Применение производной при исследовании функций

Доказать, что функция монотонна на заданном промежутке:

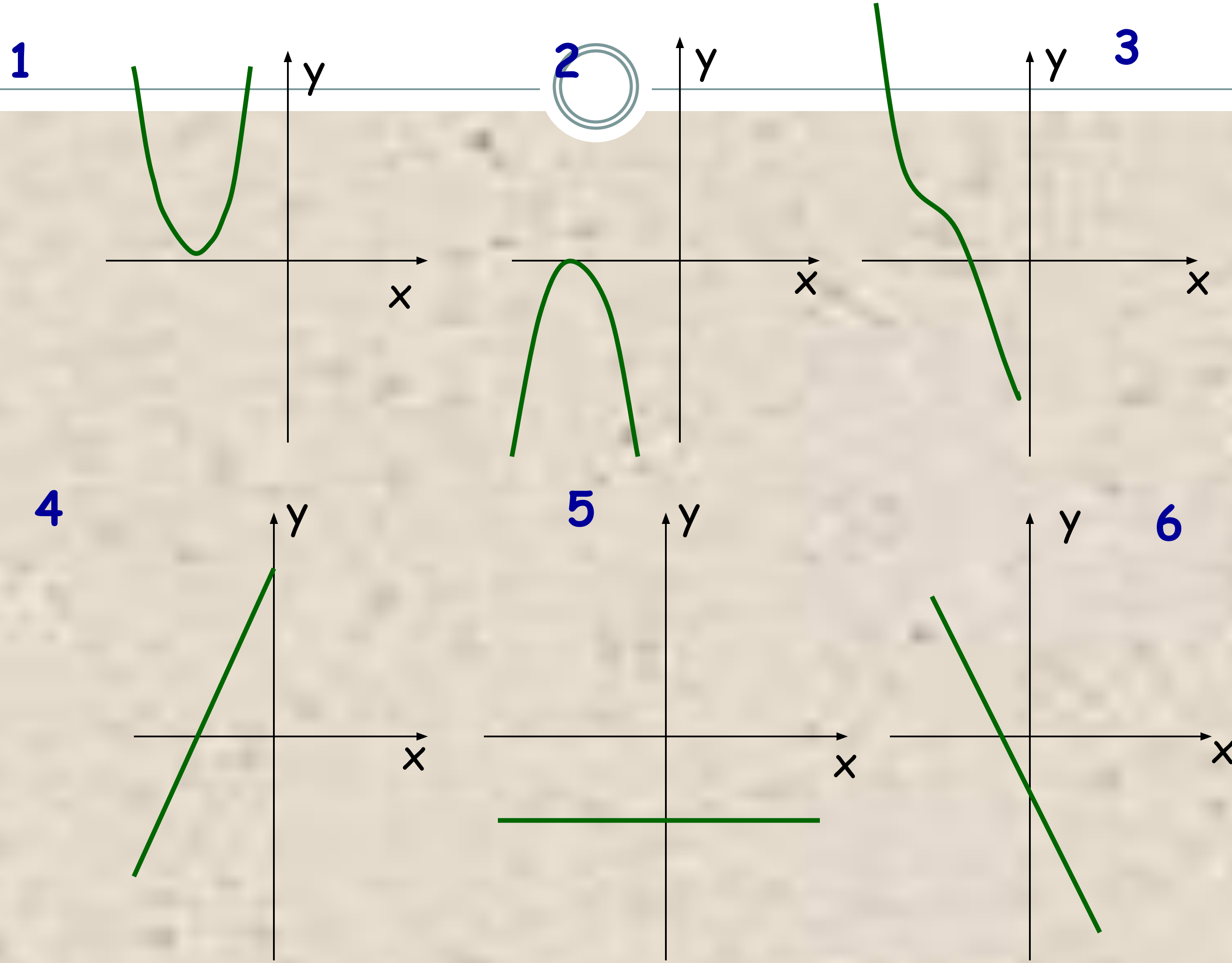
$$y = 4x - 2008;\ \ \textit{если}\ x \in \Re;$$

$$y = -2x + \sin x;\ \ \textit{если}\ x \in \Re;$$

$$y = x^5 + x^3 - 448;\ \textit{если}\ x \in \Re.$$

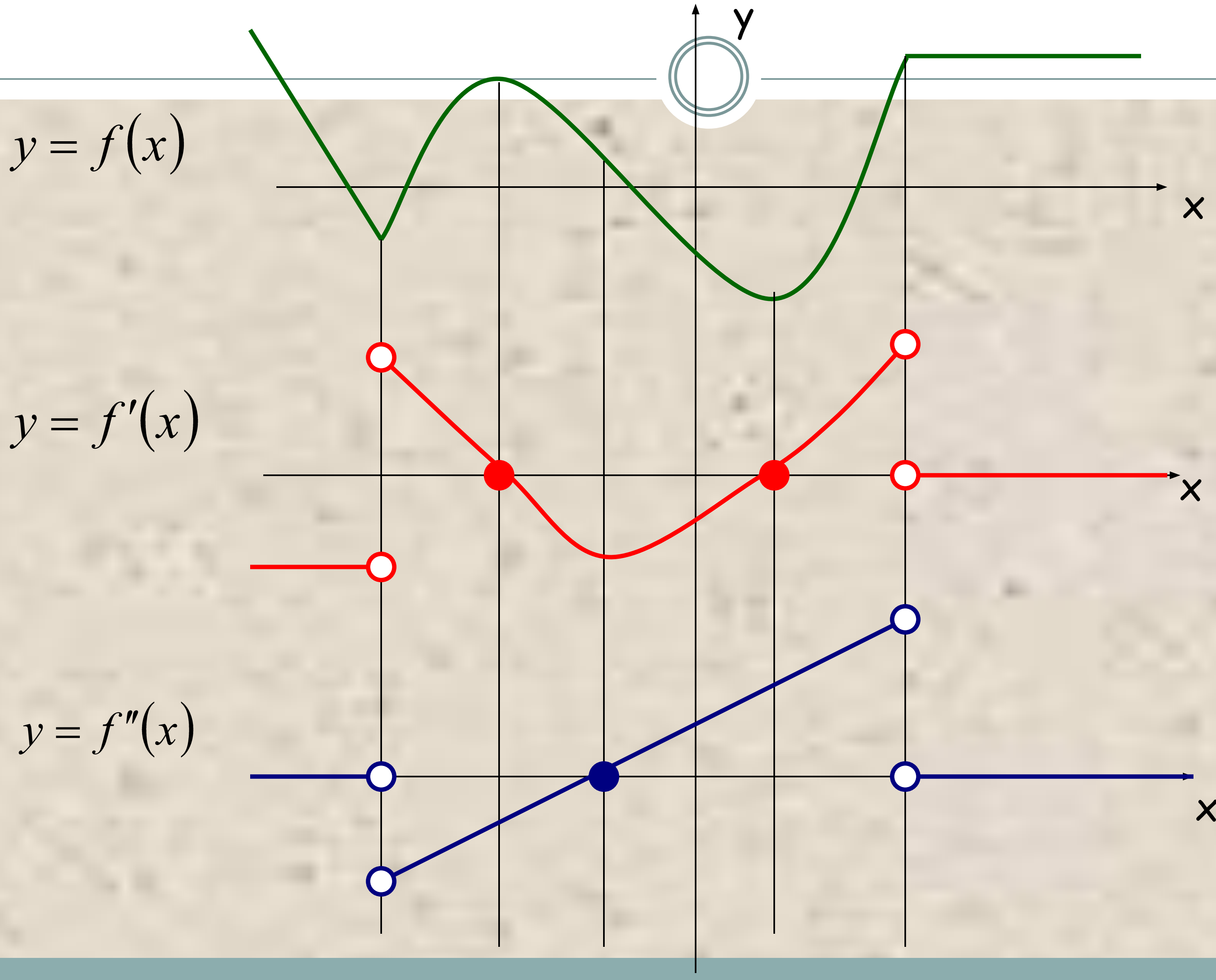
Дана непрерывная на $\Re$ функция. Используя график производной этой функции, определите, имеет ли функция точки экстремума.

Найти пары $\left(f(x); f'(x)\right)$.



(1 ; 4); (3; 2); (6; 5)

Нарисовать эскизы графиков $f'(x)$ и $f''(x)$

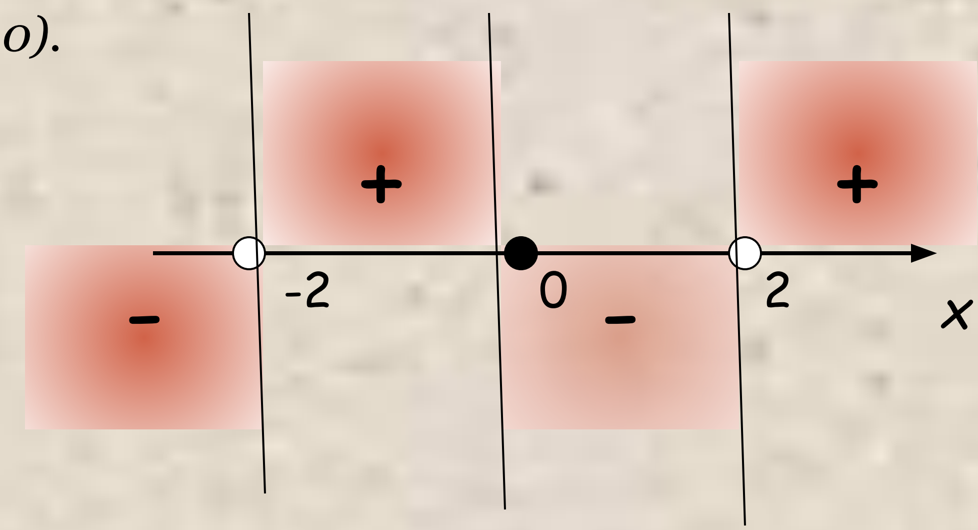


Исследовать функцию и построить её график

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$$

$$D(y) = (-\infty;\ -2) \cup (-2;\ 2) \cup (2;\ +\infty);$$

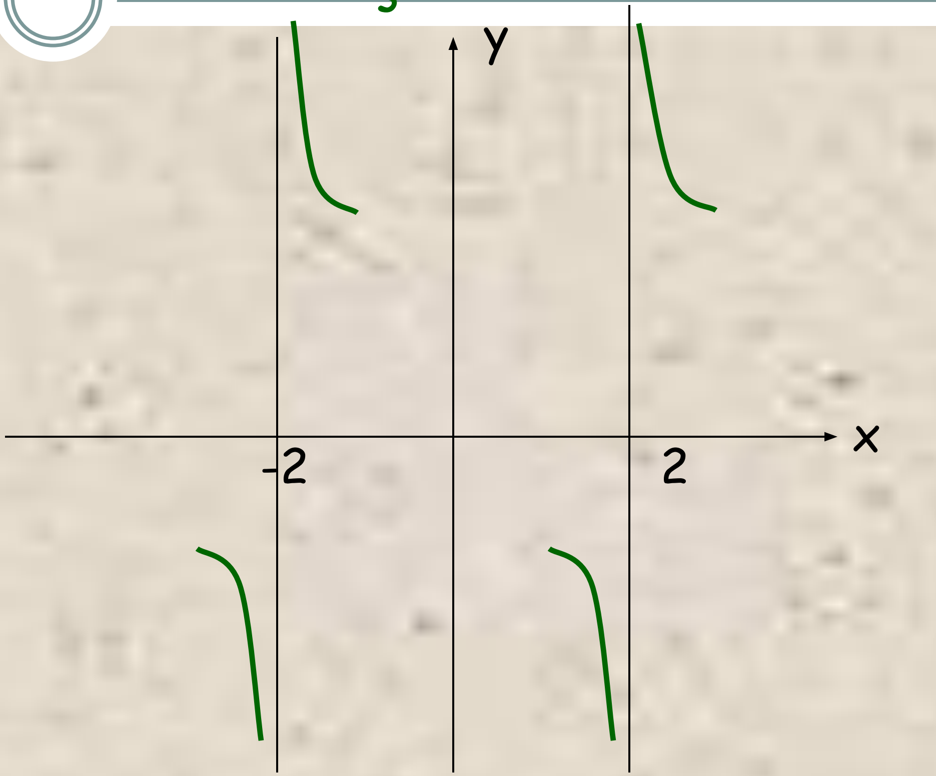
2. *Функция нечётная, график симметричен относительно начала отсчёта.*
3. *Точки пересечения с осями: с Oy: (0; 0); с Ox: (0; 0).*
4. *Промежутки знакопостоянства функции:*



5. Вертикальные асимптоты:

$x = 2$ и $x = -2$, *так как*

эскиз



$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3}{x^2-4}=\left|\frac{8}{0}\right|=\infty,$$

$$\lim_{x\to -2_-}\frac{x^3}{x^2-4}=-\infty;\quad \lim_{x\to -2_+}\frac{x^3}{x^2-4}=+\infty.$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3}{x^2-4}=\left|\frac{-8}{0}\right|=\infty.$$

$$\lim_{x\to 2_-}\frac{x^3}{x^2-4}=-\infty;\quad \lim_{x\to 2_+}\frac{x^3}{x^2-4}=+\infty.$$

6. Наклонные асимптоты

эскиз

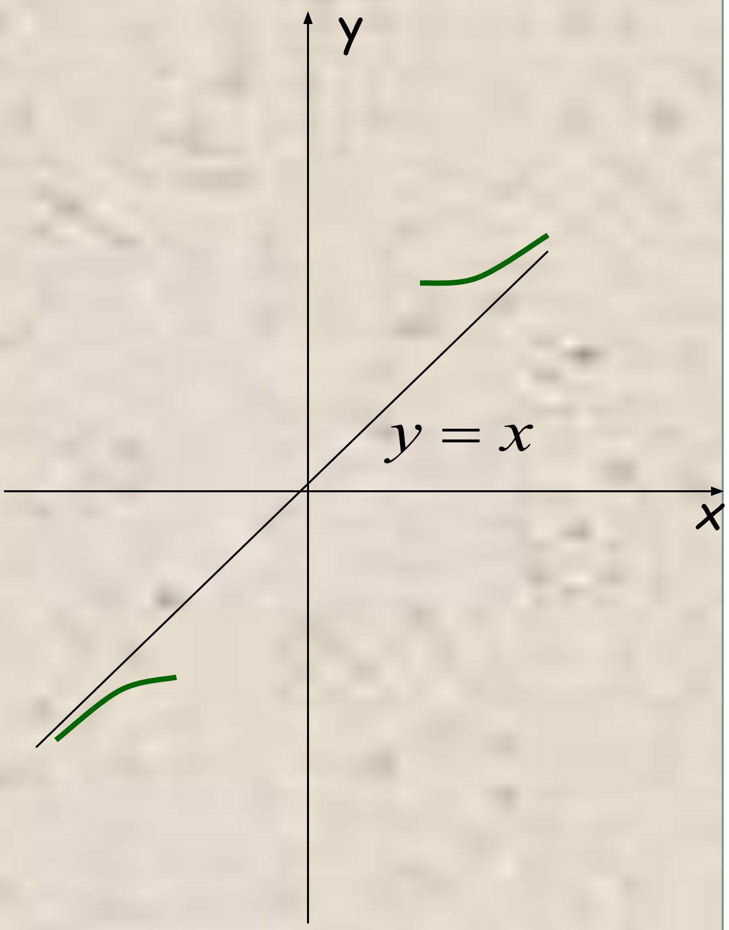
$$y = x$$

$$k = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{\left(x^2-4\right)x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{\left(x^2-4\right)x} = 1.$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-x\right) = 0.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-4}-x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-x^3+4x}{x^2-4} = \lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{x^2-4} = 0_+;$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{4x}{x^2-4} = 0_-.$$



7. Исследование на монотонность и наличие точек экстремума.

$$f'(x)=\frac{x^4-12x^2}{\left(x^2-4\right)^2};$$

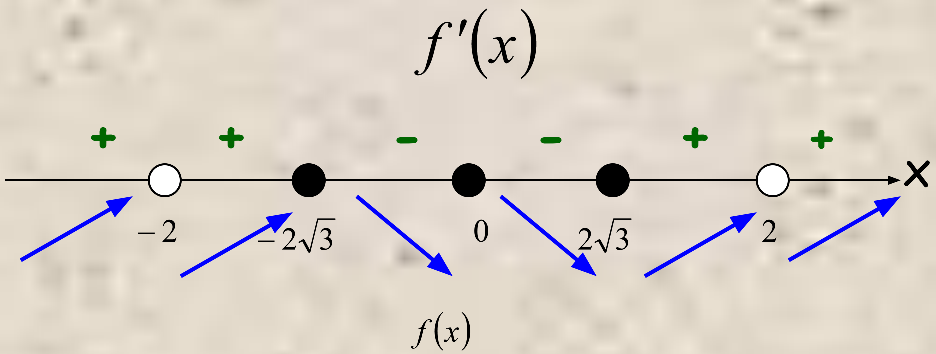
$f'(x)=0$, *если* $x^4-12x^2=0$

$x^2=0; \quad x=\pm 2\sqrt{3}.$

$f'(x)$ – *не существует, если*

$\left(x^2-4\right)^2=0,$

$x=2; \;\; x=-2.$



$x=-2\sqrt{3}$ – *точка локального максимума*

$f\left(-2\sqrt{3}\right)=3\sqrt{3}$

$x=2\sqrt{3}$ – *точка локального минимума*

$f\left(2\sqrt{3}\right)=-3\sqrt{3}$

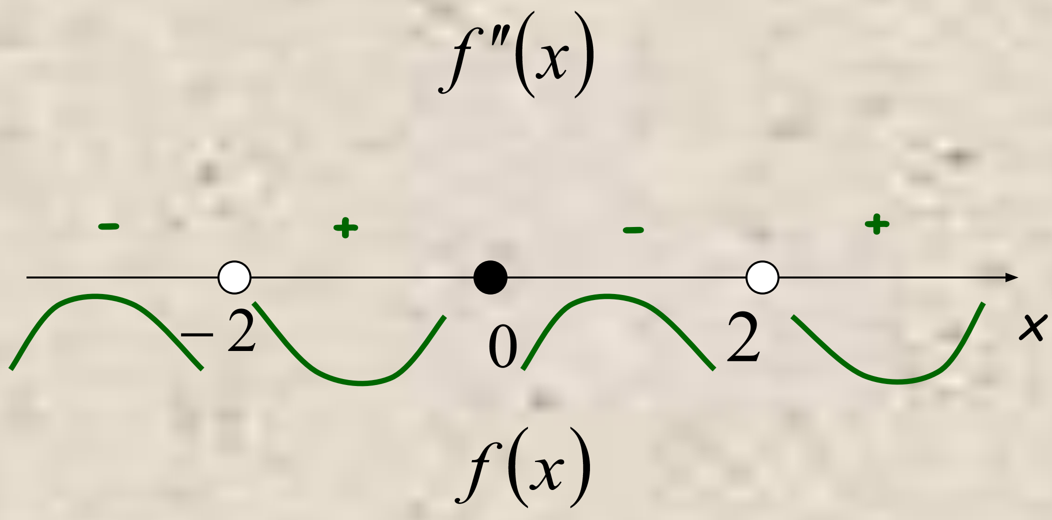
Исследование на направление выпуклостей и наличие точек перегиба.

$$f''(x)=\frac{8x\left(x^2+12\right)}{\left(x^2-4\right)^3};$$

$$f''(x)=0,\ \text{если}\ x=0.$$

$f''(x)$ – не существует, если

$$x=-2,\ \ x=2$$



$\left(0;\ f(0)\right)$ – *точка перегиба*

ЭСКИЗ

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$$