \frac{32}{3}$$ (кв.ед.),

а по второй формуле находим

$$S_2 = \left|\int_4^5 (4x - x^2)\,dx\right| = \left|\left(\frac{x^3}{3} - 2x^2\right)\right|_4^5 = \left(\frac{125}{3} - 50\right) - \left(\frac{64}{3} - 32\right) = \frac{7}{3}$$ (кв.ед.)

## Симметрично расположенные плоские фигуры

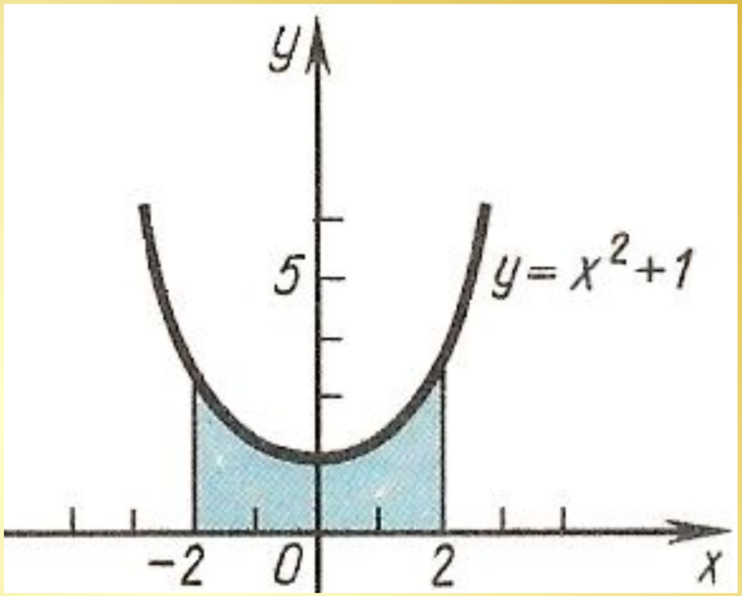



Если кривая расположена симметрично
относительно оси координат или начала
координат, то можно упростить вычисления,
определив половину площади и затем
удвоив результат.

$$S_{крив.трап.} = 2\int_0^b f(x)dx$$

# Симметрично расположенные плоские фигуры

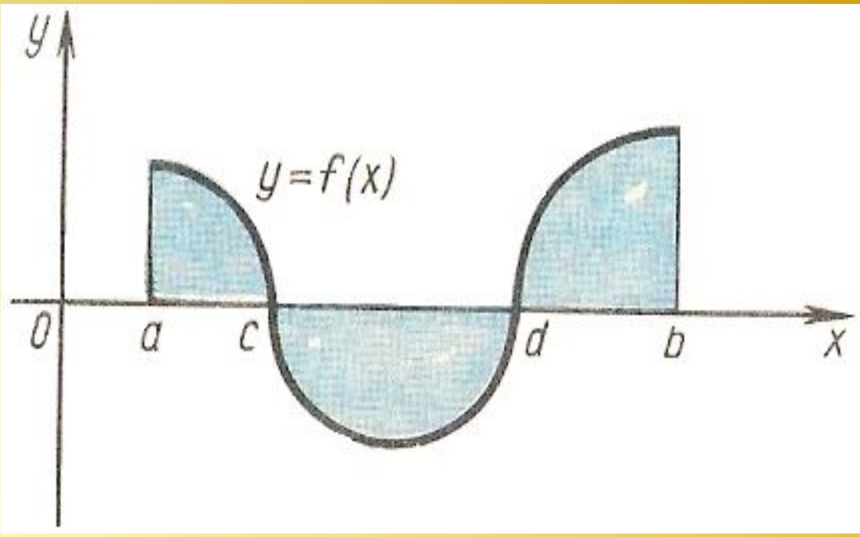
$y = x^2 + 1, x = -2, x = 2, y = 0$




Решение:

$$S = \int_{-2}^{2} \left(x^2 + 1\right) dx = 2\int_{0}^{2} \left(x^2 + 1\right) dx = 2\left(\frac{x^3}{3} + x\right)\Big|_0^2 = 9\frac{1}{3}$$ (кв.ед.)

- Если *f(x)* на отрезке [*a,b*] меняет знак конечное число раз, то этот отрезок следует разбить на части, на каждой из которых функция знакопостоянна. Интеграл по всему отрезку [*a,b*] разбивают на сумму интегралов по полученным частичным отрезкам.



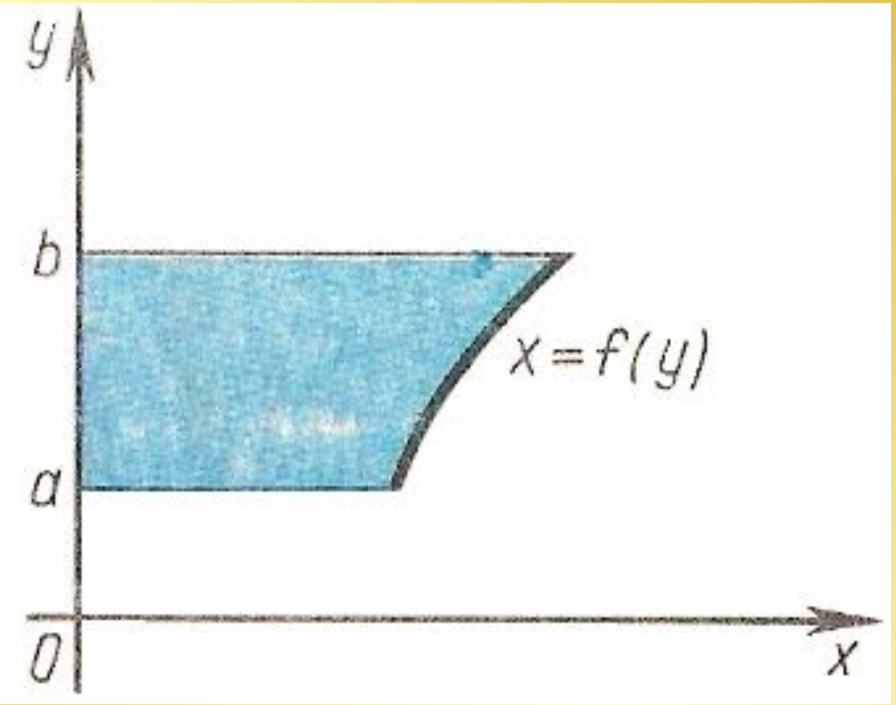

Для вычисления суммы площадей нужно найти сумму абсолютных величин интегралов по указанным выше отрезкам, т.е. $S = S_1 + S_2 + S_3$

где $S = \int_a^b f(x)\,dx,\ S_1 = \int_a^c f(x)\,dx,\ S_2 = \left|\int_c^d f(x)\,dx\right|,\ S_3 = \int_d^b f(x)\,dx$

# Площади фигур, прилегающих к оси *Oy*

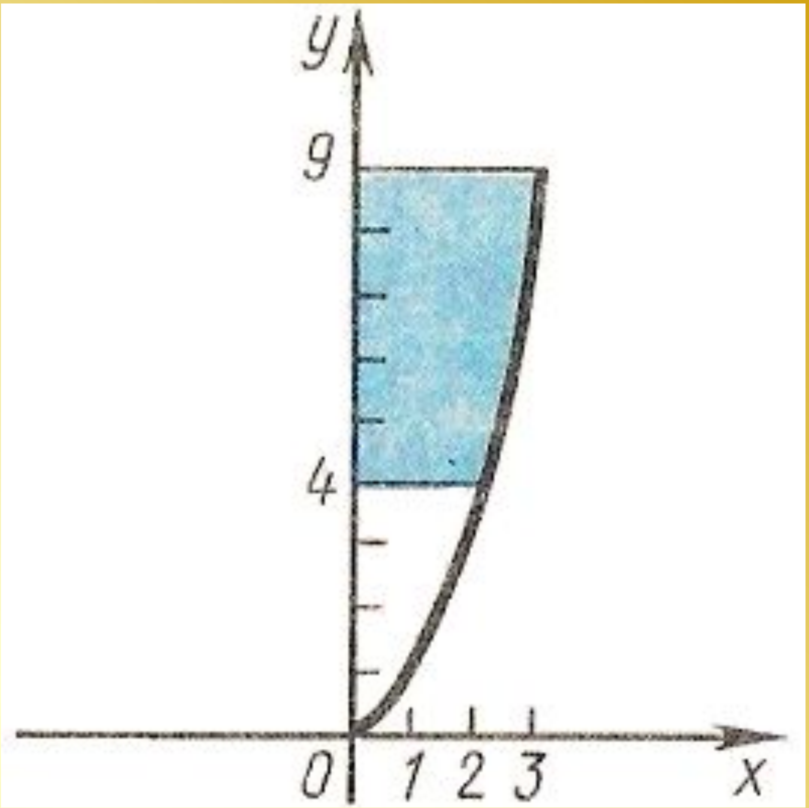
- Если криволинейная трапеция прилегает к оси ординат и ограниченна непрерывной кривой *x=f(y),* прямыми *y=a, y=b* и осью *Oy*, то ее площадь вычисляется по формуле

$$S=\int_a^b f(y)\,dy$$



- $y = x^2, y = 4, y = 9, x = 0$
- Решение: Данная фигура есть криволинейная трапеция,

прилегающая к оси Оу. Пределами интегрирования по у являются значения а=4, b=9. Запишем данную функцию в виде x=f(y), т.е. $x = \sqrt{y}$ Теперь искомую площадь найдем по рассмотренной чуть ранее формуле




$$S = \int_4^9 \sqrt{y} dy = \frac{2}{3} y\sqrt{y} \Big|_4^9 = 12\frac{2}{3}$$ (кв.ед.)