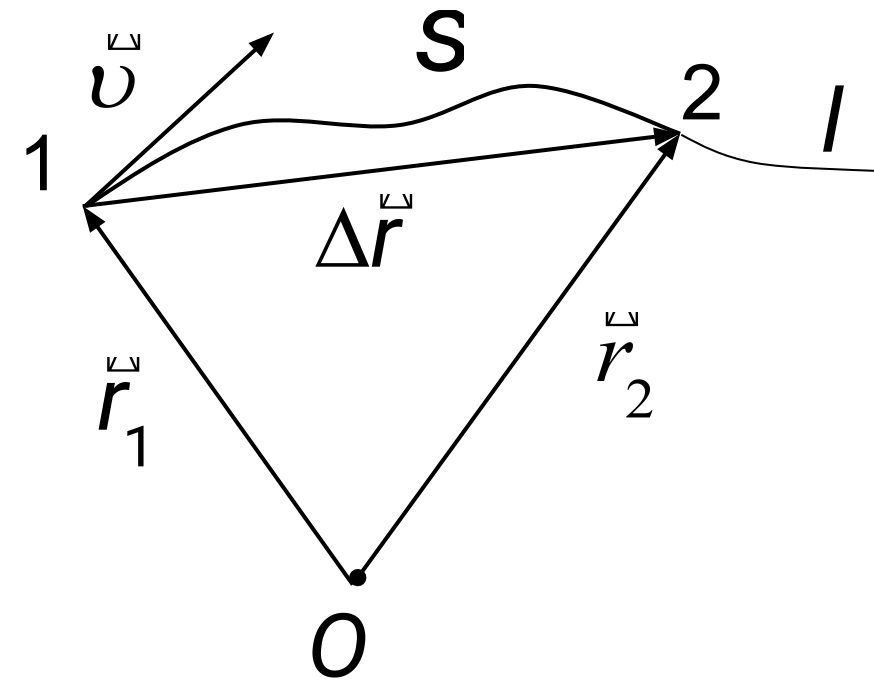


Кинематика материальной точки



Пусть за интервал времени от t_1 до t_2 материальная точка переместилась из положения 1 в положение 2. O – начало отсчёта.

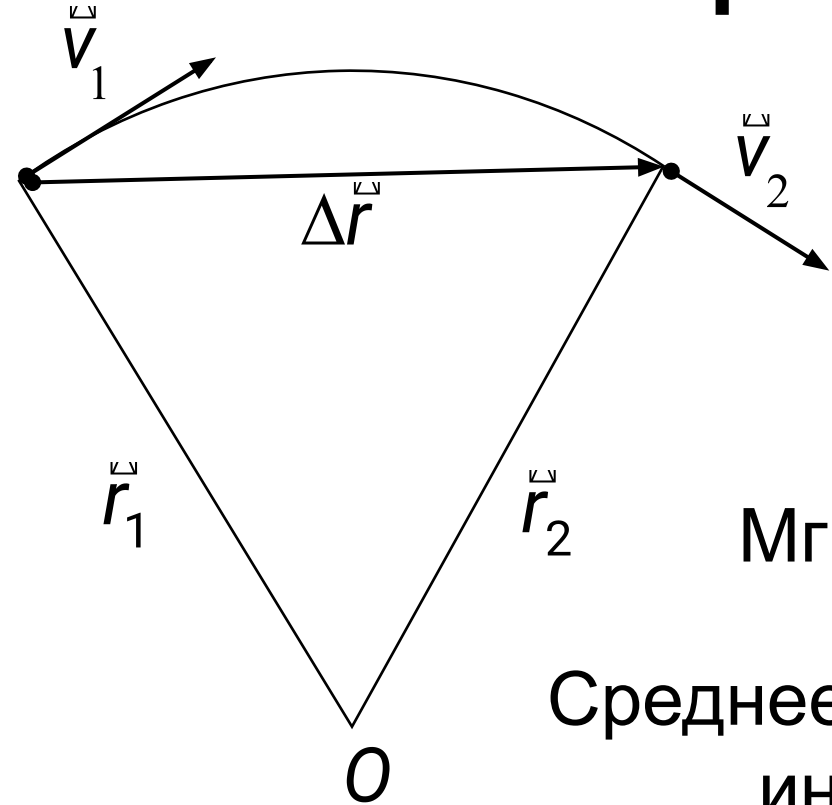
\vec{r}_1 и \vec{r}_2 – радиусы-векторы точки в моменты времени t_1 и t_2 соответственно.

l – траектория материальной точки.

S – путь, пройденный материальной точкой за интервал времени от t_1 до t_2 .

$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ перемещение материальной точки за интервал времени от t_1 до t_2 .

Линейная скорость материальной точки.



Средняя скорость материальной точки в интервале времени от t_1 до t_2 :

$$\vec{v}_{cp} = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

Мгновенная скорость: $\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

Среднее ускорение материальной точки в интервале времени от t_1 до t_2 :

$$\vec{a}_{cp} = \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Мгновенное ускорение:

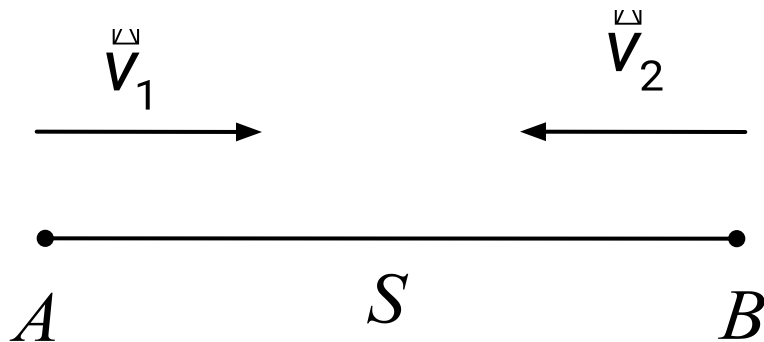
$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Средняя скорость прохождения отрезка пути.

$$v_{\text{cp}} = \frac{S}{\Delta t}$$

Средний путевой скоростью движения точки называется скалярная величина равная отношению пути, пройденного точкой за интервал времени Δt к его продолжительности.

Пример:



$$v_{\text{cp}} = \frac{2S}{\left(\frac{S}{v_1} + \frac{S}{v_2} \right)} = \frac{v_1 v_2}{v_1 + v_2}$$

Векторный способ описания

ДВИЖЕНИЯ

Скорость материальной точки:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Ускорение материальной точки:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Скорость материальной точки в момент времени

t :

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a}(t) dt,$$

где \vec{v}_0 – скорость материальной точки в момент времени

$t=0$. Радиус-вектор материальной точки в момент времени t :

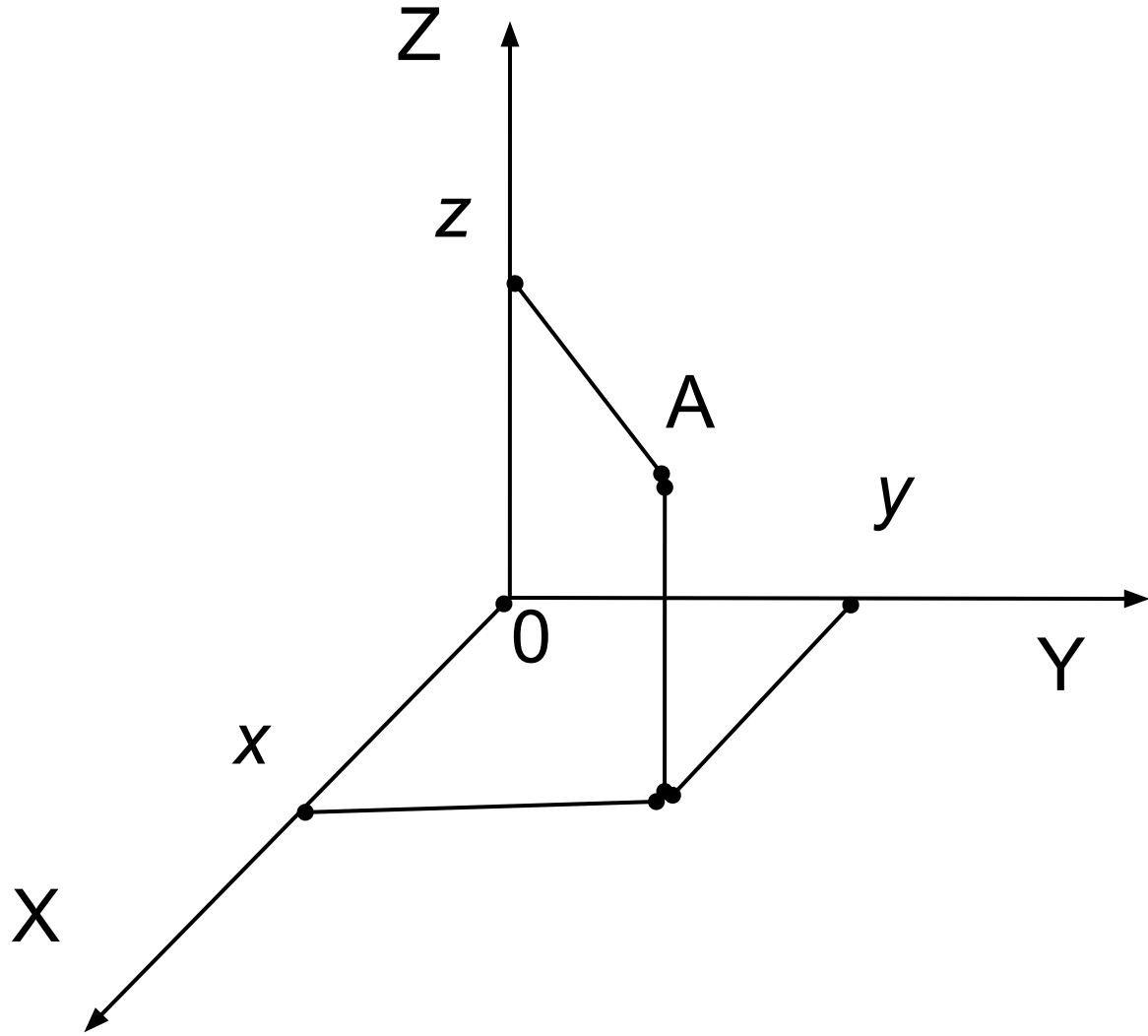
$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v}(t) dt$$

Перемещение материальной точки за интервал времени от 0 до t :

$$\Delta\vec{r} = \int_0^t \vec{v}(t) dt$$

Описание движения материальной точки в декартовой системе координат

I.



$$\begin{aligned}x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t)\end{aligned}$$

II. Скорость материальной точки

Проекции вектора скорости на оси координат:

$$v_x = \frac{dx}{dt}; \quad v_y = \frac{dy}{dt}; \quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

Модуль вектора скорости: $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

Косинусы углов, которые вектор скорости составляет с осями Ox , Oy , Oz :

$$\cos \alpha = \frac{v_x}{|\vec{v}|}; \quad \cos \beta = \frac{v_y}{|\vec{v}|}; \quad \cos \gamma = \frac{v_z}{|\vec{v}|}$$

III. Ускорение материальной точки

Проекция вектора ускорения на оси координат:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}; \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}; \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$$

Модуль вектора ускорения: $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

Косинусы углов, которые вектор ускорения составляет с осями Ox , Oy , Oz :

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}; \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}; \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$$

IV. Перемещение материальной точки за интервал времени от t_1 до t_2

Проекция вектора перемещения на оси координат:

$$\Delta r_x = x_2 - x_1$$

$$\Delta r_y = y_2 - y_1$$

$$\Delta r_z = z_2 - z_1$$

Модуль вектора
перемещения:

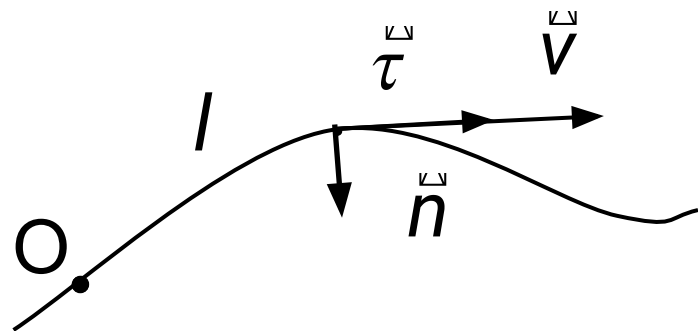
$$|\Delta r| = \sqrt{\Delta r_x^2 + \Delta r_y^2 + \Delta r_z^2}$$

Косинусы углов, которые вектор
перемещения

составляет с осями Ox , Oy , Oz :

$$\text{Cos}\alpha = \frac{\Delta r_x}{|\Delta r|}; \quad \text{Cos}\beta = \frac{\Delta r_y}{|\Delta r|}; \quad \text{Cos}\gamma = \frac{\Delta r_z}{|\Delta r|}$$

Траекторный способ описания движения



Дуговая координата: $l=l(t)$

Скорость материальной

точки:
$$\vec{v} = \frac{dl}{dt} \cdot \vec{\tau} = |\vec{v}| \cdot \vec{\tau}$$

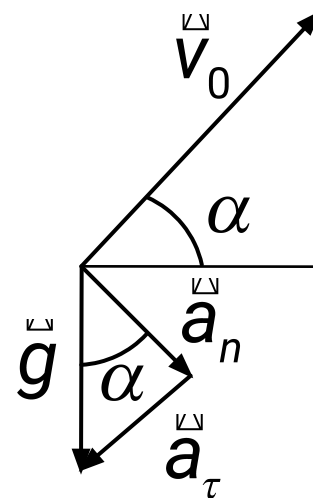
Полное ускорение материальной точки:

$$\vec{a} = \underbrace{\frac{d|\vec{v}|}{dt} \cdot \vec{\tau}}_{\vec{a}_\tau} + \underbrace{\frac{|\vec{v}| \cdot d\vec{\tau}}{dt}}_{\vec{a}_n} = \underbrace{\frac{d|\vec{v}|}{dt} \cdot \vec{\tau}}_{\vec{a}_\tau} + \underbrace{|\vec{v}|^2 \cdot \frac{1}{R_{кр}} \cdot \vec{n}}_{\vec{a}_n}$$

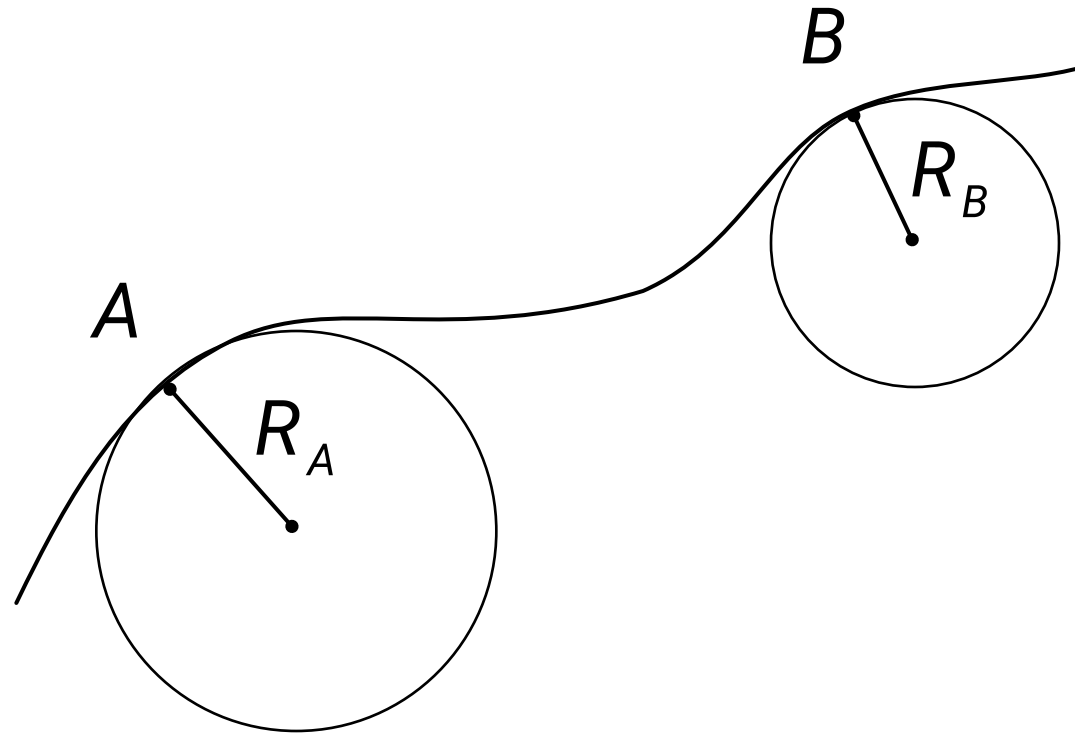
$$|\vec{a}| = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$

Если $|\vec{v}| \uparrow$, $\vec{a}_\tau \uparrow \uparrow \vec{v}$

Если $|\vec{v}| \downarrow$, $\vec{a}_\tau \uparrow \downarrow \vec{v}$



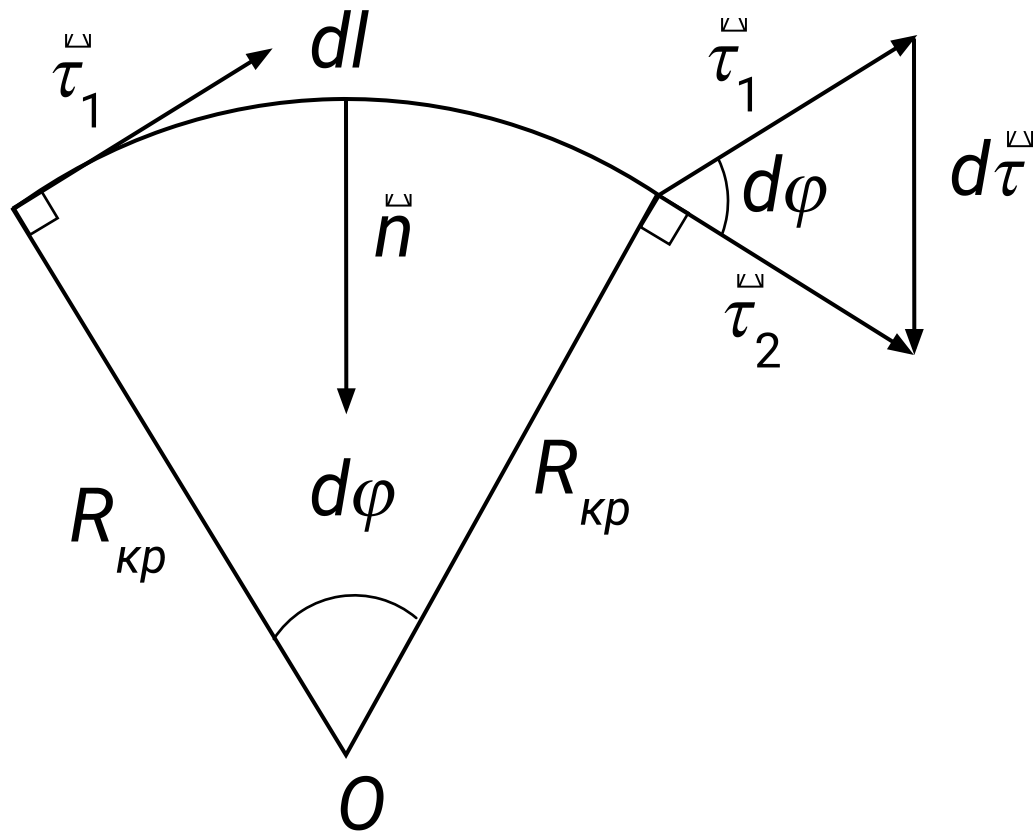
Радиус кривизны траектории



Радиус окружности, аппроксимирующей траекторию
в данной точке

Выразим нормальное ускорение материальной точки через радиус кривизны её траектории:

$$\vec{a}_n = |\vec{v}| \cdot \frac{d\tau}{dt} = |\vec{v}| \cdot \frac{d\tau}{dl} \cdot \frac{dl}{dt} = |\vec{v}|^2 \cdot \frac{d\tau}{dl}$$



$$\frac{d\tau}{dl} = \frac{|\tau_1|}{R_{кр}} \cdot \vec{n} = \frac{1}{R_{кр}} \cdot \vec{n}$$

$$\vec{a}_n = |\vec{v}|^2 \cdot \frac{1}{R_{кр}} \cdot \vec{n}$$

Движение с постоянным ускорением $\vec{a} = \text{const}$

Зависимость скорости материальной точки от времени:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t$$

\vec{v}_0 - скорость материальной точки в момент времени $t=0$.

Зависимость радиуса-вектора материальной точки от времени:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a} t^2}{2}$$

\vec{r}_0 - радиус-вектор материальной точки в момент времени $t=0$.

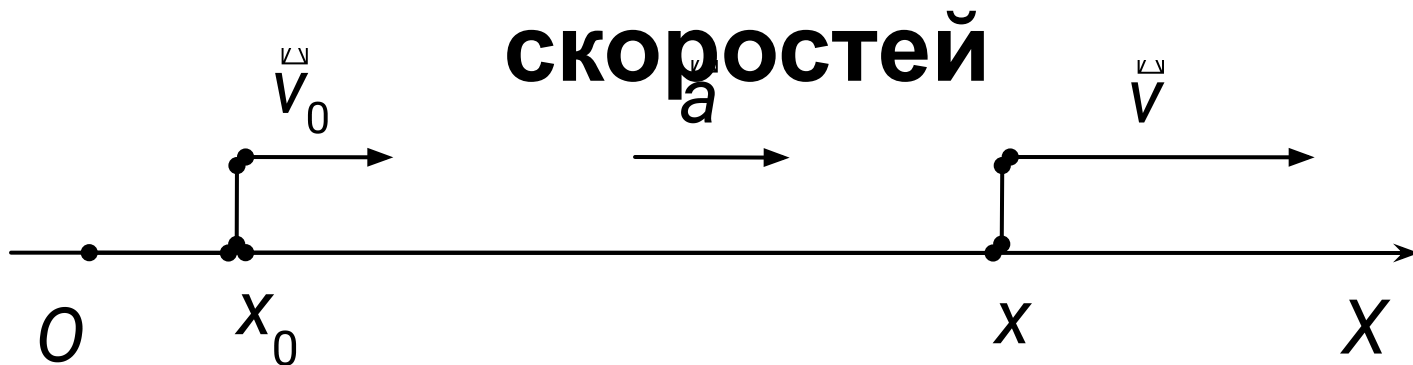
Перемещение материальной точки за интервал времени от 0 до t :

$$\Delta \vec{r}(t) = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a} t^2}{2}$$

Движение с постоянным ускорением

Формула для разности квадратов

скоростей



$$\vec{v}_x = \vec{v}_{0x} + a_x \cdot t \qquad x = x_0 + \vec{v}_{0x} \cdot t + \frac{a_x \cdot t^2}{2}$$

Приращение координаты материальной точки за интервал времени от 0 до t :

$$\Delta x = x - x_0 = \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2a_x}$$

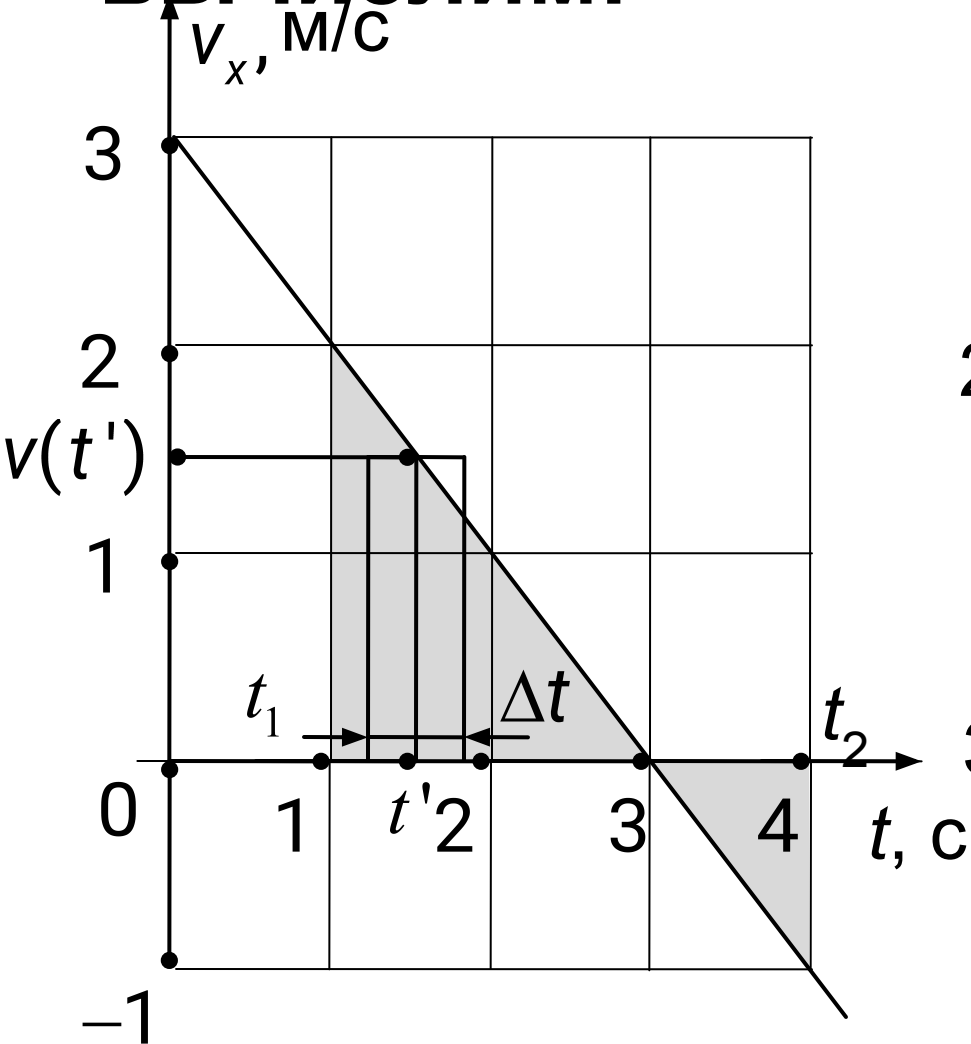
Проекция на ось Ox перемещения материальной точки за интервал времени от 0 до t :

$$(\Delta \vec{r})_x = \Delta x = \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2a_x}$$

Ох.

По графику зависимости $v_x(t)$

ВЫЧИСЛИМ:



- 1). Путь, пройденный материальной точкой за интервал времени от t_1 до t_2 :

$$S = 2 + 0,5 = 2,5 \text{ м}$$

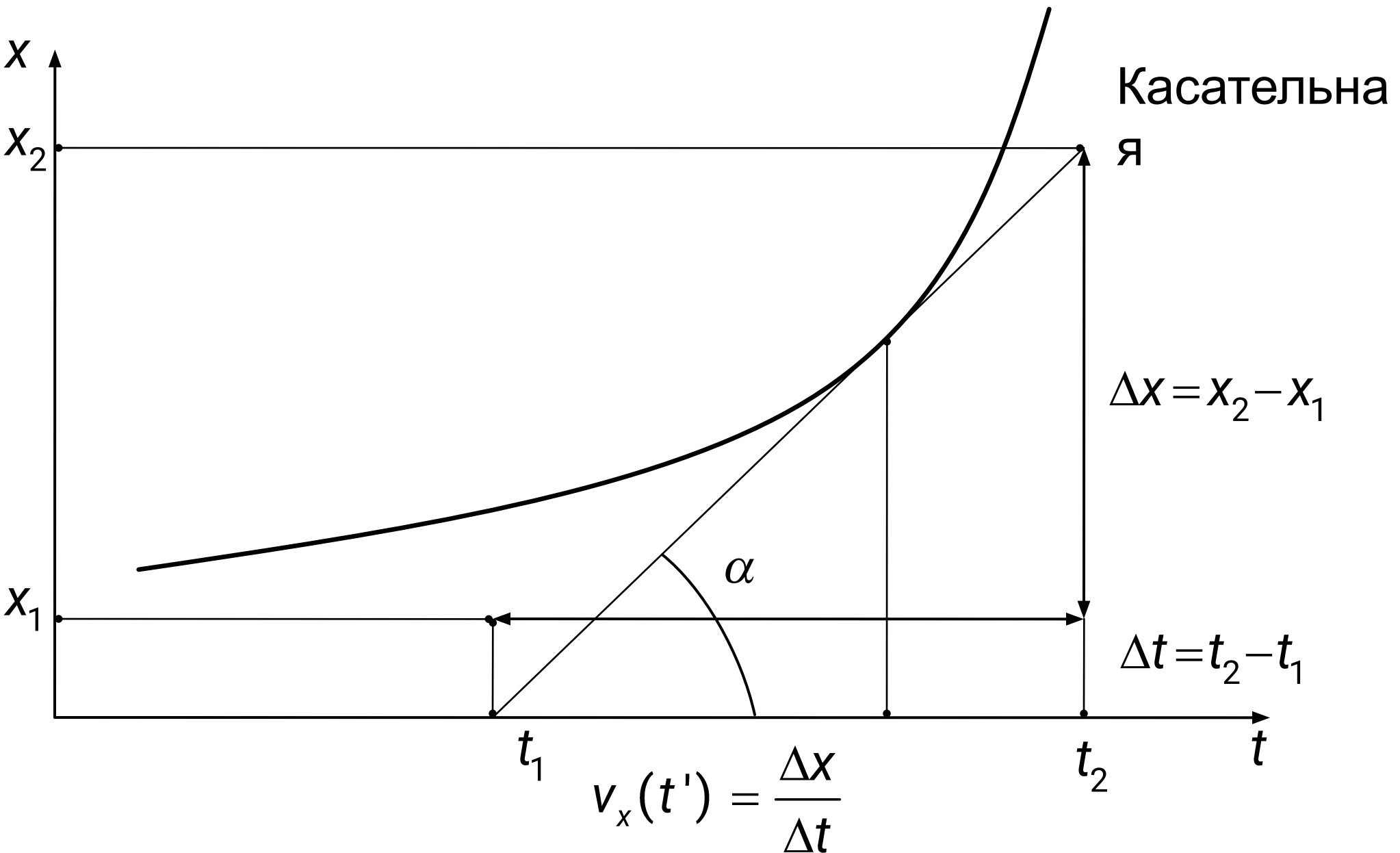
- 2). Приращение координаты материальной точки за интервал времени от t_1 до t_2 :

$$x_2 - x_1 = 2 - 0,5 = 1,5 \text{ м}$$

- 3). Проекцию перемещения материальной точки за интервал времени от t_1 до t_2 :

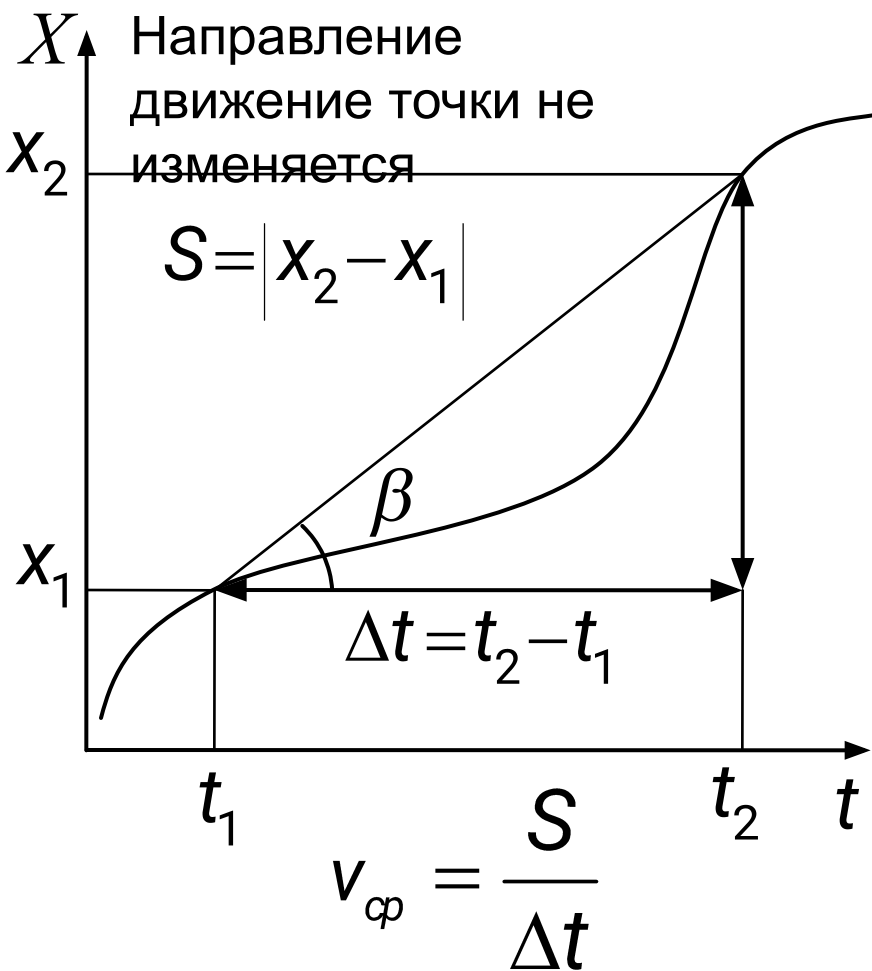
$$\left(\Delta \vec{r} \right)_x = 2 - 0,5 = 1,5 \text{ м}$$

По графику зависимости $x(t)$ вычислим $v_x(t)$



Материальная точка движется вдоль оси Ох. По графику зависимости $x(t)$

ВЫЧИСЛИМ v_{cp}

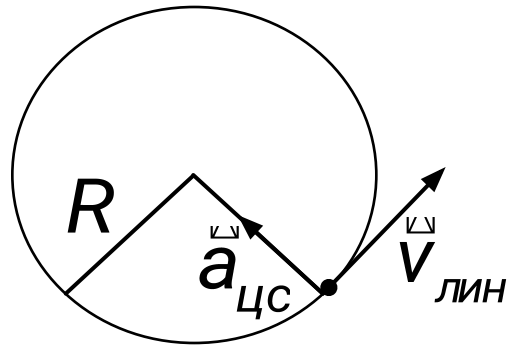


Кинематика равномерного вращения материальной точки по окружности

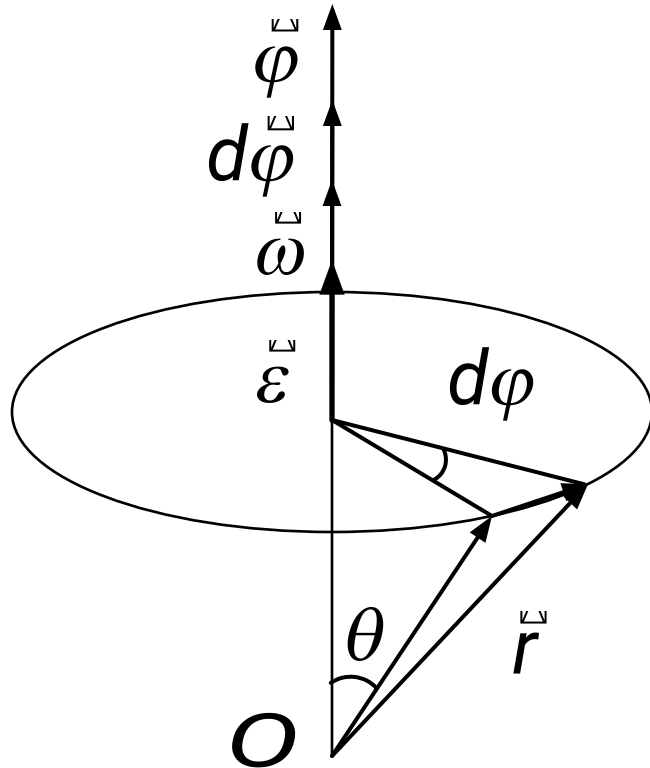
Период обращения точки: $T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi}{\omega} \quad [T] = c$

Частота обращения точки: $\nu = \frac{1}{T} \quad [\nu] = c^{-1}$

Центростремительное ускорение: $a_{цс} = \omega^2 R = \frac{v^2}{R}$



Кинематика вращения твёрдого тела вокруг неподвижной оси.



Угол поворота:
Угловая скорость:
 $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$ $[\omega] = \frac{\text{рад}}{\text{с}}$

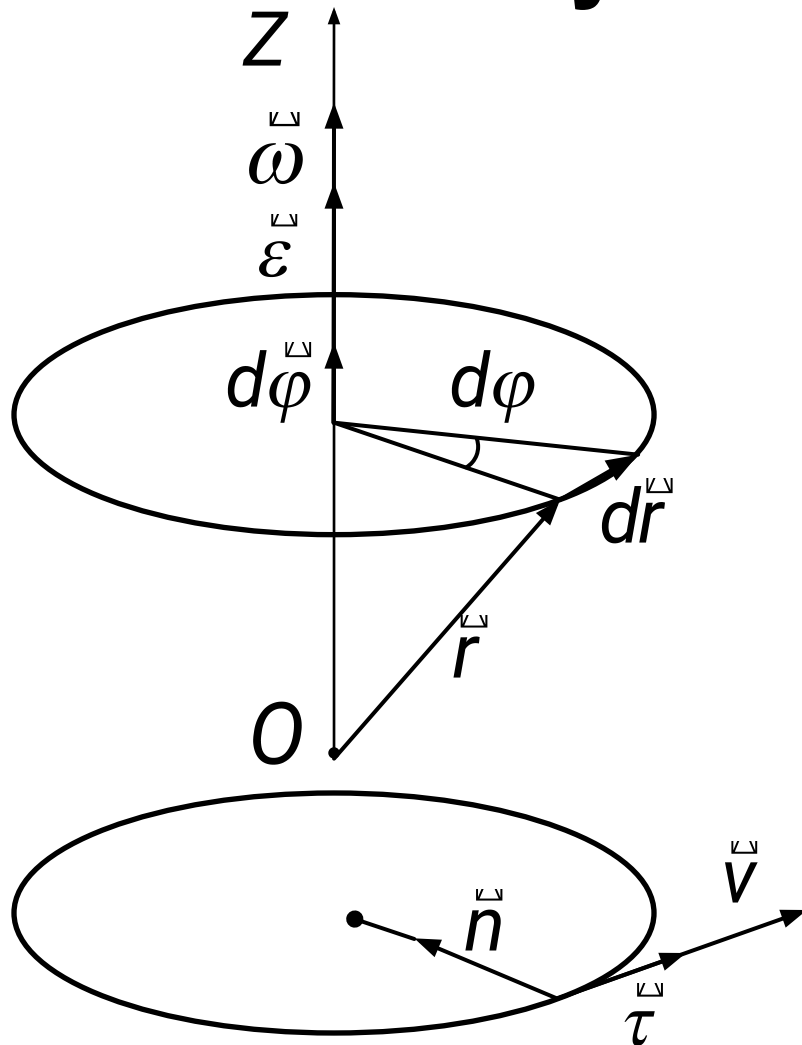
Угловое ускорение:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2} \quad [\varepsilon] = \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$$

Если: $|\vec{\omega}| \uparrow, \vec{\varepsilon} \uparrow \uparrow \vec{\omega}$, если: $|\vec{\omega}| \downarrow, \vec{\varepsilon} \uparrow \downarrow \vec{\omega}$.

Если $\varepsilon = \text{const}$, $\vec{\omega}(t) = \vec{\omega}_0 + \varepsilon \cdot t$, $\Delta\varphi(t) = \omega_0 \cdot t + \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2}$

Кинематика вращения твёрдого тела вокруг неподвижной оси. Связь линейных и угловых величин.



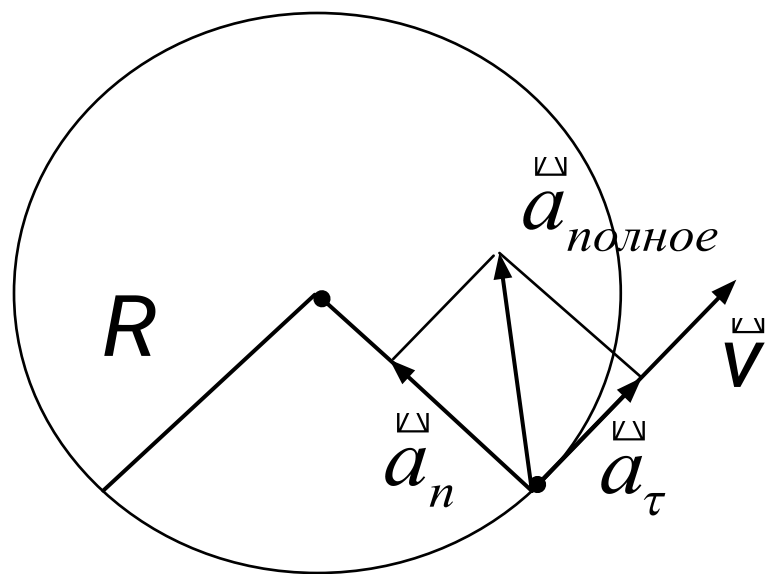
$$d\vec{r} = [d\varphi, \vec{r}] \quad :dt$$

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$$

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}, \vec{r} \right] + \left[\vec{\omega}, \frac{d\vec{r}}{dt} \right] = \\ &= \left[\vec{\varepsilon}, \vec{r} \right] + \left[\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}] \right] = \\ &= \varepsilon_z \cdot \rho \cdot \vec{\tau} + \omega^2 \cdot \rho \cdot \vec{n} = \\ &= \vec{a}_\tau + \vec{a}_n \end{aligned}$$

Пример:

Материальная точка начинает движение по окружности радиусом R с постоянным угловым ускорением ε . Вычислите угол между векторами её скорости и полного ускорения через t секунд после начала движения.

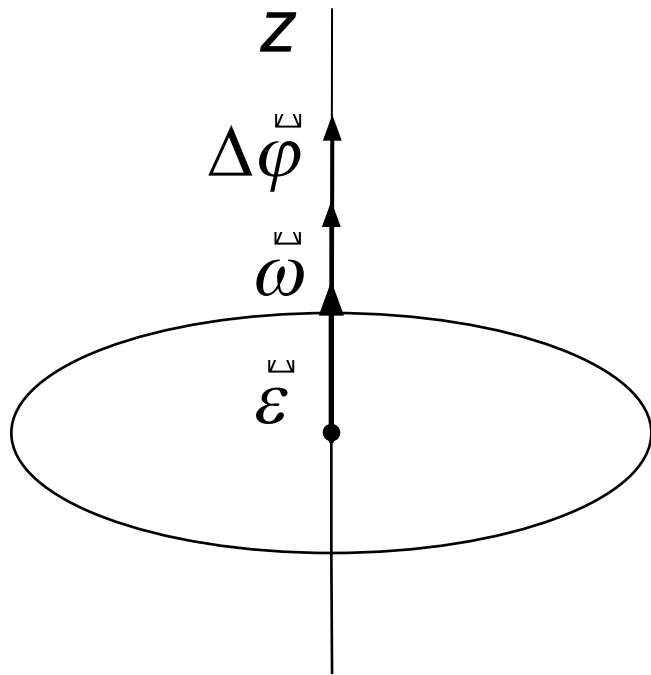


$$a_{\tau} = \varepsilon R$$

$$a_n = \omega^2 R = \varepsilon^2 t^2 R$$

$$\alpha = \arctg \frac{a_n}{a_{\tau}} = \arctg \varepsilon t^2$$

Равноускоренное движение материальной точки по окружности.



Зависимость

угловой

скорости от

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon \cdot t$$

времени:

Зависимость

приращения

угла поворота от

времени:

$$\Delta\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2}$$

$$\omega_z = \omega_{0z} + \varepsilon_z \cdot t$$

$$\Delta\varphi_z = \omega_{0z} t + \frac{\varepsilon_z \cdot t^2}{2}$$