

**МБОУ «Солоновская средняя общеобразовательная
школа имени Матренина А.П.»**



**Задачи математического
содержания в ЕГЭ № 19**

Шарабарина Галина Гавриловна, учитель математики



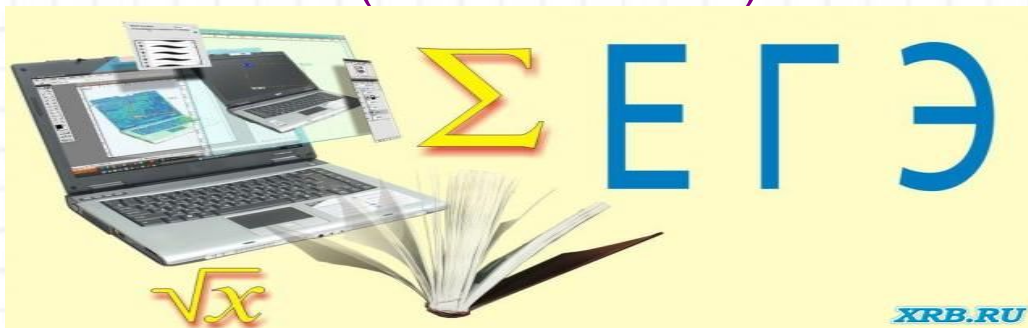
11. Изменения в структуре и содержании вариантов контрольных измерительных материалов 2015 года по сравнению с 2014 годом

1. Во второй части добавлено задание повышенного уровня сложности с развёрнутым ответом, проверяющее практические навыки применения математики в повседневной жизни, навыки построения и исследования математических моделей.

Актуальность:

В этом учебном году в вариантах ЕГЭ-2015 по математике появилась новая задача №19 – задача с экономическим содержанием.

Эта специфическая задача № 19 оказалась сюрпризом не только для школьников, но даже для учителей. С чего начать решение? Где взять формулы? На что вообще похожа эта задача и почему в вариантах ЕГЭ она расположена между сложными С4 и С5 (то есть 18 и 20)?





Проценты

Процент — это $\frac{1}{100}$ часть.

Если величина B равна $x\%$ от A , то

$$B = \frac{x}{100} A.$$

Если величина C увеличилась на x процентов, то она стала равняться

$$\left(1 + \frac{x}{100}\right) C.$$

Если величина C уменьшилась на x процентов, то она стала равняться

$$\left(1 - \frac{x}{100}\right) C.$$

№ 1



19. 30 декабря 2014 года Сергей Михайлович взял в банке 800 000 рублей в кредит. План выплаты кредита — 30 числа каждого следующего месяца банк начисляет 2% на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивают долг на 2%), затем Сергей Михайлович переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев Сергей Михайлович может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 360 000 рублей?



Решение.

Предположим, что первые месяцы Сергей Михайлович будет выплачивать ровно по 360 000 рублей.

После первого месяца:

$$1,02 \cdot 800\,000 = 816\,000 \text{ рублей,}$$
$$816\,000 - 360\,000 = 456\,000 \text{ рублей.}$$

После второго месяца:

$$1,02 \cdot 456\,000 = 465\,120 \text{ рублей,}$$
$$465\,120 - 360\,000 = 105\,120 \text{ рублей.}$$

После третьего месяца:

$$1,02 \cdot 105\,120 = 107\,222,4 \text{ рублей,}$$
$$107\,222,4 - 107\,222,4 = 0.$$

Ответ: 3



№ 2. 1 января 2015 года Александр Сергеевич взял в банке 1,1 млн.рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая – 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет 1% на оставшуюся сумму долга, затем Александр Сергеевич переводит в банк платеж. На какое минимальное количество месяцев Александр Сергеевич может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 275 тыс.рублей.?

1.01.2015 : взял 1,1 млн.руб

1.02.2015 после начисления 1% : $1100000(1+0,01)=1111000$ руб.,
после выплаты: $1111000-275000=836000$ руб.

1.03.2015 после начисления 1%: $836000(1+0,01)=844360$ руб.
после выплаты : $844360-275000=569360$ руб.

1.04.2015 после начисления 1%: $569360(1+0,01)=575053,6$ руб.
после выплаты : $575053,6-275000=300053,6$ руб.

1.05.2015 после начисления 1%: $300053,6(1+0,01)=303054,136$ руб
после выплаты: $303054,136-275000=28054,136$ руб.

1.06.2015 после начисления 1%: $28054,136(1+0,01) = 28334,7736 <$
 275000 , следовательно закрывает кредит.



Максим хочет взять в кредит 1,5 млн рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10% годовых. На какое минимальное количество лет может Максим взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 350 тысяч рублей?

Решение.


При начислении процентов оставшаяся сумма долга умножается на коэффициент $1 + 0,01 \cdot 10 = 1,1$. В конце первого года долг составит $1500000 \cdot 1,1 = 1650000$ рублей. После выплаты 350 тысяч рублей останется долг 1350000 рублей. И так далее. Составим таблицу выплат.

Год	Долг банку (руб.)	Остаток после транша (руб.)
0	1500000	—
1	1650000	1300000
2	1430000	1080000
3	1188000	838000
4	921800	571800
5	628980	278980
6	306878	0



Значит, Максим погасит кредит за 6 лет.

Ответ: 6.



19. Клиент взял 15 960 000 рублей в кредит под 30% годовых. По истечении каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 30%), затем клиент переводит в банк определённую сумму ежегодного платежа. Какой должна быть сумма ежегодного платежа, чтобы клиент выплатил долг тремя равными ежегодными платежами?

№ 2

Пусть S -сумма кредита; $a\%$ - годовые; x – сумма выплаты
 $b = (1+0,01a)$ - коэффициент (31 декабря каждого года оставшаяся сумма долга умножается на коэффициент b). Тогда

I

$$S_1 = Sb - x \quad \text{сумма долга после первой выплаты}$$

II


$$S_2 = S_1 b - x = (Sb - x) \cdot b - x = Sb^2 - bx - x$$

III

$$S_3 = S_2 b - x = (Sb^2 - bx - x) \cdot b - x = Sb^3 - b^2 x - bx - x$$

IV

$$S_4 = S_3 b - x = (Sb^3 - b^2 x - bx - x) \cdot b - x = Sb^4 - b^3 x - b^2 x - bx - x$$
$$Sb^4 - x \cdot (b^3 + b^2 + b + 1) = Sb^4 - x \cdot (b + 1) \cdot (b^2 + 1)$$



19. Клиент взял 15 960 000 рублей в кредит под 30% годовых. По истечении каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 30%), затем клиент переводит в банк определённую сумму ежегодного платежа. Какой должна быть сумма ежегодного платежа, чтобы клиент выплатил долг тремя равными ежегодными платежами?

Последняя сумма выплаты после третьей выплаты

$$S_3 = S_2 b - x = (Sb^2 - bx - x) \cdot b - x = Sb^3 - b^2 x - bx - x$$

$$Sb^3 = x \cdot (b^2 + b + 1)$$

$$x = \frac{Sb^3}{b^2 + b + 1}$$

$$b = 1 + 0,01 \cdot 30 = 1,3$$

$$X = \frac{15960000 \cdot 1,3^3}{1,3^2 + 1,3 + 1} = \frac{35064120}{3,99} = 8788000$$

Ответ: 8 788 000 рублей



31 декабря 2014 года Алексей взял в банке 6902000 рублей в кредит под 12,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая – 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга, затем Алексей переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X, чтобы Алексей выплатил долг четырьмя равными платежами (то есть за 4 года)?



Решение.

Пусть $S = 6902000$ р., $b=1,125$ (то есть 31 декабря каждого года оставшаяся сумма долга умножается на коэффициент b). Тогда:

31.12.2015 год: $(Sb - X)$ –(сумма долга после первой выплаты)

31.12.2016 год: $S_2 = S_1b - x = (Sb - x) \cdot b - x = Sb^2 - bx - x$ сумма долга после второй выплаты

31.12.2017 год: $S_3 = S_2b - x = (Sb^2 - bx - x) \cdot b - x = Sb^3 - b^2x - bx - x$ -
сумма долга после третьей выплаты

31.12.2018 год:
 $S_4 = S_3b - x = (Sb^3 - b^2x - bx - x) \cdot b - x = Sb^4 - b^3x - b^2x - bx - x$
- последняя сумма выплаты после четвертой выплаты

31 декабря 2014 года Алексей взял в банке 6902000 рублей в кредит под 12,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая – 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга, затем Алексей переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X, чтобы Алексей выплатил долг четырьмя равными платежами (то есть за 4 года)?

$$Sb^4 - xb^3 - xb^2 - xb - x = 0$$

$$Sb^4 - x \cdot (b^3 + b^2 + b + 1) = Sb^4 - x \cdot (b + 1) \cdot (b^2 + 1)$$

$$x = \frac{Sb^4}{(b + 1) \cdot (b^2 + 1)} \quad 1,125 = \frac{9}{8}$$

$$x = \frac{6902000 \cdot \frac{81}{64} \cdot \frac{81}{64}}{\left(\frac{9}{8} + 1\right) \cdot \left(\frac{81}{64} + 1\right)} = \frac{6902000 \cdot 81 \cdot 81 \cdot 64 \cdot 8}{64 \cdot 64 \cdot 17 \cdot 145} = 350 \cdot 81 \cdot 81 = 2296350$$

Ответ: 2 296 350





№ 2.

31 декабря 2014 года Олег взял в банке некоторую сумму в кредит под некоторый процент годовых. Схема выплаты кредита следующая – 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на $a\%$), затем Олег переводит очередной транш. Если бы он будет платить каждый год по 328 050 рублей, то выплатит долг за 4 года. Если по 587 250 рублей, то за 2 года. Под какой процент Олег взял деньги в банке?

№3

Решение.

Пусть S – сумма кредита, a – годовой %, $b=1+0,01a$, $X_1=328050$ р., $X_2=587250$ р.

Рассчитаем кредит на 4 года:

31.12.2015: $(Sb - X)$

31.12.2016: $(Sb - X)b - X$

31.12.2017: $(S^2 - xb - x)b - x = Sb^3 - xb^2 - xb - x$

31.12.2018: $(Sb^3 - xb^2 - xb - x)b - x = 0$





№ 2.

31 декабря 2014 года Олег взял в банке некоторую сумму в кредит под некоторый процент годовых. Схема выплаты кредита следующая – 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на $a\%$), затем Олег переводит очередной транш. Если бы он будет платить каждый год по 328 050 рублей, то выплатит долг за 4 года. Если по 587 250 рублей, то за 2 года. Под какой процент Олег взял деньги в банке?

$$Sb^4 = x(b^3 + b^2 + b + 1) \quad S = \frac{X(b^3 + b^2 + b + 1)}{b^4} \quad S = \frac{328050(b^3 + b^2 + b + 1)}{b^4}$$

Рассчитаем кредит на 2 года:

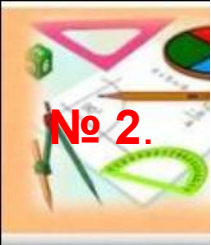
31.12.2015: $(Sb - X)$ **31.12.2016:** $(Sb - X)b - X = 0$

$$Sb^2 - Xb - X = 0$$

$$Sb^2 = Xb + X$$

$$S = \frac{X(b + 1)}{b^2}$$

$$S = \frac{587250(b + 1)}{b^2}$$



31 декабря 2014 года Олег взял в банке некоторую сумму в кредит под некоторый процент годовых. Схема выплаты кредита следующая – 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на $a\%$), затем Олег переводит очередной транш. Если бы он будет платить каждый год по 328 050 рублей, то выплатит долг за 4 года. Если по 587 250 рублей, то за 2 года. Под какой процент Олег взял деньги в банке?

Так как сумма кредита одна и та же, то приравняем полученные равенства.

$$\frac{328050(b^3 + b^2 + b + 1)}{b^4} = \frac{587250(b + 1)}{b^2} \cdot b^4$$

$$328050(b^3 + b^2 + b + 1) = 587250(b^3 + b^2)$$

$$(b + 1)(b^2 + 1) \cdot 6561 = 11745b^2(b + 1)$$

$$6561b^2 + 6561 = 11745b^2$$

$$5184b^2 = 6561$$

$$b^2 = \frac{729}{576}$$

$$b = \frac{27}{24} = \frac{9}{8}$$

$$b = 1 + 0,01a$$

$$\frac{9}{8} = 1 + 0,01a$$

$$0,01a = \frac{1}{8}$$

$$a = 0,125 : 0,01$$

$$a = 12,5$$

Ответ: 12,5%



31 декабря 2014 года Фёдор взял в банке 6951000 рублей в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Фёдор переводит в банк платёж. Весь долг Фёдор выплатил за 3 равных платежа. На сколько рублей меньше он бы отдал банку, если бы смог выплатить долг за 2 равных платежа?

№4

Рассчитаем кредит на 2 года:

$$Sb^2 - Xb - X = 0$$

$$Sb^2 = Xb + X$$

$$x = \frac{Sb^2}{b+1}$$

$$x = \frac{6951000 \cdot 1,21}{2,1} = 4005100$$

$$4005100 \cdot 2 = 8010200$$

$$8385300 - 8010200 = 375100$$

Ответ: на 375100 рублей


**Последняя сумма выплаты
после третьей выплаты**

$$Sb^3 = x \cdot (b^2 + b + 1)$$

$$x = \frac{Sb^3}{b^2 + b + 1}$$

$$X = \frac{6951000 \cdot 1,1^3}{1,1^2 + 1,1 + 1} = \frac{6951000 \cdot 1,331}{3,31} = 2795100$$

$$2795100 \cdot 3 = 8385300$$



В банк помещён вклад 64 000 рублей под 25% годовых. В конце каждого из первых трёх лет (после начисления процентов) вкладчик дополнительно положил на счёт одну и ту же фиксированную сумму. К концу четвёртого года после начисления процентов оказалось, что он составляет 385 000 рублей. Какую сумму (в рублях) ежегодно добавлял вкладчик?

№5

Решение. Пусть $S=64\ 000$ руб, $b=1+0,25=1,25=5/4$

X - фиксированная сумма.


1 год: $S_1 = Sb+x$

2 год: $S_2 = S_1b + x = (Sb + x) \cdot b + x = Sb^2 + bx + x$

3 год: $S_3 = S_2b + x = Sb^3 + b^2x + bx + x$

4 год: $S_4 = S_3b = Sb^4 + b^3x + b^2x + bx$

Решим полученное уравнение.



В банк помещён вклад 64 000 рублей под 25% годовых. В конце каждого из первых трёх лет (после начисления процентов) вкладчик дополнительно положил на счёт одну и ту же фиксированную сумму. К концу четвёртого года после начисления процентов оказалось, что он составляет 385 000 рублей. Какую сумму (в рублях) ежегодно добавлял вкладчик?

$$Sb^4 + x(b^3 + b^2 + b) = 385000$$

$$x = \frac{385000 - 64000 \cdot \frac{625}{256}}{\frac{125}{64} + \frac{25}{16} + \frac{5}{4}} = \frac{228750}{\frac{305}{64}} = 48000$$



Ответ. 48 000



31 декабря 2014 года Георгий взял в банке 1 млн рублей в кредит. Схема выплаты такая - 31 декабря следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на $a\%$), затем Георгий переводит очередной транш. Георгий выплатил кредит за два транша, переводя в первый раз 570 тыс. рублей, во второй 599,4 тыс. рублей. Под какой процент банк выдал кредит Георгию?

№6

Решение.

Пусть S – сумма кредита, a – годовой %, $b=1+0,01a$, $X_1=570000$ р., $X_2=599400$ р.

$$S_2 = S_1 b - x_2 = (Sb - x_1) \cdot b - x_2 = Sb^2 - bx_1 - x_2$$

$$1000000b^2 - 570000b - 599400 = 0$$

$$5000b^2 - 2850b - 2997 = 0$$

$$D = 8122500 + 59940000 = 68062500$$

$$b = \frac{2850 + 8250}{10000}$$

$$b = 1,1$$

$$b = 1+0,01a$$

$$1,11 = 1+0,01a$$

$$a = 0,11/0,01 = 11$$

Ответ: 11%

По прогнозу экспертов, цены на квартиры в Москве через год упадут: в рублях на 20%, в евро на 40%. А в Сочи цены в рублях упадут на 10%. На сколько процентов упадут цены в Сочи в евро?

- В данной задаче есть два момента времени - настоящее и будущее.

Пусть одна и та же квартира стоит x рублей, она же - y евро

$$x \text{ рублей} = y \text{ евро}$$

Но это сейчас. Но в будущем квартира будет стоить $0,8x$ рублей. Эта же квартира подешевеет и в евро и будет стоить $0,6y$ евро.

$$0,8x \text{ рублей} = 0,6y \text{ евро}$$

$$x \text{ рублей} = 0,75y \text{ евро}$$

Иначе говоря, в будущем соотношение между рублём и евро такое:

$$0,8x = 0,6y$$

$$8x = 6y$$

$$4x = 3y$$



По прогнозу экспертов, цены на квартиры в Москве через год упадут: в рублях на 20%, в евро на 40%. А в Сочи цены в рублях упадут на 10%. На сколько процентов упадут цены в Сочи в евро?

А что же требуется узнать в задаче? Цену в будущем на *нечто* в евро, если известно, что это *нечто* подешевеет и будет стоить $0,9x$ рублей.

$$0,9x \text{ рублей} = 0,675y \text{ евро}$$

Будущая евровая цена будет составлять 67,5% от цены настоящей.

$$y - 0,675y = 0,325y$$

Это значит, что цена в евро уменьшится на 32,5%.

Ответ: на 32,5%



Брокерская фирма приобрела два пакета акций, а затем продала их за общую сумму 7 миллионов 680 тысяч рублей, получив при этом 28% прибыли. За какую сумму фирма приобрела каждый из пакетов акций, если при продаже первого пакета прибыль составила 40%, а при продаже второго – 20%?

Решение:

Пусть фирма приобрела первый пакет акций за x рублей, а второй – за y рублей.

при продаже первого пакета прибыль составила 40%, то есть акции были проданы за $1,4x$ руб.

при продаже второго – 20%, то есть акции были проданы за $1,2y$ руб.

Фирма продала их за общую сумму 7 миллионов 680 тысяч рублей, то есть

$$1,4x + 1,2y = 7680000$$

получив при этом 28% прибыли, следовательно руб.

$$1,28(x + y) = 7680000$$

$$\begin{cases} 1,4x + 1,2y = 7680000 \\ 1,28(x + y) = 7680000 \end{cases}$$

Получили систему уравнений:

Вычтем из первого уравнения второе. Получим:

$$\begin{aligned} 0,12x - 0,08y &= 0 \\ 12x &= 8y \\ y &= \frac{3}{2}x \end{aligned}$$

Подставим выражение для y в первое уравнение системы. Получим:

$$1,4x + 1,2\left(\frac{3}{2}x\right) = 7680000 \quad \begin{aligned} X &= 2400000 \\ Y &= 3600000 \end{aligned}$$

Ответ: 2400000, 3600000



Литерату

- **Интернет – сайты:**

<http://ru.wikipedia.org>

- [Открытый банк заданий ЕГЭ по математике](#)
- [Образовательный портал для подготовки к экзаменам «РЕШУ ЕГЭ, МАТЕМАТИКА»](#)
- **ЕГЭ 2015. Математика. Типовые тестовые задания / под ред. А.Л.Семенова, и.В.Ященко. – М.: Издательство «Экзамен»**