

**Динамика
вращательного движения
твёрдого тела**

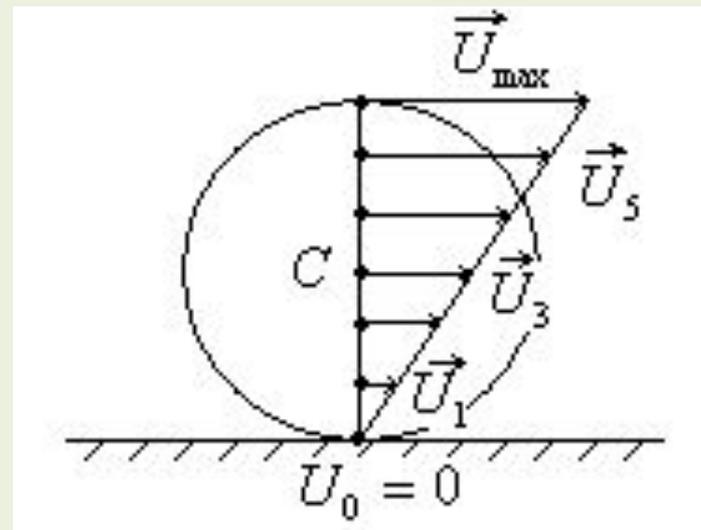
Лекция №5

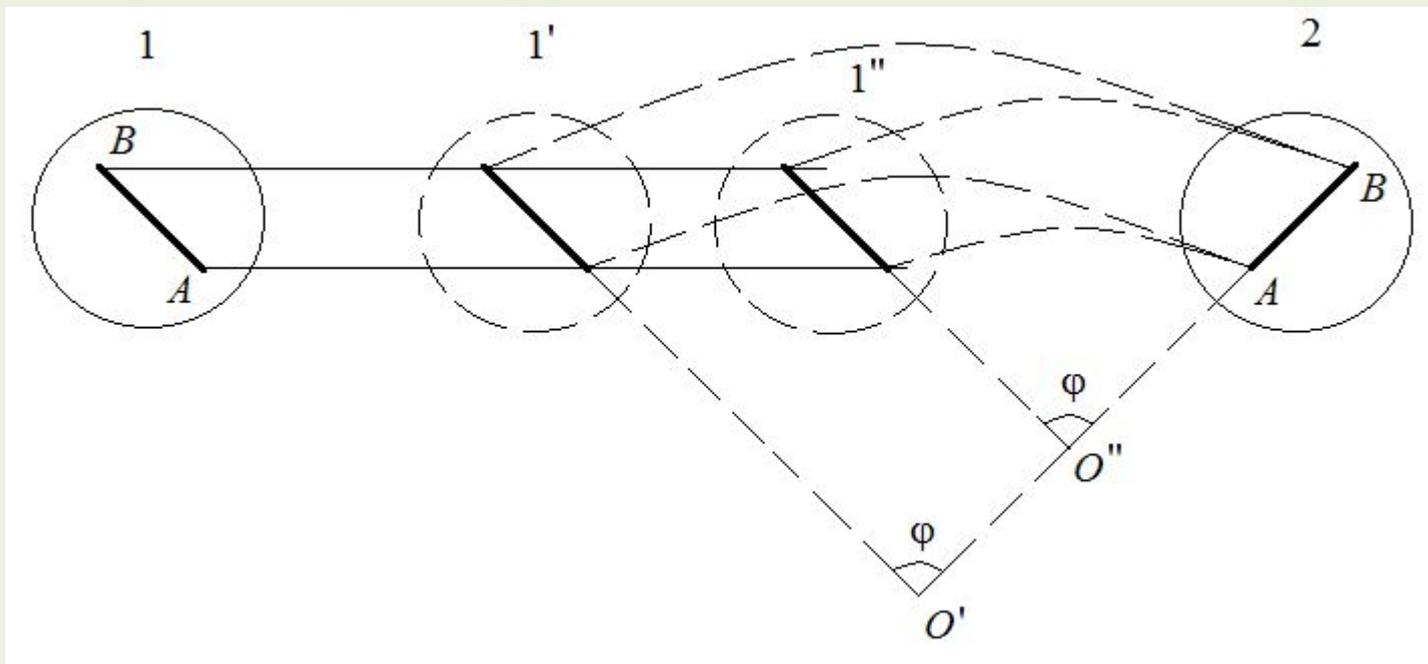
План лекции

- 1. Движение твердого тела (плоское движение).
- 2. Момент силы. Момент импульса. Основной закон динамики вращательного движения.
- 3. Момент инерции. Теорема Штейнера.
- 4. Кинетическая энергия твердого тела при плоском движении.
- 5. Закон сохранения момента импульса.

1. Движение твердого тела (плоское движение)

- Любое тело можно представить как систему материальных точек. Если расстояние между этими точками остается неизменным, при действии любых сил, то такое тело называют **абсолютно твердым**.
- **Поступательным** называют движение тела, при котором любая прямая, связанная с телом, перемещается параллельно самой себе.
- **Вращательным движением** твердого тела называется движение при котором все его точки движутся по окружностям, центры которых лежат на одной прямой, называемой осью вращения.
- **Плоским движением** называется движение точки, если ее траектория плоская кривая, т.е. траектория целиком лежит в одной плоскости.





Рассмотрим качение цилиндра по плоскости из положения 1 в положение 2. Это движение можно представить как сумму двух перемещений – поступательного из положения 1 в положение 1' или 1'' и поворота цилиндра вокруг оси O' или оси O''. Такое разбиение перемещения может быть осуществлено бесчисленным множеством способов, в любом случае поворот цилиндра производится на один и тот же угол ϕ .

Элементарное перемещение точки цилиндра разложим на два – поступательное и вращательное:

$$ds^{\Delta} = ds_{\Pi}^{\Delta} + ds_{B}^{\Delta}$$

Разделим ds на промежуток времени dt , получим скорость точки

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt} = \frac{ds_{\Pi}}{dt} + \frac{ds_B}{dt} = v_0 + v'$$

v_0 – одинаковая скорость поступательного движения для всех точек тела;

v' - различная скорость для разных точек тела, обусловленная вращением.

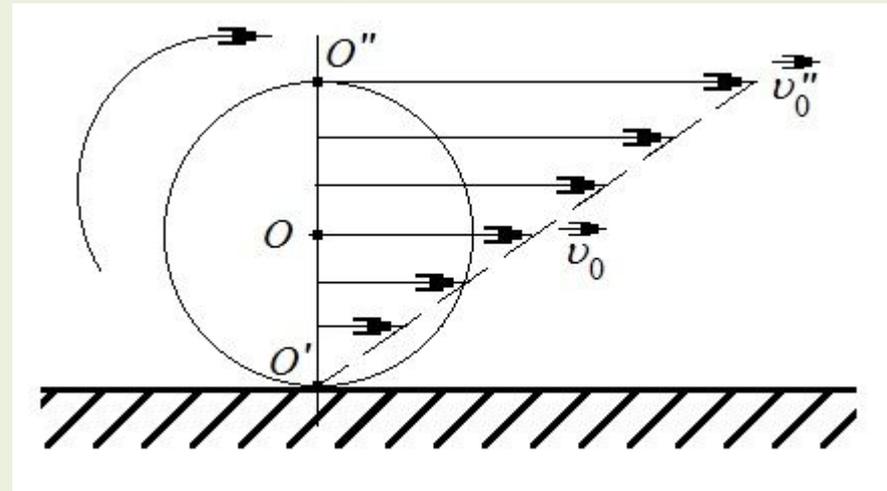
Плоское движение можно представить как сумму двух движений – поступательного со скоростью v_0 и вращательного с угловой скоростью ω .

Линейная скорость точки обусловленная вращением тела, равна $v' = [\omega r]$.

Скорость этой точки при сложном (плоском) движении можно представить в виде

$$\vec{v} = v_0 + [\omega r]$$

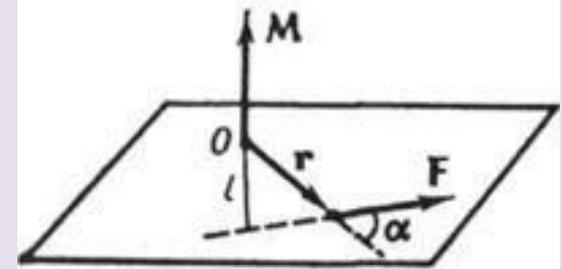
Движение цилиндра, катящегося без скольжения по плоскости можно представить как поступательное движение со скоростью v_0 и одновременное вращение с угловой скоростью ω вокруг оси O , или как поступательное движение со скоростью $v=2v_0$ и вращение с угловой скоростью ω вокруг оси O'' , либо как только одно вращение вокруг оси O' с угловой скоростью ω .



**2. Момент силы. Момент импульса.
Основной закон динамики
вращательного движения**

А. Момент силы

Моментом силы M относительно неподвижной точки O называется векторная физическая величина, определяемая векторным произведением радиуса вектора r , проведенного из точки O в точку A приложения силы, на силу F :



$$\vec{M} = [\vec{r} \vec{F}]$$

Момент силы \vec{M} является *псевдовектором*, его направление совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от r к F . Вектор \vec{M} направлен перпендикулярно плоскости образованной векторами r и F .

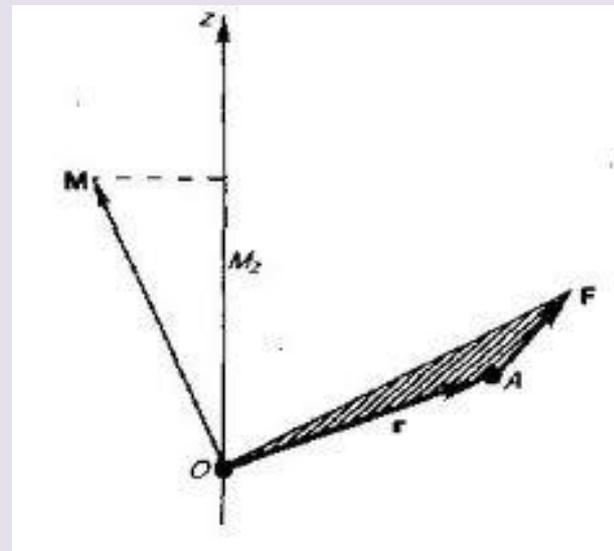
Модуль момента силы

$$M = Fr \sin \alpha = Fl$$

α – угол между векторами r и F ;

$l = r \sin \alpha$ – плечо силы F , кратчайшее расстояние между линией действия силы и точкой O , т.е. длина перпендикуляра, опущенного из точки O на линию действия силы.

- Моментом силы M относительно неподвижной оси OZ называется скалярная величина M_z , равная проекции на эту ось вектора \vec{M} момента силы, определенного относительно произвольной точки O находящейся на данной оси OZ .

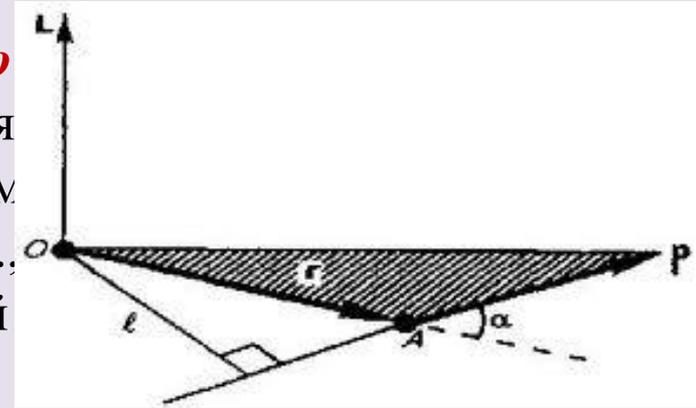


- Значение момента M_z не зависит от выбора положения точки O на оси OZ .
- Если ось OZ совпадает с направлением вектора \vec{M} , то момент силы представляется в виде вектора, совпадающего с осью:

$$\vec{M}_z = \left[\vec{r} \vec{F} \right]_z$$

Б. Момент импульса

Моментом импульса \vec{L}_i м.т. A **относительно неподвижной точки O** называется векторная физическая величина, определяемая векторным произведением радиуса-вектора \vec{r}_i м.т., проведенного из точки O , на импульс этой материальной точки \vec{p}_i :



$$\vec{L}_i = [\vec{r}_i \vec{p}_i]$$

\vec{r}_i - радиус-вектор, проведенный из точки O в точку A ;

$\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$ - импульс материальной точки.

Момент импульса \vec{L}_i является **псевдовектором**, его направление совпадает с направлением правого винта при его вращении от \vec{r}_i к \vec{p}_i .

Модуль вектора момента импульса

$$L_i = r_i p_i \sin \alpha = m_i v_i r_i \sin \alpha$$

α – угол между векторами \vec{r}_i и \vec{p}_i .

- При вращении абсолютно твердого тела вокруг неподвижной оси момент импульса отдельной м.т. равен

$$L_{iz} = m_i v_i r_i$$

- и направлен по оси в сторону, определяемую правилом правого винта.
- **Моментом импульса механической системы относительно неподвижной точки O** называется вектор \vec{L} , равный геометрической сумме моментов импульса относительно той же точки O всех м.т. механической системы:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{p}_i)$$

- **Моментом импульса твердого тела относительно неподвижной оси OZ** , есть сумма моментов импульса всех м.т. из которых состоит это тела и равен:

$$L_z = \sum_{i=1}^n m_i v_i r_i$$

- С учетом, что $v_i = \omega r_i$, получим

$$L_z = \sum_{i=1}^n m_i \omega r_i^2 = \omega \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$$

В. Основной закон динамики вращательного движения

- Вектор, равный геометрической сумме моментов относительно неподвижной точки O всех внешних сил, действующих на механическую систему, называется главным моментом внешних сил относительно неподвижной точки O :

$$\vec{M}^{\text{внеш}} = \sum_{i=1}^n [\vec{r}_i \vec{F}_i^{\text{внеш}}]$$

- Получаем **основное уравнение динамики вращательного движения** (ОУДВД) твердого тела:

$$\frac{dL}{dt} = M^{\text{внеш}}$$

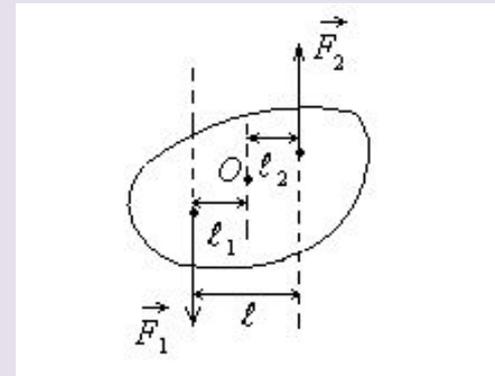
- Скорость изменения момента импульса механической системы относительно неподвижной точки (оси) равна главному моменту всех внешних сил, действующую на систему относительно той же точки (оси).

**Пусть на тело действуют две антипараллельные силы, равные по модулю.
Такие силы называются парой сил.**

$$F_1 = F_2$$

$$M_1 = F_1 l_1$$

$$M_2 = F_2 l_2$$

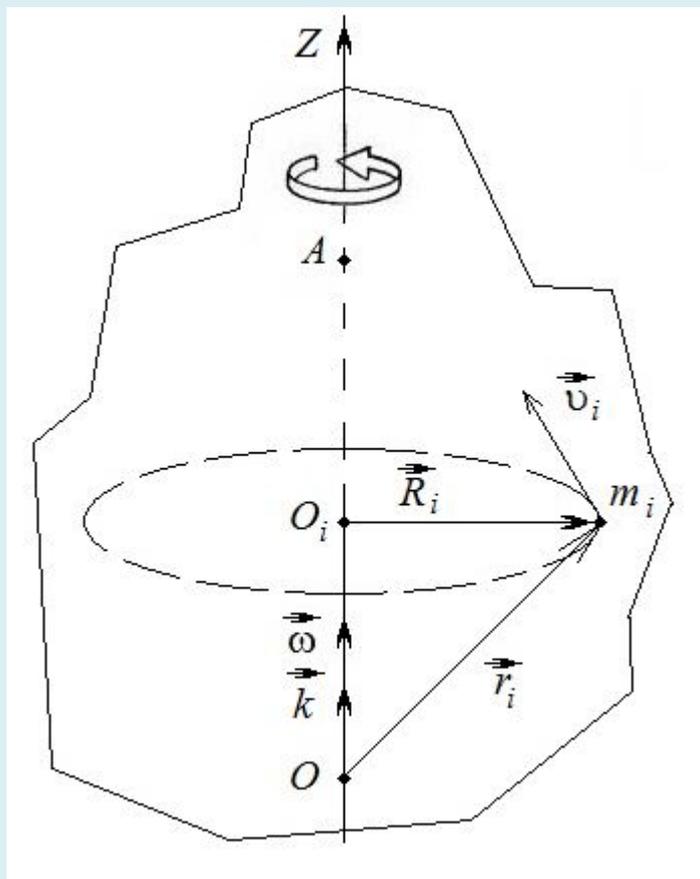


Момент пары сил:

$$M = M_1 + M_2 = F_1 l_1 + F_2 l_2 = F(l_1 + l_2) = FL$$

3. Момент инерции. Теорема Штейнера

Момент инерции



- Рассмотрим твердое тело вращающееся вокруг неподвижной оси OZ .
- Основным законом динамики тела, вращающегося вокруг неподвижной оси OZ , имеет вид:

$$\frac{dL_Z}{dt} = M_Z^{\text{внеш}}$$

- Величина, равная сумме произведений масс всех материальных точек, образующих механическую систему, на квадраты их расстояний от данной оси вращения, называется **моментом инерции** системы относительно этой оси:

$$I = \sum_{i=1}^n m_i R_i^2$$

- Таким образом, момент импульса тела относительно оси OZ равен

$$I = m_i \cdot r_i^2$$

- где I – момент инерции тела относительно оси вращения OZ .
- Если известен закон распределения массы тела, то **момент инерции твердого тела** можно определить по формуле:

$$L_Z = I\omega$$

- **Моментом инерции м.т. относительно некоторой оси** называют скалярную физическую величину, равную произведению массы материальной точки на квадрат расстояния до оси вращения:

$$I = \int r^2 dm$$

- Уравнение $\frac{dL_Z}{dt} = M_Z^{\text{внеш}}$ с учетом $L_Z = I\omega$ можно записать в виде:

$$\frac{d}{dt}(I\omega_Z) = M_Z^{\text{внеш}}$$

- В процессе вращения считается, что $I = \text{const}$, т.е. тело не деформируется
или

$$I \frac{d\omega_Z}{dt} = M_Z^{\text{внеш}}$$

$$I\varepsilon_Z = M_Z^{\text{внеш}}$$

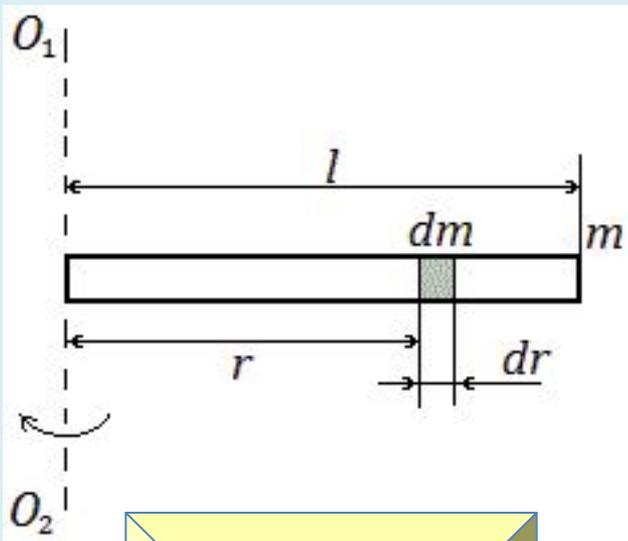
- Из уравнения видно, что угловое ускорение обратно пропорционально моменту инерции. Следовательно, момент инерции тела относительно оси является мерой инертности тела в его вращении вокруг этой оси.

$$\varepsilon = \frac{M^{\text{внеш}}}{I}$$

- $\varepsilon = \frac{M^{\text{внеш}}}{I}$ - основное уравнение динамики вращательного движения

Моменты инерции однородных тел правильной формы

1. **Момент инерции** тонкого стержня массой m и длиной l относительно оси, проходящей через **один из концов** стержня перпендикулярно его длине.



$$dJ_C = r^2 dm = r^2 \rho S dr$$

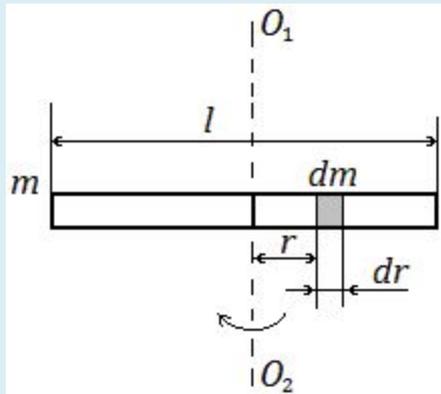
$$dm = \rho dV = \rho S dr$$

$$J_C = \rho S \int_0^l r^2 dr = \frac{1}{3} \rho S l^3 = \frac{1}{3} m l^2$$

$$m = \rho S l$$

$$I = \frac{m l^2}{3}$$

2. Момент инерции тонкого стержня массой m и длиной l относительно оси, проходящей перпендикулярно стержню через его **сердину**.



$$dJ_C = r^2 dm = r^2 \rho S dr$$

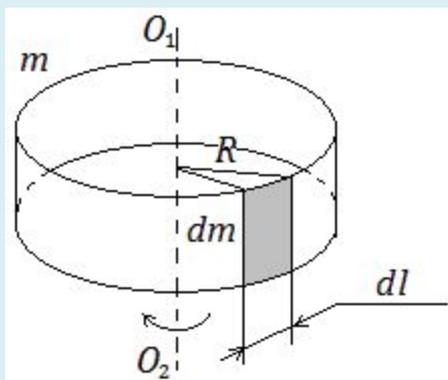
$$dm = \rho dV = \rho S dr$$

$$J_C = 2\rho S \int_0^{l/2} r^2 dr = \frac{2}{3} \rho S \left(\frac{l}{2}\right)^3 = \frac{1}{12} ml^2$$

$$m = \rho Sl$$

$$I = \frac{ml^2}{12}$$

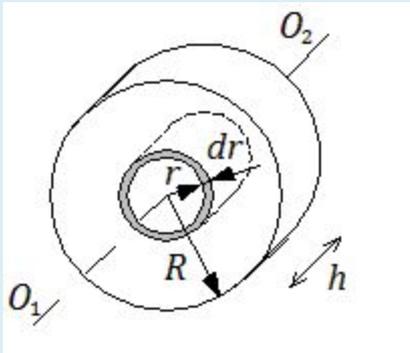
3. Момент инерции однородного кольца (полого цилиндра) массы m и радиуса R относительно его оси



$$I = \int r^2 dm = \int_0^{2\pi R} R^2 \frac{m}{2\pi R} dl = \frac{mR}{2\pi} \int_0^{2\pi R} dl =$$
$$= \frac{mR}{2\pi} \cdot 2\pi R = mR^2$$

$$I = mR^2$$

4. Момент инерции однородного сплошного диска (цилиндра) массы m и радиуса R относительно его оси



$$dm = \rho dV = \rho \cdot 2\pi r \cdot dr \cdot h$$

$$I = \int r^2 dm = \int_0^R r^2 \rho 2\pi r h \cdot dr = 2\pi\rho h \int_0^R r^3 dr =$$

$$= 2\pi\rho h \frac{R^4}{4} = \pi\rho h \frac{R^4}{2}$$

Масса диска $m = \rho V = \rho\pi R^2 h$, следовательно

$$I = \frac{mR^2}{2}$$

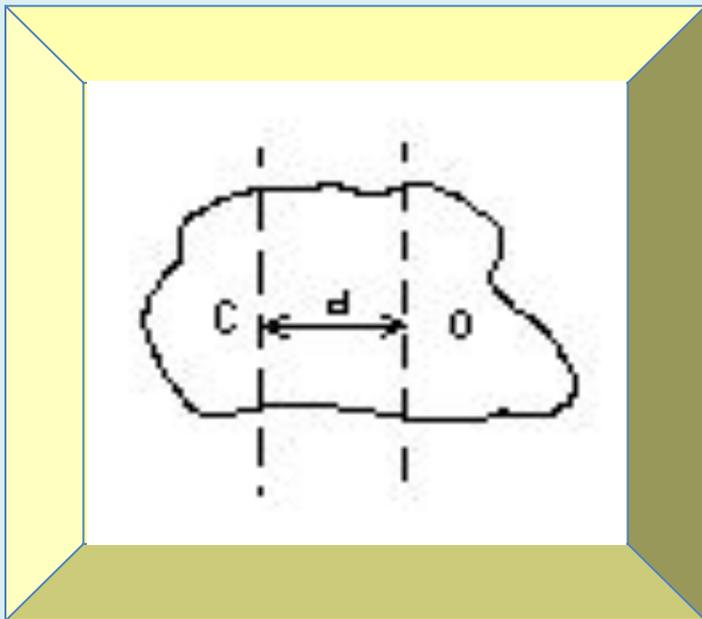
Значения моментов инерции для некоторых тел (тела считаются однородными, m – масса тела)

Тонкое кольцо, материальная точка, полый тонкостенный цилиндр (ось симметрии)	$J = mR^2$
Сплошной цилиндр, диск (ось симметрии)	$J = \frac{1}{2}mR^2$
Диск (ось вращения проходит через диагональ)	$J = \frac{1}{4}mR^2$
Шар	$J = \frac{2}{5}mR^2$
Полая тонкостенная сфера	$J = \frac{2}{3}mR^2$
Прямой тонкий стержень длиной l , ось перпендикулярна стержню и проходит через его середину	$J = \frac{1}{12}ml^2$
Прямой тонкий стержень длиной l , ось перпендикулярна стержню и проходит через его конец	$J = \frac{1}{3}ml^2$

Моменты инерции однородных тел относительно произвольной оси

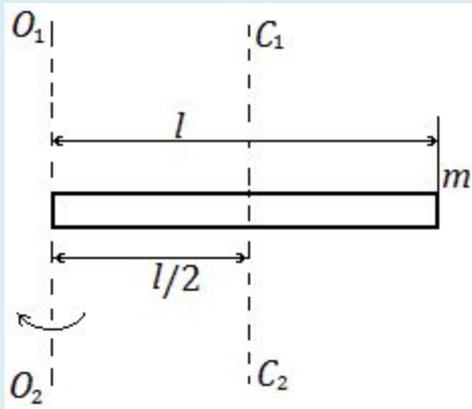
Теорема Штейнера:

Момент инерции тела относительно любой оси равен сумме момента инерции относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс и произведение массы тела на квадрат расстояния между осями.



$$I_O = I_C + md^2$$

Покажем справедливость теоремы Штейнера на примере со стержнем:



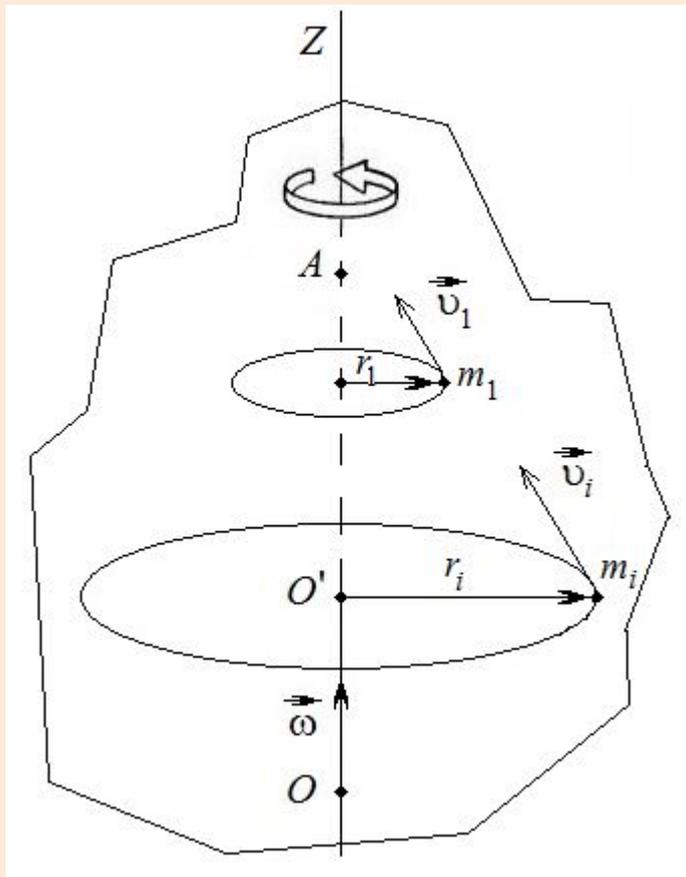
Применение теоремы Штейнера к расчету момента инерции тонкого стержня массой m и длиной l относительно оси, проходящей через один из концов стержня перпендикулярно его длине.

$$I = I_C + m \frac{l^2}{4}$$

$$I_C = \frac{ml^2}{12}$$

$$I = \frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{4} = \frac{ml^2}{3}$$

**4. Кинетическая энергия
твёрдого тела
при плоском движении**



- Мысленно разобьем твердое тело на маленькие объемы (м.т.) с элементарными массами m_1, m_2, \dots, m_n , находящиеся на расстоянии r_1, r_2, \dots, r_n от оси.
- Так как рассматриваем абсолютно твердое тело, то угловая скорость вращения м.т. одинакова:

$$\omega = \frac{v_1}{r_1} = \frac{v_2}{r_2} = \dots = \frac{v_n}{r_n}$$

- Кинетическую энергию вращающегося тела найдем как сумму кинетических энергий его м.т.:

$$T_{\text{вр}} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \dots + \frac{m_n v_n^2}{2}, \text{ или } T_{\text{вр}} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2}$$

Получаем:

$$T_{\text{вр}} = \sum \frac{m_i \omega^2}{2} r_i^2 = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = \frac{J_Z \omega^2}{2}$$

$$T_{\text{вр}} = \frac{J_Z \omega^2}{2}$$

$J_Z = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$ - момент инерции тела относительно оси Z.

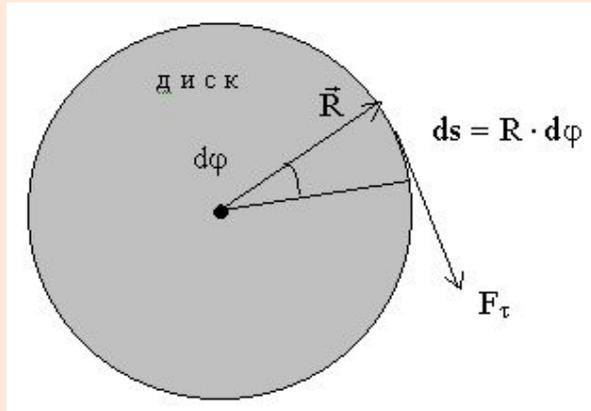
- $T_{\text{вр}} = \frac{J_Z \omega^2}{2}$ - формула справедлива для тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.
- В случае плоского движения тела, например цилиндра, скатывающегося с наклонной плоскости без скольжения, энергия движущегося тела складывается из энергии поступательного движения со скоростью, равной скорости центра масс v_C , и энергии вращения тела вокруг оси, проходящей через центр тела:

$$T = \frac{m v_C^2}{2} + \frac{J_C \omega^2}{2}$$

- где m – масса катящегося тела; v_C – скорость центра масс тела; J_C – момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс; ω – угловая скорость тела.

Найдем работу при вращательном движении твердого тела

$$\delta A = F_{\tau} dr = Fl = FR \cdot d\phi = M \cdot d\phi$$



$$\delta A = \overset{\curvearrowright}{M} \cdot d\overset{\curvearrowright}{\phi}$$

Элементарная работа при вращательном движении

$$A = \int \delta A = \int \overset{\curvearrowright}{M} \cdot d\overset{\curvearrowright}{\phi}$$

Работа при вращательном движении

$$N = \frac{\delta A}{dt} = \frac{M d\phi}{dt} = M\omega$$

$$N = \overset{\curvearrowright}{M} \cdot \overset{\curvearrowright}{\omega}$$

- мощность при вращательном движении

- Работа при вращении тела идет на увеличение его кинетической энергии:

$$dA = dT$$

- где $dT = d\left(\frac{J_Z \omega^2}{2}\right) = J_Z \omega d\omega$

- Поэтому $M_Z d\varphi = J_Z \omega d\omega$ или $M_Z \frac{d\varphi}{dt} = J_Z \omega \frac{d\omega}{dt}$

- Учитывая, что $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$

- получаем $M_Z = J_Z \frac{d\omega}{dt} = J_Z \varepsilon$

- Получили **основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела** относительно неподвижной оси.

5. Закон сохранения момента импульса

- Для замкнутой системы момент внешних сил $M^{\text{внеш}}$ всегда равен нулю, так как на нее внешние силы не действуют.

- Из основного закона динамики вращательного движения твердого тела

$$\frac{dL}{dt} = M^{\text{внеш}}$$

- вытекает **закон сохранения момента импульса**: *момент импульса замкнутой системы относительно неподвижной точки (оси) не изменяется с течением времени.*

$$\frac{dL}{dt} \equiv 0, \Rightarrow L = const$$

- Из уравнения $\frac{dL_C}{dt} = M_C^{\text{внеш}}$ следует:

- момент импульса замкнутой системы относительно ее центра масс не изменяется с течением времени

$$L_C = const$$

- Момент импульса замкнутой системы относительно **любой** неподвижной оси a также остается **постоянным**:

$$\overset{\Delta}{L}_a = const$$

- **Закон сохранения момента импульса** является фундаментальным законом природы, который далеко выходит за рамки классической механики.
- **Закон сохранения момента импульса** связан со свойством симметрии пространства – его **изотропностью**, т. е. с инвариантностью физических законов относительно выбора направления осей координат системы отсчета.
- Моментом импульса обладают не только движущиеся макроскопические тела и системы, но также и отдельные атомы, атомные ядра и элементарные частицы.
- Атомные ядра имеют моменты импульса, не связанные с их движением в пространстве.

Основное уравнение динамики вращательного движения

Аналогии между поступательным и вращательным движениями.

Поступательное движение	Вращательное движение
1. Линейное перемещение: $\Delta \vec{r}$	1. Угловое перемещение: $\Delta \vec{\varphi}$
2. Линейная скорость: \vec{v}	2. Угловая скорость: $\vec{\omega}$
3. Линейное ускорение: \vec{a}	3. Угловое ускорение: $\vec{\varepsilon}$
4. Масса тела: m .	4. Момент инерции: I .
5. Сила: \vec{F}	5. Момент силы: \vec{M}
6. Работа: $\delta A = \vec{F} d\vec{r}$	6. Работа: $\delta A = \vec{M} d\vec{\varphi}$
7. Мощность: $N = \vec{F} \vec{v}$	7. Мощность: $N = \vec{M} \vec{\omega}$
8. Кинетическая энергия: $W_k = \frac{mv^2}{2}$	8. Кинетическая энергия: $W_k = \frac{I\omega^2}{2}$
9. Импульс тела: $\vec{p} = m\vec{v}$	9. Момент импульса: $\vec{L} = I\vec{\omega}$
10. Второй закон Ньютона: $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$	10. ОУДВД: $\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{M}}{I}$