

Уравнение Ландау-Лифшица. Тензор магнитной проницаемости и восприимчивости.

- Из каких соображений было получено уравнение Ландау-Лифшица?
- Что описывает это уравнение?
- Что мы получили с помощью этого уравнения?
- Зачем уравнение Ландау-Лифшица вводят релаксационный член?
- Что такое ферромагнитный резонанс?
- Какова структура тензора магнитной восприимчивости?
- Как зависят от частоты действительная и мнимая компоненты тензора магнитной восприимчивости?
- Какова величина диагональной компоненты тензора μ на оптических частотах?

Продольные и поперечные магнитооптические эффекты.

- Распространение электромагнитной волны в среде. Уравнения Максвелла
- Показатель преломления при продольном распространении волны
 - ✓ Гироэлектрическая, гиромагнитная и бигиротропная среды
 - ✓ Частотно независимый эффект Фарадея
- Показатель преломления при поперечном распространении волны

Тензор магнитной проницаемости

$$[\mu] = \begin{vmatrix} 1 + 4\pi \frac{\gamma\omega_o M_o}{\omega_o^2 - \omega^2} & 4\pi \frac{i\gamma\omega M_o}{\omega_o^2 - \omega^2} & 0 \\ -4\pi \frac{i\gamma\omega M_o}{\omega_o^2 - \omega^2} & 1 + 4\pi \frac{\gamma\omega_o M_o}{\omega_o^2 - \omega^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\left| 4\pi \frac{\gamma\omega_o M_o}{\omega_o^2 - \omega^2} \right| \approx \frac{4\pi \cdot 10^7 \cdot 10^{10} \cdot 10^3}{10^{28}} \approx 10^{-7}$$

Поправка к 1 в
диагональной компоненте

$$\left| 4\pi \frac{\gamma\omega M_o}{\omega_o^2 - \omega^2} \right| \approx \frac{4\pi \cdot 10^7 \cdot 10^{14} \cdot 10^3}{10^{28}} \approx 10^{-3}$$

Недиагональная
компонента

Уравнения Максвелла

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\vec{D} = [\varepsilon] \vec{E}$$

$$\text{div } \vec{D} = 0$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

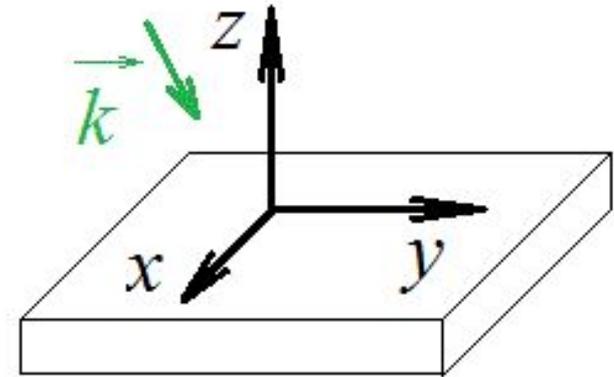
$$\vec{B} = [\mu] \vec{H}$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$[\varepsilon] = \begin{vmatrix} \varepsilon & -i\varepsilon Q & 0 \\ i\varepsilon Q & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_0 \end{vmatrix}$$

$$[\mu] = \begin{vmatrix} \mu & -i\mu Q' & 0 \\ i\mu Q' & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_0 \end{vmatrix}$$

Электромагнитная волна



$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\omega(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{c} n)}$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0 e^{i\omega(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{c} n)}$$

α , β и γ – направляющие косинусы электромагнитной волны.

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

n – комплексный показатель преломления.

Вектор \vec{D}

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\omega(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{c}n)}$$

$$\vec{D} = [\varepsilon] \cdot \vec{E} = \begin{vmatrix} \varepsilon & -i\varepsilon Q & 0 \\ i\varepsilon Q & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_x \varepsilon - E_y i\varepsilon Q \\ E_x i\varepsilon Q + E_y \varepsilon \\ E_z \varepsilon_0 \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \begin{vmatrix} i\omega(E_x \varepsilon - E_y i\varepsilon Q) \\ i\omega(E_x i\varepsilon Q + E_y \varepsilon) \\ i\omega E_z \varepsilon_0 \end{vmatrix}$$

Вектор \vec{B}

$$\vec{B} = [\mu] \cdot \vec{H} = \begin{vmatrix} \mu & -i\mu Q' & 0 \\ i\mu Q' & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_o \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} H_x \mu - H_y i\mu Q' \\ H_x i\mu Q' + H_y \mu \\ H_z \mu_o \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \begin{vmatrix} i\omega(H_x \mu - H_y i\mu Q') \\ i\omega(H_x i\mu Q' + H_y \mu) \\ i\omega H_z \mu_o \end{vmatrix}$$

$\vec{rot} \vec{H}$

$$\vec{rot} \vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right)$$

КОМПОНЕНТЫ $\text{rot} \vec{H}$

$$\vec{H} = \vec{H}_0 e^{i\omega(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{c} - n)}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} = -\frac{i\omega\beta n}{c} H_z$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} = -\frac{i\omega\gamma n}{c} H_x$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = -\frac{i\omega\alpha n}{c} H_y$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial z} = -\frac{i\omega\gamma n}{c} H_y$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = -\frac{i\omega\alpha n}{c} H_z$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial y} = -\frac{i\omega\beta n}{c} H_x$$

$$\text{rot} \vec{H} = i \left(\left(-\frac{i\omega\beta n}{c} \right) H_z - \left(-\frac{i\omega\gamma n}{c} \right) H_y \right) +$$

$$+ j \left(\left(-\frac{i\omega\gamma n}{c} \right) H_x - \left(-\frac{i\omega\alpha n}{c} \right) H_z \right) + k \left(\left(-\frac{i\omega\alpha n}{c} \right) H_y - \left(-\frac{i\omega\beta n}{c} \right) H_x \right)$$

Имеем уравнения

$$\frac{i\omega}{c}(-\beta n H_z + \gamma n H_y) = \frac{i\omega}{c}(\epsilon E_x - i\epsilon Q E_y)$$

$$\frac{i\omega}{c}(-\gamma n H_x + \alpha n H_z) = \frac{i\omega}{c}(i\epsilon Q E_x + \epsilon E_y)$$

$$\frac{i\omega}{c}(-\alpha n H_y + \beta n H_x) = \frac{i\omega}{c}\epsilon_0 E_z$$

$\vec{\text{rot}} \vec{E}$

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right)$$

КОМПОНЕНТЫ

$\vec{rot} \vec{E}$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\omega(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{c}n)}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = -\frac{i\omega\beta n}{c} E_z$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{i\omega\gamma n}{c} E_x$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{i\omega\alpha n}{c} E_y$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{i\omega\gamma n}{c} E_y$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{i\omega\alpha n}{c} E_z$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{i\omega\beta n}{c} E_x$$

$$\vec{rot} \vec{E} = i \left(\left(-\frac{i\omega\beta n}{c} \right) E_z - \left(-\frac{i\omega\gamma n}{c} \right) E_y \right) +$$

$$+ j \left(\left(-\frac{i\omega\gamma n}{c} \right) E_x - \left(-\frac{i\omega\alpha n}{c} \right) E_z \right) + k \left(\left(-\frac{i\omega\alpha n}{c} \right) E_y - \left(-\frac{i\omega\beta n}{c} \right) E_x \right)$$

Имеем уравнения

$$-\frac{i\omega}{c}(\beta n E_z - \gamma n E_y) = -\frac{i\omega}{c}(\mu H_x - i\mu Q' H_y)$$

$$-\frac{i\omega}{c}(\gamma n E_x - \alpha n E_z) = -\frac{i\omega}{c}(i\mu Q' H_x + \mu H_y)$$

$$-\frac{i\omega}{c}(\alpha n E_y - \beta n E_x) = -\frac{i\omega}{c} \mu_0 H_z$$

Система уравнений для компонент векторов \vec{E} и \vec{H}

$$\left\{ \begin{array}{l} -\beta n H_z + \gamma n H_y = \varepsilon E_x - i\varepsilon Q E_y \\ -\gamma n H_x + \alpha n H_z = i\varepsilon Q E_x + \varepsilon E_y \\ -\alpha n H_y + \beta n H_x = \varepsilon_0 E_z \\ \beta n E_z - \gamma n E_y = \mu H_x - i\mu Q' H_y \\ \gamma n E_x - \alpha n E_z = i\mu Q' H_x + \mu H_y \\ \alpha n E_y - \beta n E_x = \mu_0 H_z \end{array} \right.$$

Расположим компоненты векторов

\vec{E} по порядку

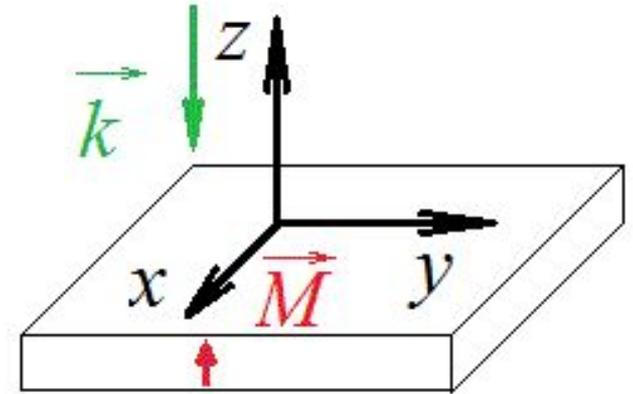
$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon E_x - i\varepsilon Q E_y - \gamma n H_y + \beta n H_z = 0 \\ i\varepsilon Q E_x + \varepsilon E_y + \gamma n H_x - \alpha n H_z = 0 \\ \varepsilon_o E_z - \beta n H_x + \alpha n H_y = 0 \\ -\gamma n E_y + \beta n E_z - \mu H_x + i\mu Q' H_y = 0 \\ \gamma n E_x - \alpha n E_z - i\mu Q' H_x - \mu H_y = 0 \\ -\beta n E_x + \alpha n E_y - \mu_o H_z = 0 \end{array} \right.$$

Однородная система имеет решение, если ее определитель равен нулю

$$\begin{vmatrix}
 \varepsilon & -i\varepsilon Q & 0 & 0 & -\gamma n & \beta n \\
 i\varepsilon Q & \varepsilon & 0 & \gamma n & 0 & -\alpha n \\
 0 & 0 & \varepsilon_0 & -\beta n & \alpha n & 0 \\
 0 & -\gamma n & \beta n & -\mu & i\mu Q' & 0 \\
 \gamma n & 0 & -\alpha n & -i\mu Q' & -\mu & 0 \\
 -\beta n & \alpha n & 0 & 0 & 0 & -\mu_0
 \end{vmatrix}$$

Пусть $\alpha, \beta=0, \gamma=1$.

(Продольные эффекты.)



ε	$-i\varepsilon Q$	0	0	$-\gamma n$	βn
$i\varepsilon Q$	ε	0	γn	0	$-\alpha n$
0	0	ε_0	$-\beta n$	αn	0
0	$-\gamma n$	βn	$-\mu$	$i\mu Q'$	0
γn	0	$-\alpha n$	$-i\mu Q'$	$-\mu$	0
$-\beta n$	αn	0	0	0	$-\mu_0$

Пусть $\alpha, \beta=0, \gamma=1$.

(Продольные эффекты.)

$$\begin{array}{cccccc|c} \varepsilon & -i\varepsilon Q & 0 & 0 & -n & 0 & \\ i\varepsilon Q & \varepsilon & 0 & n & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & \varepsilon_o & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & -n & 0 & -\mu & i\mu Q' & 0 & \\ n & 0 & 0 & -i\mu Q' & -\mu & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu_o \end{array} =$$

По шестой строке и шестому столбцу

$$= -\mu_0 \begin{vmatrix} \varepsilon & -i\varepsilon Q & 0 & 0 & -n \\ i\varepsilon Q & \varepsilon & 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & -n & 0 & -\mu & i\mu Q' \\ n & 0 & 0 & -i\mu Q' & -\mu \end{vmatrix} =$$

По третьей строке и третьему столбцу

$$= -\mu_o \cdot \varepsilon_o \begin{vmatrix} \varepsilon & -i\varepsilon Q & 0 & -n \\ -i\varepsilon Q & \varepsilon & n & 0 \\ 0 & -n & -\mu & i\mu Q' \\ n & 0 & -i\mu Q' & -\mu \end{vmatrix} =$$

По первой строке

$$-\mu_o \cdot \varepsilon_o \left[\begin{vmatrix} \varepsilon & n & 0 \\ \varepsilon & -n & -\mu \\ 0 & -i\mu Q' & -\mu \end{vmatrix} + i\varepsilon Q \begin{vmatrix} i\varepsilon Q & n & 0 \\ 0 & -\mu & i\mu Q' \\ n & -i\mu Q' & -\mu \end{vmatrix} + \right.$$

$$\left. + n \begin{vmatrix} i\varepsilon Q & \varepsilon & n \\ 0 & -n & -\mu \\ n & 0 & -i\mu Q' \end{vmatrix} \right] = -\mu_o \cdot \varepsilon_o \left[\varepsilon (\mu^2 \varepsilon - \varepsilon \mu^2 Q'^2 - n^2 \mu) + \right.$$

$$\left. + i\varepsilon Q (i\mu^2 \varepsilon Q + i\mu n^2 Q' - i\mu^2 \varepsilon Q Q'^2) + n (-\mu \varepsilon Q Q' n - \varepsilon \mu n + n^3) \right] =$$

$$= -\mu_o \cdot \varepsilon_o \left[n^4 + n^2 (-\mu \varepsilon - \varepsilon \mu Q Q' - \varepsilon \mu - \varepsilon \mu Q Q') + \mu^2 \varepsilon^2 - \mu^2 \varepsilon^2 Q'^2 - \right.$$

$$\left. - \mu^2 \varepsilon^2 Q^2 + \mu^2 \varepsilon^2 Q^2 Q'^2 \right] = 0$$

Имеем биквадратное уравнение относительно n

$$n^4 - n^2(2\varepsilon\mu + 2\varepsilon\mu QQ') + \mu^2 \varepsilon^2 (1 - Q'^2 - Q^2 + Q^2 Q'^2) = 0$$

$$n^4 - 2n^2 \varepsilon\mu(1 + QQ') + \mu^2 \varepsilon^2 (1 - Q'^2 - Q^2 + Q^2 Q'^2) = 0$$

$$D = 4\varepsilon^2 \mu^2 (1 + QQ')^2 - 4\mu^2 \varepsilon^2 (1 - Q'^2 - Q^2 + Q^2 Q'^2) =$$

$$= 4\varepsilon^2 \mu^2 (\cancel{1} + 2QQ' + \cancel{Q^2 Q'^2} - \cancel{1} + Q'^2 + Q^2 - \cancel{Q^2 Q'^2}) =$$

$$= 4\varepsilon^2 \mu^2 (Q + Q')^2$$

$$n_{1,2}^2 = \frac{2\varepsilon\mu(1 + QQ') \pm 2\varepsilon\mu(Q' + Q)}{2} = \frac{2\varepsilon\mu}{2} (1 + \cancel{QQ'} \pm (Q' + Q))$$

$$n_{1,2}^2 = \varepsilon\mu(1 \pm (Q' + Q))$$

Поворот плоскости поляризации

$$\theta = \omega \cdot \Delta t = \omega \left(\frac{d}{V_1} - \frac{d}{V_2} \right) = \omega d \left(\frac{n_1}{c} - \frac{n_2}{c} \right) = \frac{\omega d \cdot \Delta n}{c}$$

d – толщина пластинки, n – показатель преломления

$$n_{1,2}^2 = \varepsilon\mu(1 \pm (Q'+Q))$$

Учтем, что $Q'+Q \ll 1$

$$n_{1,2} = \sqrt{\varepsilon\mu(1 \pm (Q'+Q))} = \sqrt{\varepsilon\mu} \cdot (1 \pm (Q'+Q))^{0,5} = \sqrt{\varepsilon\mu} \cdot (1 \pm 0,5(Q'+Q))$$

Поворот плоскости поляризации

$$\theta = \frac{\omega d \cdot \Delta n}{c} = \frac{\omega d \sqrt{\epsilon \mu}}{c} (1 + 0,5(Q' + Q) - 1 + 0,5(Q' + Q))$$

$$\theta = \frac{\omega d \sqrt{\epsilon \mu}}{c} (Q' + Q)$$

Для бигиротропной среды

$$\theta = \frac{\omega d \sqrt{\epsilon \mu}}{c} Q$$

Для giroэлектрической среды

$$\theta = \frac{\omega d \sqrt{\epsilon \mu}}{c} Q'$$

Для гиромагнитной среды

Напомним, что

$$\mu_{xy} = 4\pi \frac{i\gamma M_o \omega}{\omega_o^2 - \omega^2} = -4\pi \frac{i\gamma M_o \omega}{\omega^2 - \omega_o^2}$$

Вращение плоскости поляризации в гиромагнитной среде

$$\theta = \frac{\omega d \sqrt{\epsilon \mu}}{c} Q'$$

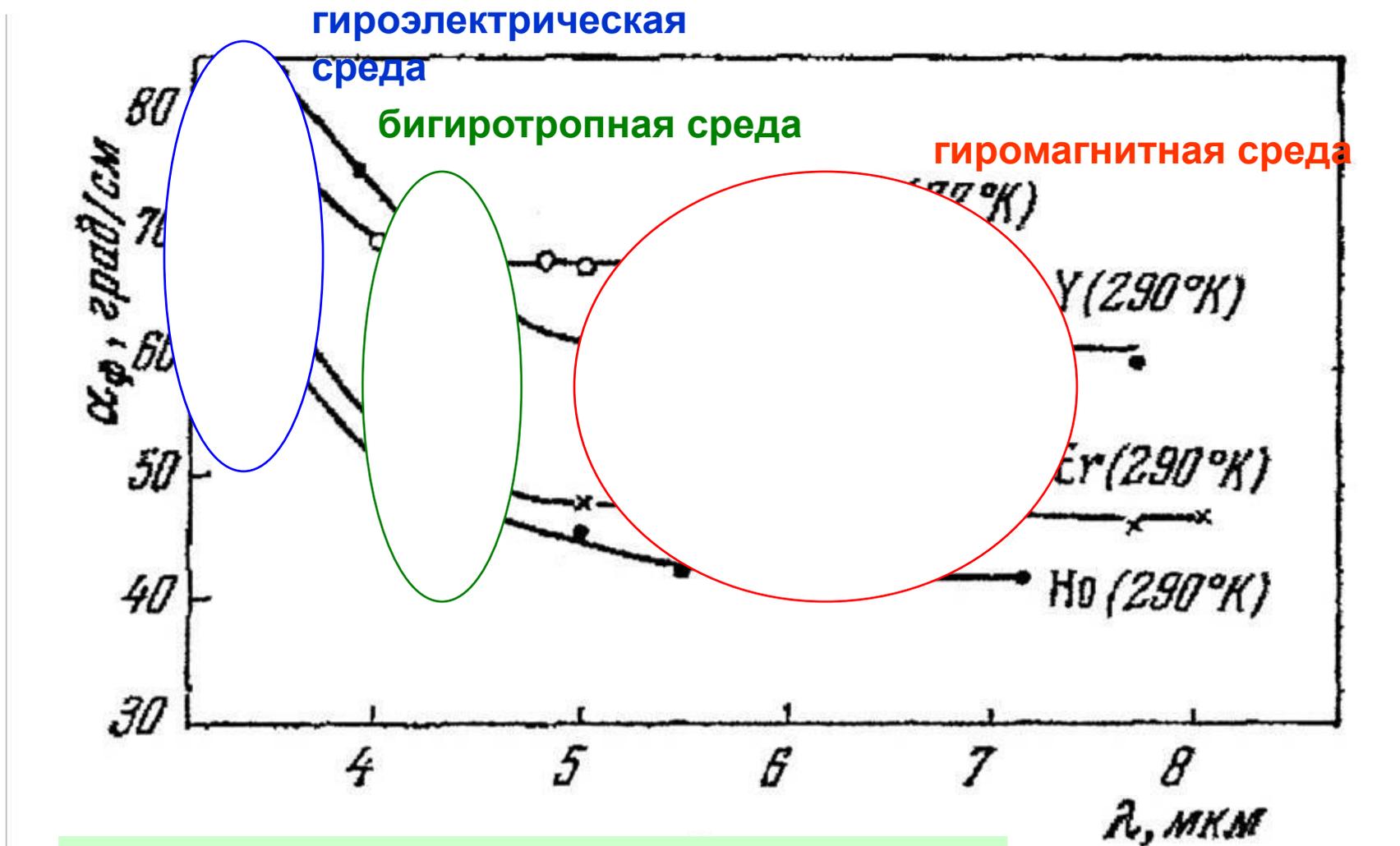
Учитывая, что $\mu_{xy} = 4\pi \frac{i\gamma\omega M_o}{\omega_o^2 - \omega^2} = -4\pi \frac{i\gamma\omega M_o}{\omega^2 - \omega_o^2} = -i\mu Q'$

следовательно $Q' = \frac{4\pi\gamma\omega M_o}{\mu(\omega^2 - \omega_o^2)}$ При $\omega \gg \omega_o$

$$Q' = \frac{4\pi\gamma\omega M_o}{\mu\omega^2} = \frac{4\pi\gamma M_o}{\mu\omega}$$

$$\theta = \frac{\omega d \sqrt{\epsilon \mu}}{c} Q' = \frac{\omega d \sqrt{\epsilon \mu}}{c} \cdot \frac{4\pi\gamma M_o}{\mu\omega} = \frac{4\pi d \gamma \sqrt{\epsilon} M_o}{c \sqrt{\mu}}$$

Вращение
плоскости
поляризации в
гиромагнитной
среде не зависит
от длины волны



Кринчик Г.С., Четкин М.В. ЖЭТФ, 41, 673 (1961)

Эффект Фарадея в ферритах-гранатах иттрия (Y), эрбия (Er) и гольмия (Ho) в инфракрасной области спектра при $T=290^\circ\text{K}$ и в феррите-гранате иттрия при $T=77^\circ\text{K}$

Продольные эффекты.

$$n_{1,2}^2 = \varepsilon\mu(1 \pm (Q' + Q))$$

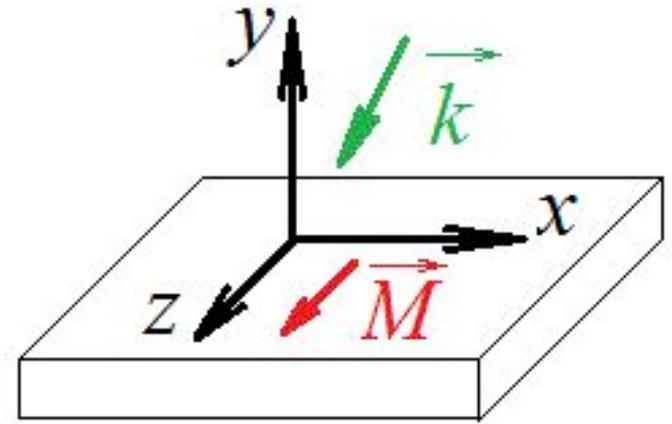
Нельзя разделить вклады тензоров $[\varepsilon]$ и $[\mu]$

Однородная система имеет решение,
если ее определитель равен нулю

$$\begin{vmatrix} \varepsilon & -i\varepsilon Q & 0 & 0 & -\gamma n & \beta n \\ i\varepsilon Q & \varepsilon & 0 & \gamma n & 0 & -\alpha n \\ 0 & 0 & \varepsilon_0 & -\beta n & \alpha n & 0 \\ 0 & -\gamma n & \beta n & -\mu & i\mu Q' & 0 \\ \gamma n & 0 & -\alpha n & -i\mu Q' & -\mu & 0 \\ -\beta n & \alpha n & 0 & 0 & 0 & -\mu_0 \end{vmatrix}$$

Пусть $\alpha, \beta \neq 0, \gamma = 0$.

(Поперечные эффекты.)



$$\begin{vmatrix}
 \varepsilon & -i\varepsilon Q & 0 & 0 & -\gamma n & \beta n \\
 i\varepsilon Q & \varepsilon & 0 & \gamma n & 0 & -\alpha n \\
 0 & 0 & \varepsilon_0 & -\beta n & \alpha n & 0 \\
 0 & -\gamma n & \beta n & -\mu & i\mu Q' & 0 \\
 \gamma n & 0 & -\alpha n & -i\mu Q' & -\mu & 0 \\
 -\beta n & \alpha n & 0 & 0 & 0 & -\mu_0
 \end{vmatrix} = 0$$

$\alpha, \beta \neq 0, \gamma = 0.$ (Поперечные эффекты.)

$$\begin{vmatrix} \varepsilon & -i\varepsilon Q & 0 & 0 & 0 & \beta n \\ i\varepsilon Q & \varepsilon & 0 & 0 & 0 & -\alpha n \\ 0 & 0 & \varepsilon_0 & -\beta n & \alpha n & 0 \\ 0 & 0 & \beta n & -\mu & i\mu Q' & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha n & -i\mu Q' & -\mu & 0 \\ -\beta n & \alpha n & 0 & 0 & 0 & -\mu_0 \end{vmatrix} = 0$$

Учитывая, что $\alpha^2 + \beta^2$ получим уравнение:

$$n^4 - n^2 [\varepsilon_o \mu (1 - Q'^2) - \mu_o \varepsilon (Q^2 - 1)] - \mu_o \varepsilon_o \mu \varepsilon (Q^2 - 1)(1 - Q'^2) = 0$$

$$n_{1,2}^2 = \frac{\varepsilon_o \mu (1 - Q'^2) + \varepsilon \mu_o (1 - Q^2) \pm (\varepsilon_o \mu (1 - Q'^2) - \varepsilon \mu_o (1 - Q^2))}{2}$$

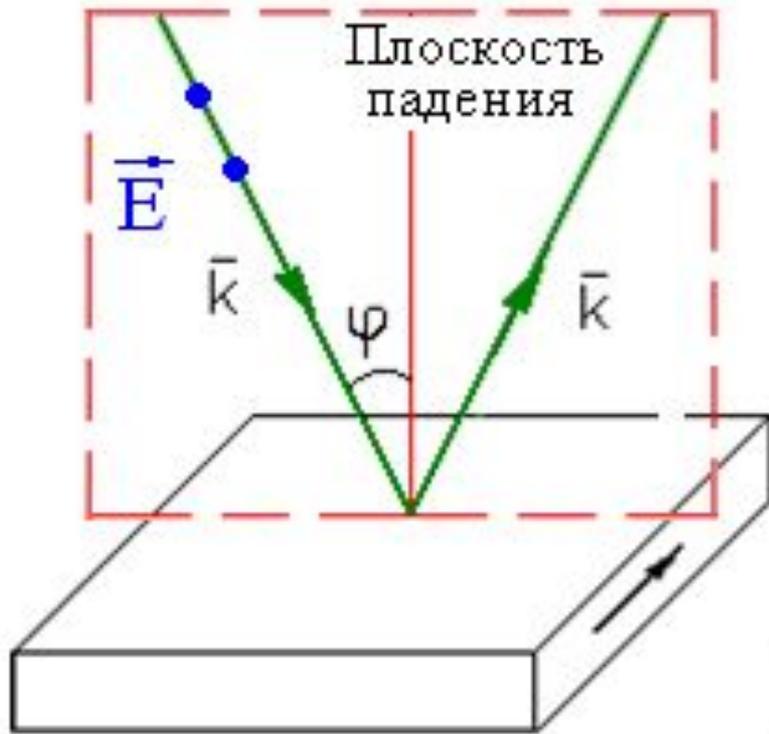
$$n_1^2 = n_s^2 = \frac{2\varepsilon_o \mu (1 - Q'^2)}{2} = \varepsilon_o \mu (1 - Q'^2)$$

S – волна
($H_z=0, H_x, H_y \neq 0$);
вектор $E \perp$ плоскости
падения света

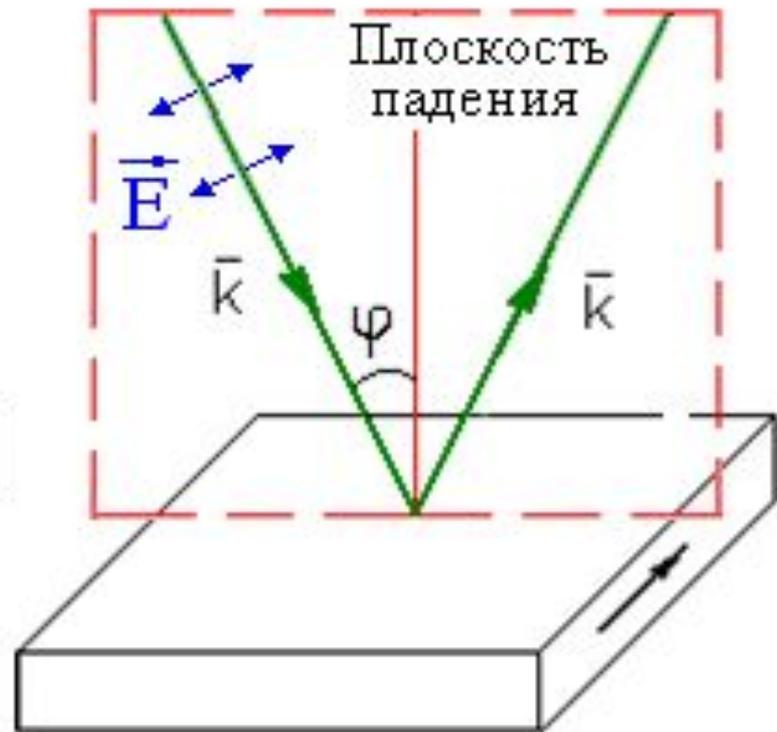
$$n_2^2 = n_p^2 = \frac{2\varepsilon \mu_o (1 - Q^2)}{2} = \varepsilon \mu_o (1 - Q^2)$$

P – волна
($H_z \neq 0, H_x, H_y = 0$),
 $E \parallel$ плоскости
падения света

Вектор \vec{E} в s- и p- волне



s - волна



p - волна

Показатели преломления

Для продольных эффектов

$$n_{1,2}^2 = \varepsilon\mu(1 \pm (Q'+Q))$$

Для поперечных эффектов

$$n_s^2 = \varepsilon_o\mu(1 - Q'^2)$$

$$n_p^2 = \varepsilon\mu_o(1 - Q^2)$$

**Магнитооптические эффекты
существует только при
совместном влиянии обменного
и спин-орбитального
взаимодействия**

Продольные и поперечные магнитооптические эффекты.

- Распространение электромагнитной волны в среде. Уравнения Максвелла
- Показатель преломления при продольном распространении волны
 - ✓ Гироэлектрическая, гиромагнитная и бигиротропная среды
 - ✓ Частотно независимый эффект Фарадея
- Показатель преломления при поперечном распространении волны