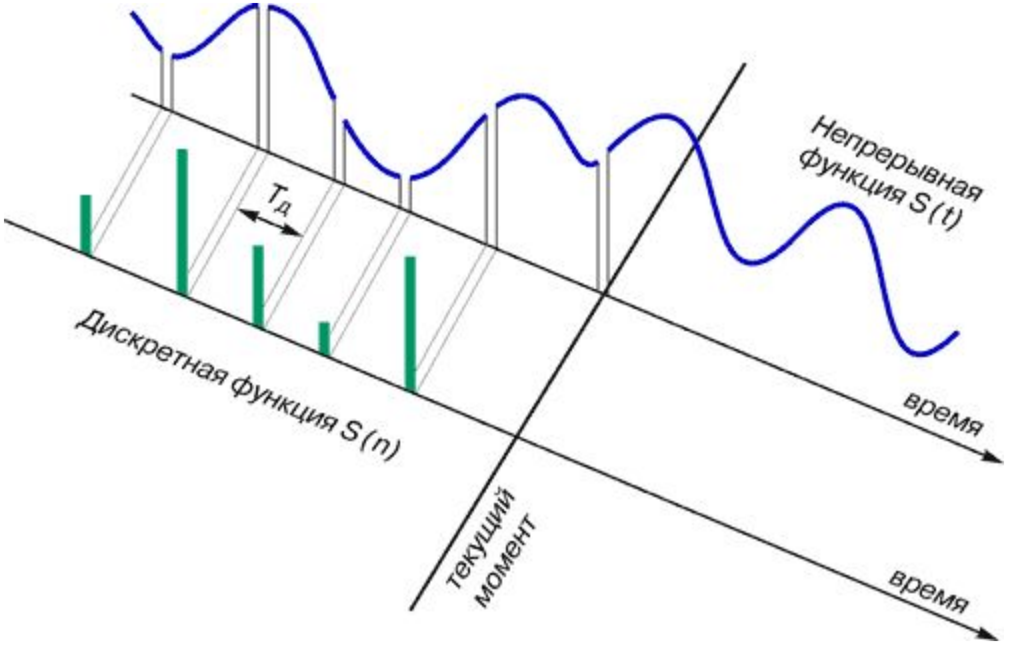
ЦИФРОВЫЕ СИГНАЛЫ

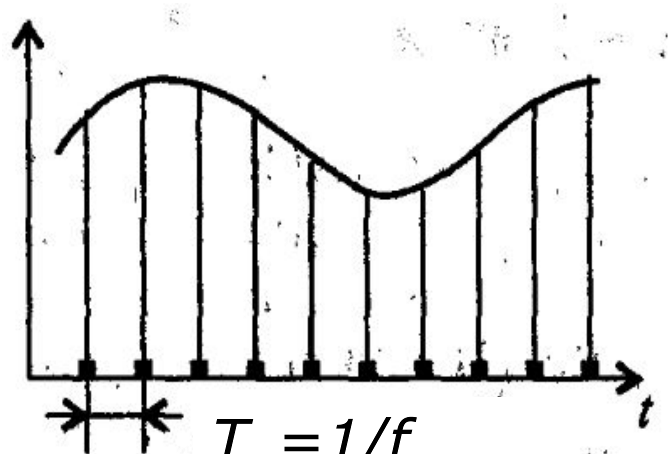


ЦИФРОВЫЕ СИГНАЛЫ

При переходе из аналоговой формы в цифровую сигнал претерпевает следующие преобразования:

1) дискретизацию во времени;
2) квантование по уровню;
3) кодирование.

Дискретизация по времени - вместо непрерывного сигнала формируются отсчеты этого сигнала в дискретные моменты времени



$T_Д=1/f_Д$

$$s(t) \to \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(kT_Д)$$

$$s_Д(t) = s(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT_Д)$$

ДИСКРЕТИЗАЦИЯ СИГНАЛА ПО ВРЕМЕНИ

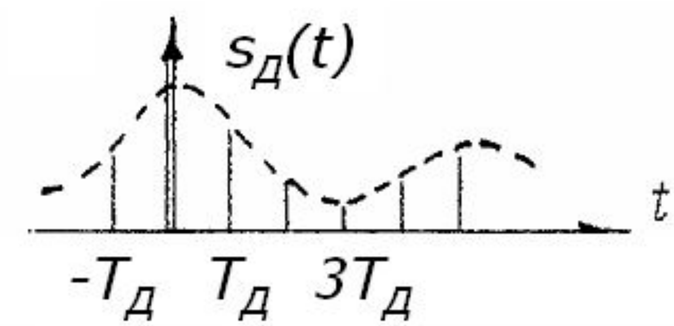
Сигнал, описываемый непрерывной функцией s(t) с ограниченным спектром, полностью определяется своими значениями $s_Д(t)$ взятыми через интервал времени $T_Д=1/(2f_в)$,где fв – верхняя частота s(t).

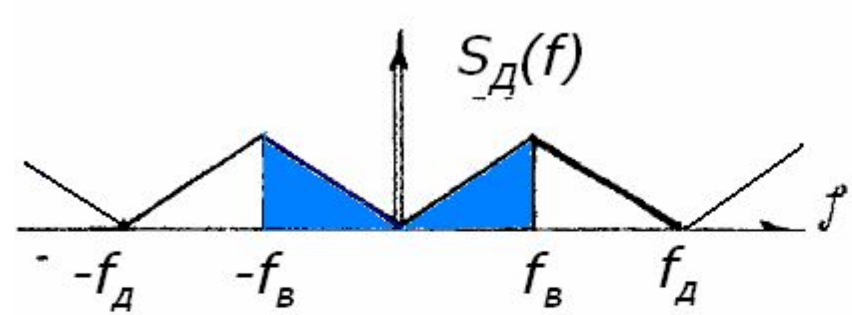
$$\frac{1}{T_Д} = f_Д \geq 2 f_B$$

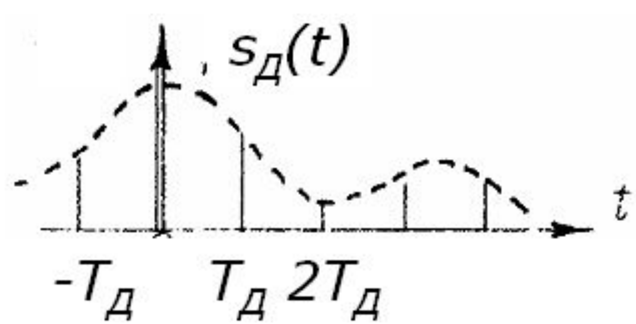
Спектр дискретного сигнала

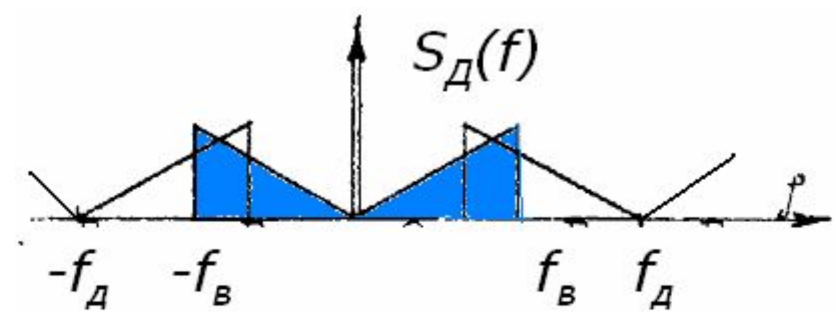
$$S_Д(f) = \frac{1}{T_Д} \sum_{k-\infty}^{\infty} S(f - kf_Д)$$

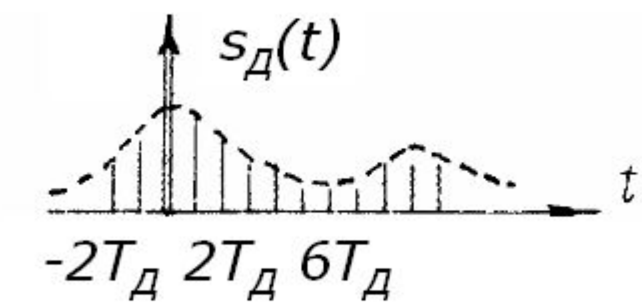
ВЛИЯНИЕ ЧАСТОТЫ ДИСКРЕТИЗАЦИИ НА ВОЗМОЖНОСТЬ ВОССТАНОВЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНОГО СИГНАЛА

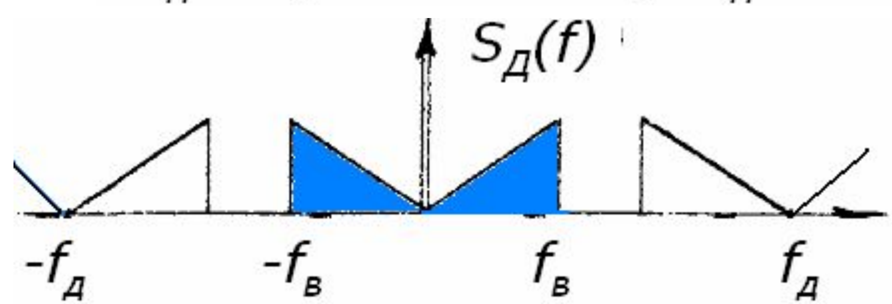








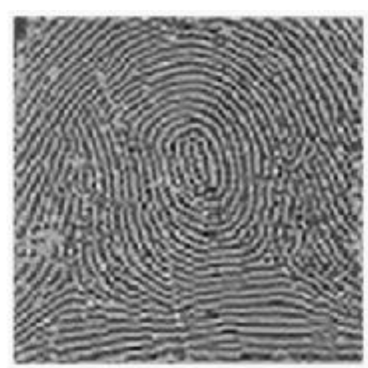




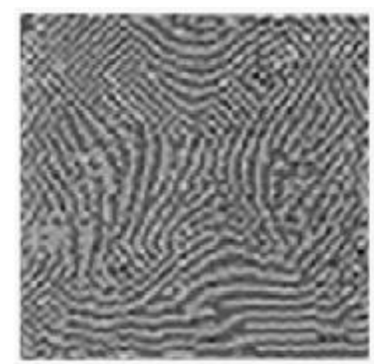
ПРОБЛЕМА НАЛОЖЕНИЯ СПЕКТРОВ

$4\Delta t$

$6\Delta t$



$3\Delta t$



$4\Delta t$

ПРОБЛЕМА НАЛОЖЕНИЯ СПЕКТРОВ

наложение спектров *предварительная НЧ фильтрация*

$$\Delta t = \frac{2}{2f_в}$$

Из лекций Tomas Svoboda

ПРОБЛЕМА НАЛОЖЕНИЯ СПЕКТРОВ

наложение спектров

предварительная НЧ фильтрация

$$\Delta t = \frac{4}{2 f_в}$$

Из лекций Tomas Svoboda

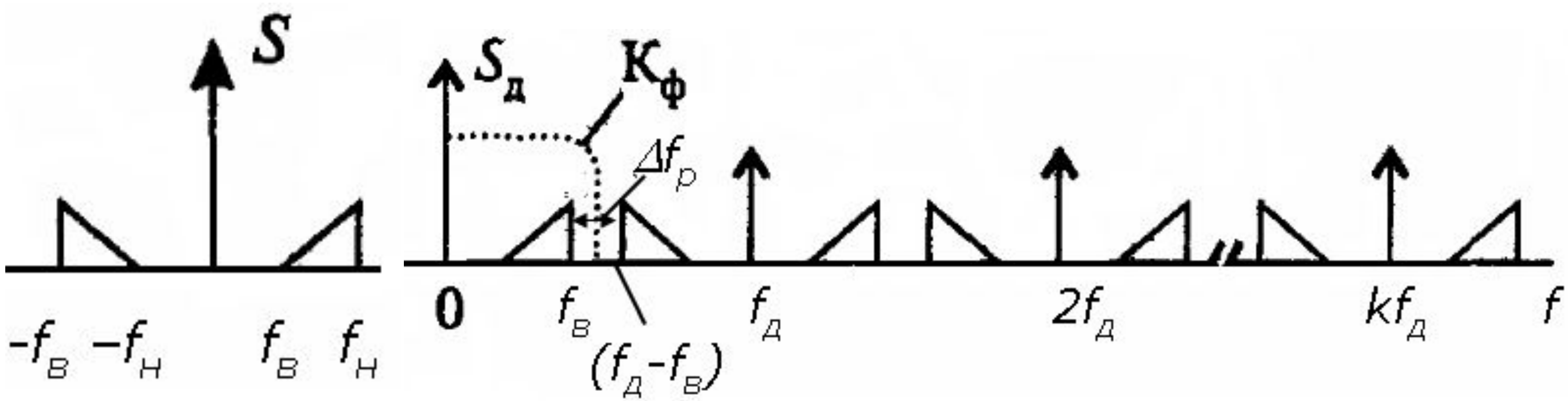
ПРОБЛЕМА НАЛОЖЕНИЯ СПЕКТРОВ

наложение спектров *предварительная НЧ фильтрация*

$$\Delta t = \frac{6}{2 f_в}$$

Из лекций
Tomas Svoboda

ПОЛОСА РАСФИЛЬТРОВКИ



Полоса расфильтровки

$$\Delta f_p = (f_Д - f_В) - f_В = f_Д - 2f_В; \qquad f_Д = 2f_В \Rightarrow \Delta f_p = 0$$

Частоту дискретизации обычно выбирают с некоторым запасом

$$f_Д \geq 2(1+\varepsilon) f_в; \quad 0 \leq \varepsilon \leq 0.5$$ - коэффициент запаса

ПРИМЕР

Пример . Найти частоту дискретизации, период дискретизации и полосу расфильтровки для телефонного сигнала, при коэффициенте запаса 0.18

$$f_Д \geq 2(1+\varepsilon) f_в; \qquad \Delta f_р = f_Д - 2 f_В;$$

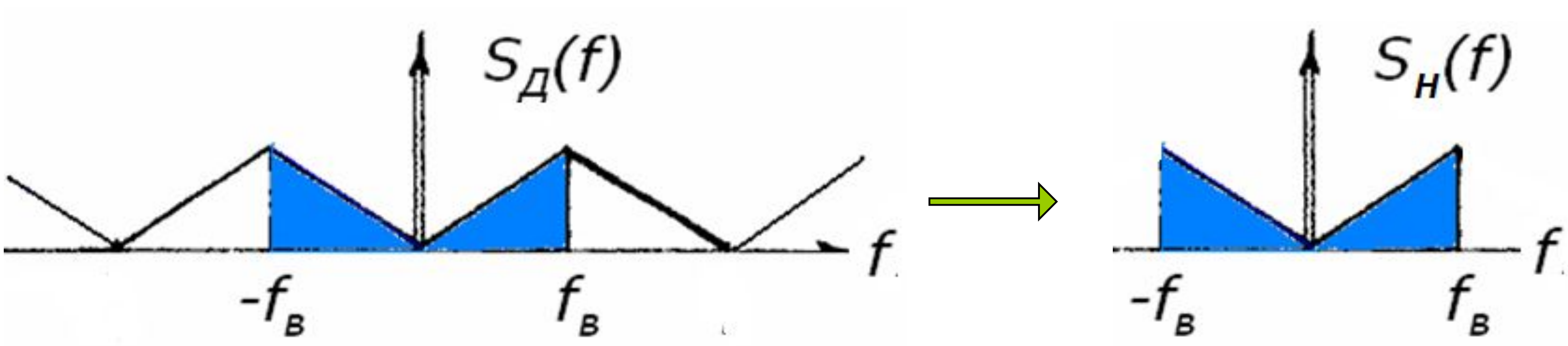
Для телефонного сигнала $f_в$=3.4 кГц;

*$f_д$=2*3.4*(1+0.18)=8кГц;*

$T_Д$=125мкс;

*$\Delta f_р$=8-2*3.4=1.2 кГц*

ВОССТАНОВЛЕНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ СИГНАЛОВ



КЧХ восстанавливающего фильтра

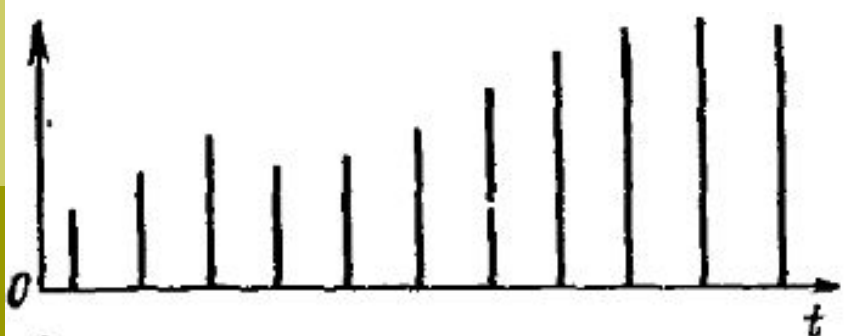
$$\dot{K}(f) = \begin{cases} T_Д \quad \text{при} \quad |f| \le \dfrac{1}{2T_Д} = f_в \\ 0 \quad \text{при} \quad |f| > f_в \end{cases}$$

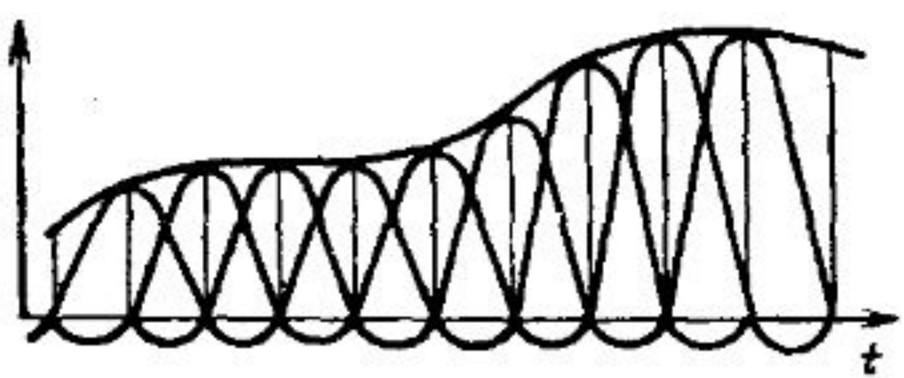
ИХ восстанавливающего фильтра

$$h(t) = \frac{\sin(2\pi f_в t)}{2\pi f_в t}$$

ВОССТАНОВЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНОГО СИГНАЛА

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(kT_Д) \frac{\sin 2\pi f_В (t - kT_Д)}{2\pi f_В (t - kT_Д)}$$



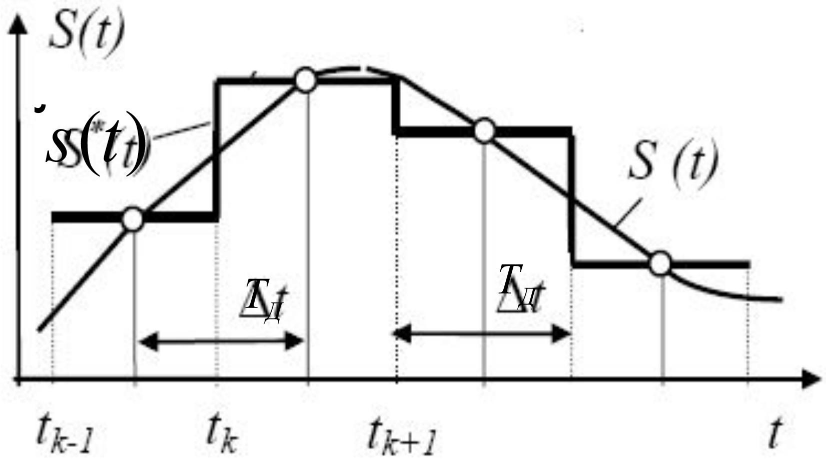


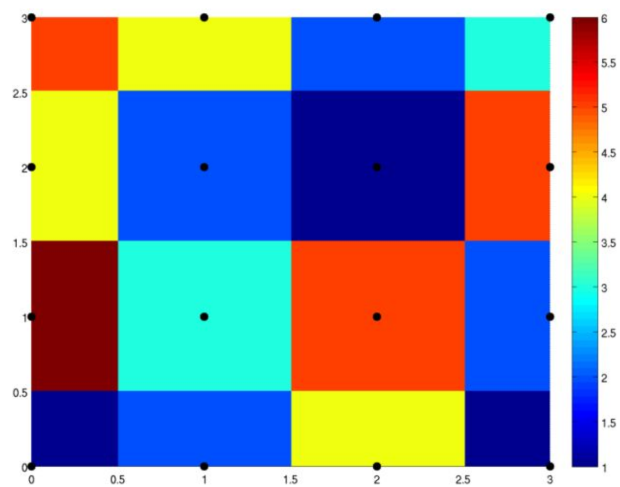
ВОССТАНОВЛЕНИЕ НЕПРЕРЫВНОГО СИГНАЛА

1) Ступенчатая аппроксимация:

$$\tilde{s}(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} s(kT_Д)\,П(t+kT_Д);$$

$$П(t)=\begin{cases}1, 0\le t<T_Д;\\ 0, t<0; t\ge T_Д.\end{cases}$$



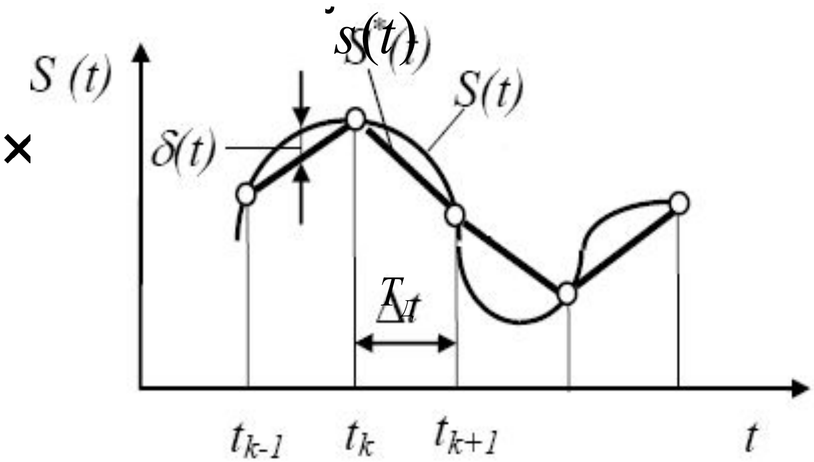


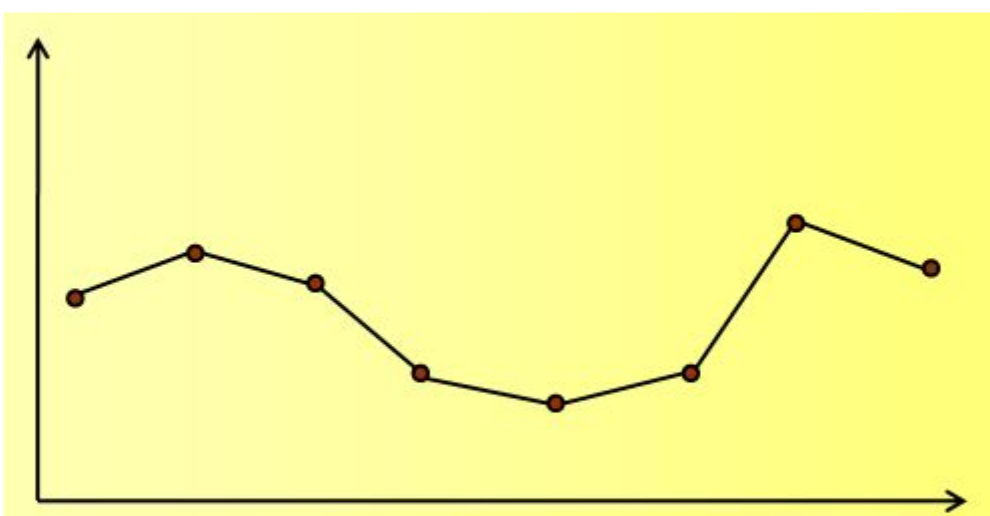
ВОССТАНОВЛЕНИЕ НЕПРЕРЫВНОГО СИГНАЛА

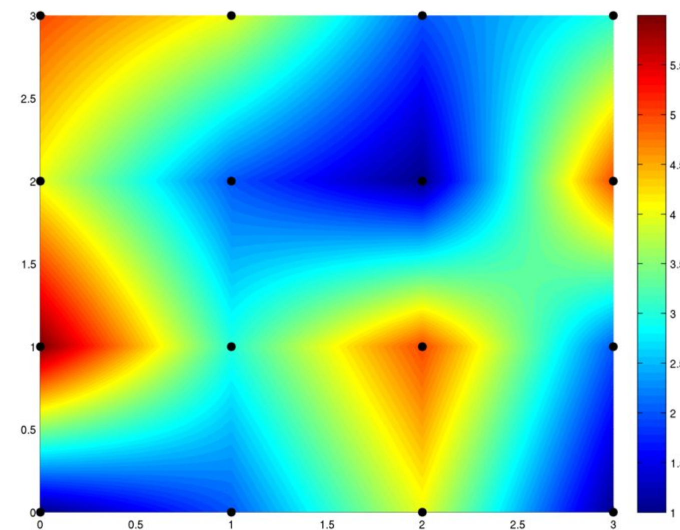
2) Трапецевидная аппроксимация:

$$\hat{s}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(s(kT_Д) + \frac{s((k+1)T_Д) - s(kT_Д)}{T_Д} \times\right.$$

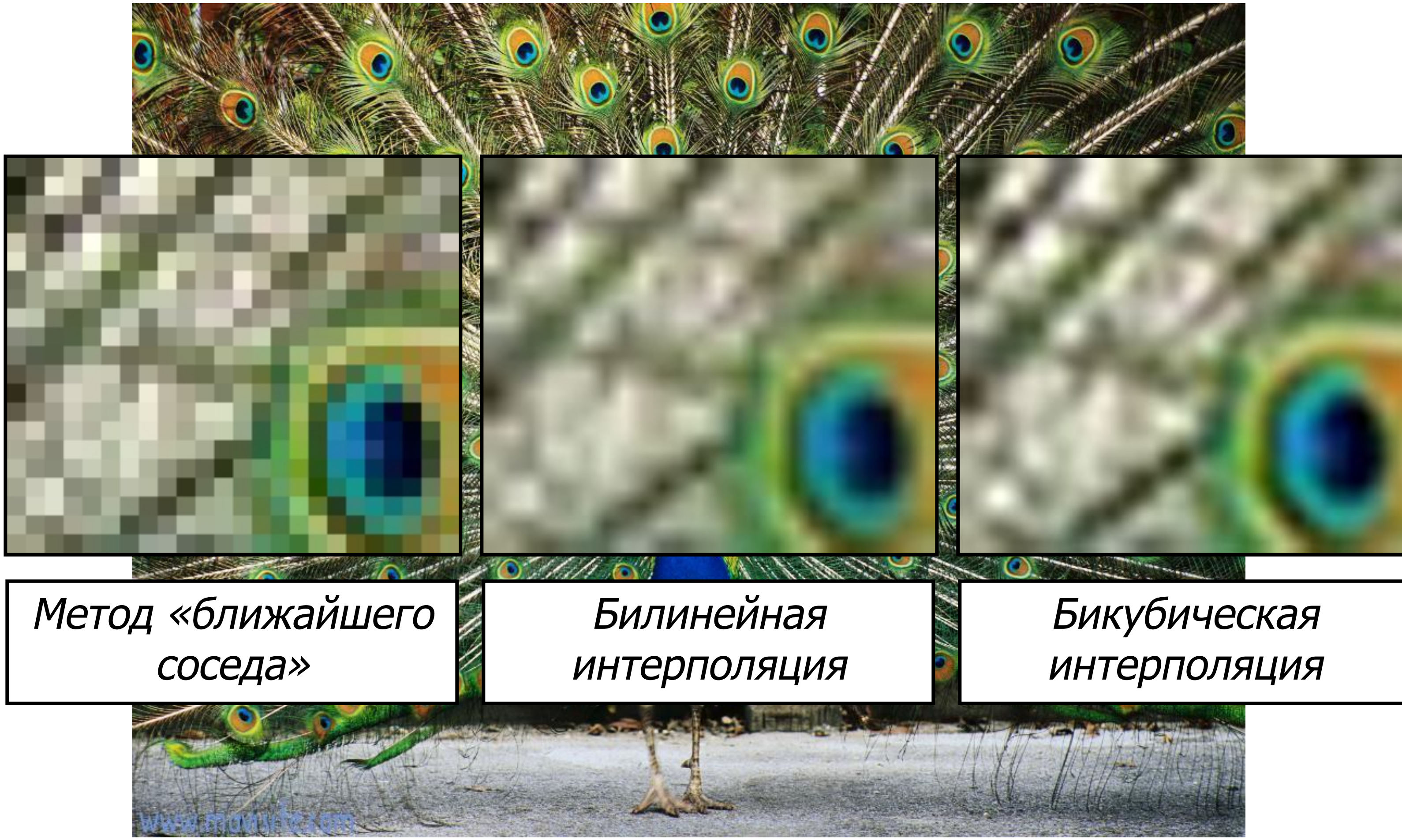
$$\left.\times (t - kT_Д)\right)\Pi(t - (k + \quad)T_Д)$$







ВОССТАНОВЛЕНИЕ НЕПРЕРЫВНОГО СИГНАЛА



А.С. Крылов
Лаборатория математических методов обработки изображений, МГУ

ПРОБЛЕМА НАЛОЖЕНИЯ СПЕКТРОВ

наложение спектров

предварительная НЧ фильтрация

$$\Delta t = \frac{6}{2 f_в}$$

Из лекций
Tomas Svoboda

ПОГРЕШНОСТИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНОГО СИГНАЛА

Нормированная СКО восстановления

$$\frac{\overline{\varepsilon^2}}{\overline{s^2(t)}} = \frac{\overline{(s(t)-\tilde{s}(t))^2}}{\overline{s^2(t)}} = \frac{\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T (s(t)-\tilde{s}(t))^2\,dt}{\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T (s(t))^2\,dt}$$

Нормированная СКО, обусловленная ограничением полосы сигнала

$$\frac{\overline{\varepsilon_0^2}}{\overline{s^2(t)}} = \frac{\int_{f_B}^{\infty} G_s(f)\,df}{\int_0^{\infty} G_s(f)\,df}$$

ПРИМЕР

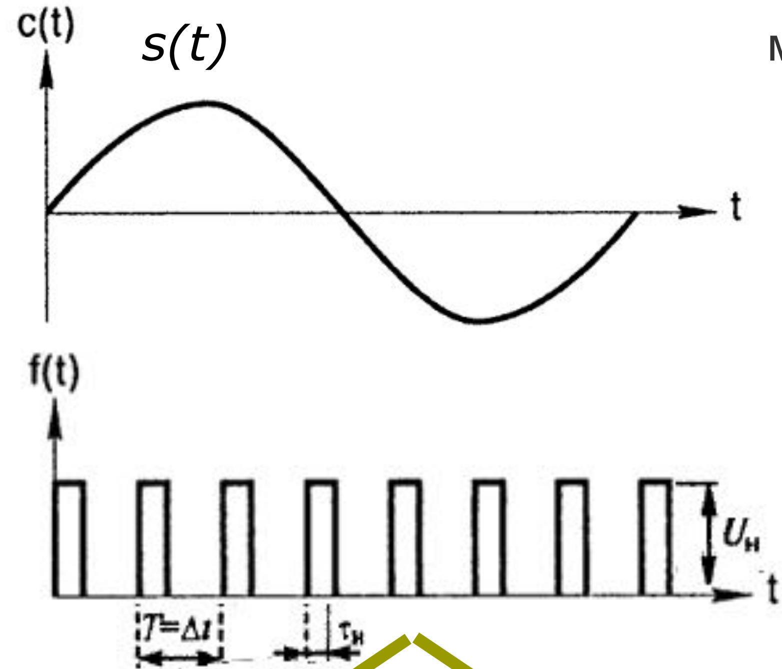
Найти верхнюю частоту ограничения полосы сигнала, если нормированная СКО равна 1% и СПМ сигнала

$$G(f) = \frac{2\alpha\sigma_x^2}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} \qquad \Delta f_э = \frac{\alpha}{2} \qquad \frac{\overline{\varepsilon_0^2}}{\overline{s^2(t)}} = \frac{\int_{f_B}^{\infty} G_s(f)df}{\int_0^{\infty} G_s(f)df}$$

$$0.01 = \frac{\int_{f_B}^{\infty} \frac{2\alpha\sigma_x^2}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} df}{\int_0^{\infty} \frac{2\alpha\sigma_x^2}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} df} = \frac{\int_{f_B}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} df}{\int_0^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} df} = 1 - \frac{2}{\pi} arctg(\frac{2 f_B \pi}{\alpha})$$

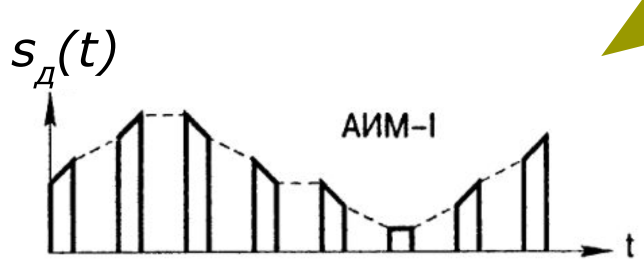
$$f_B \approx 10.15\alpha \approx 20.3\Delta f$$

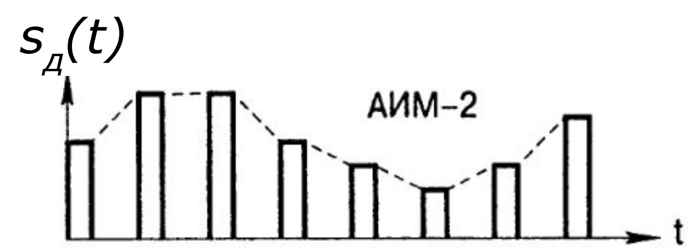
АИМ-1 и АИМ-2



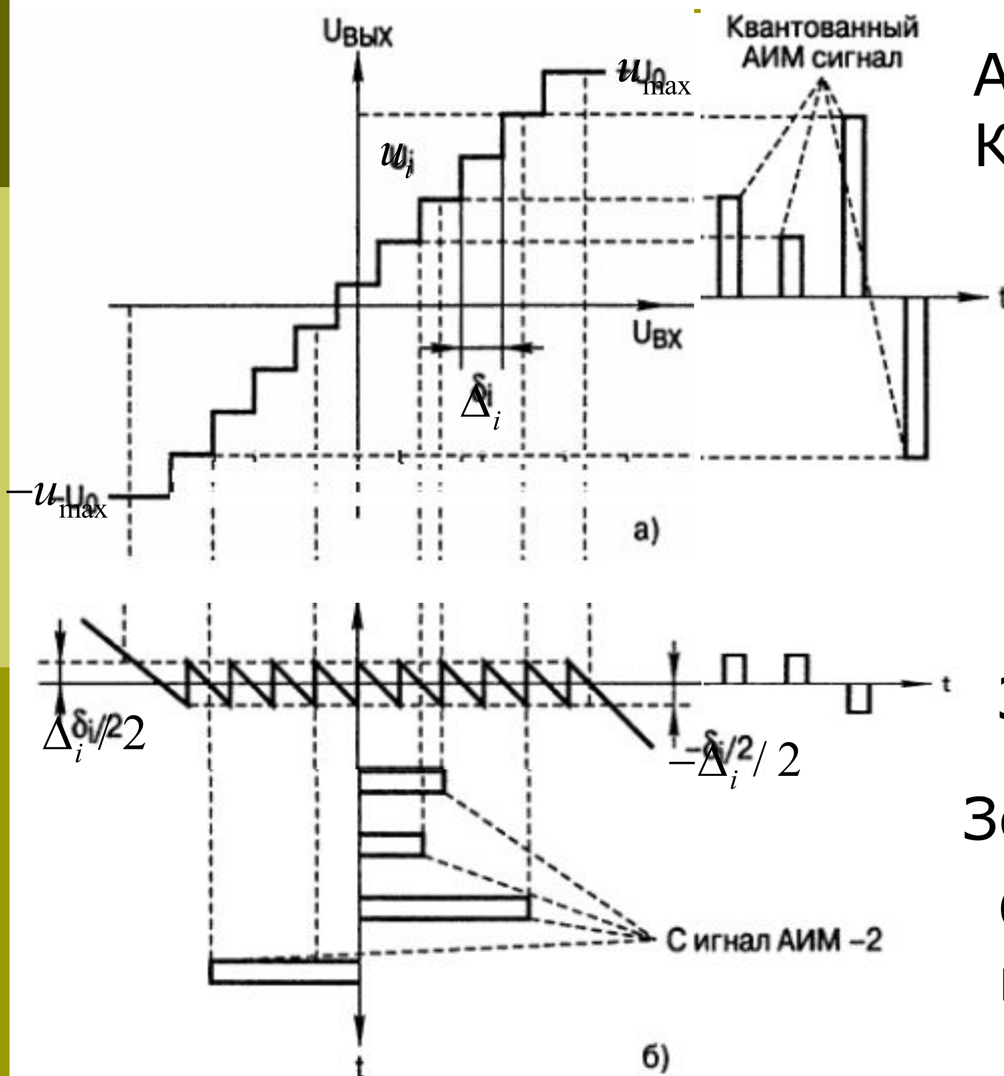
модулирующий сигнал

периодическая последовательность импульсов





ПРОЦЕСС КВАНТОВАНИЯ. ШУМЫ КВАНТОВАНИЯ



Амплитудная характеристика КУ:

$$u_{кв} = \phi(u_{вх})$$

$$u_{вх} - \frac{\Delta}{2} \le u_i < u + \frac{\Delta}{2}$$

$$u_{кв} = u_i$$

Зона квантования: $\left|u_{вх}\right| < u_{\max}$

Зона ограничения: $|\, u_{вх} \,| \ge u_{\max}$

Ошибка или шум квантования:

$$\varepsilon(t) = u_{вх}(t) - u_{кв}(t)$$

КВАНТОВАНИЕ ПО УРОВНЮ

1. Значения отсчетов округляются до ближайшего разрешенного уровня.
2. Отсчеты имеют строго фиксированные значения из числа заранее известных.
3. Каждому разрешенному уровню можно сопоставить определенное число.

Диапазон отсчетов сигнала : $2u_{max}$

Шаг квантования Δ - размер отдельных участков на которые разбивается непрерывный динамический диапазон отсчетов сигнала

Число разрешенных уровней квантования:

$$M = \frac{2u_{\max}}{\Delta} + 1 \qquad M \approx \frac{2u_{\max}}{\Delta}$$

ОЦЕНКА ШУМОВ ПРИ КВАНТОВАНИИ

Квантование называется **равномерным**, если величина шага квантования постоянная величина.

Квантование называется **неравномерным**, если величина шага квантования изменяется с изменением $u_{вх}$

Вероятность появления сигнала с уровнем, лежащим в пределах i-го шага квантования

$$p_i = P(u_{вх} - \frac{\Delta}{2} \,_i\!\le u \;\; < u + \frac{\Delta}{2})$$

$$= \int_{u_i - \frac{\Delta_i}{2}}^{u_i + \frac{\Delta_i}{2}} w(u_{вх}) du_{вх} \approx w(u_i)\Delta_i$$

ОЦЕНКА ШУМОВ ПРИ КВАНТОВАНИИ

Мгновенная мощность шума квантования, развиваемая на единичном сопротивлении, при квантовании сигналов, лежащих в пределах i-го шага квантования:

$$W_{мгн,i} = (u_{вх} - u_i)^2$$

Мощность шума квантования при квантовании сигналов, лежащих в пределах i-го шага квантования:

$$W_i = \int_{u_i - \frac{\Delta_i}{2}}^{u_i + \frac{\Delta_i}{2}} (u_{вх} - u_i)^2 w(u_{вх})\, du_{вх} \approx \frac{\Delta_i^2}{12} p_i$$

Полная мощность шума квантования: $W_{кв} = \sum_{i=1}^{M} W_i = \sum_{i=1}^{M} \frac{\Delta_i^2}{12} p_i$

МОДЕЛЬ ШУМА

1. Шум квантования является стационарным белым шумом

2. Шум квантования не коррелирован с входным сигналом

3. Распределение шума равномерно в любом интервале квантования

4. Диапазон квантования установлен таким образом, что он превышает размах сигнала.

- диапазон квантования используется полностью;
- количество отсчетов, не попадающих в него, достаточно мало

ОЦЕНКА ШУМОВ ПРИ РАВНОМЕРНОМ КВАНТОВАНИИ

При равномерной шкале квантования: $\Delta_i = \Delta$

$$W_{кв} = \sum_{i=1}^{M} \frac{\Delta_i^2}{12} p_i \quad \Rightarrow \quad W_{кв} = \frac{\Delta^2}{12}$$

Отношением сигнал-шум квантования (ОСШК):

$$W_{cp} = \sigma_c^2 \qquad q^2 = \frac{W_{cp}}{W_{кв}} = 12\frac{\sigma_c^2}{\Delta^2}$$

Отношением сигнал-шум квантования в дБ (защищенность сигнала от шума квантования):

$$A_{кв} = 10\lg\frac{W_{cp}}{W_{кв}} = 10\lg(12\frac{\sigma_c^2}{\Delta^2})$$

ОЦЕНКА ШУМОВ ПРИ РАВНОМЕРНОМ КВАНТОВАНИИ

Число уровней квантования :

$$M = \frac{2u_{\max}}{\Delta} + 1 \approx \frac{2u_{\max}}{\Delta} \qquad \Delta = \frac{2u_{\max}}{M}$$

Защищенность

$$A_{кв} = 10\lg(12\frac{\sigma_c^2}{\Delta^2}) = 10\lg(12M^2\frac{\sigma_c^2}{4u_{\max}^2})$$

$$= 10\lg 3 + 10\lg M^2 - 20\lg\frac{u_{\max}}{\sigma_c} \qquad M = 2^B$$

$$\boxed{A_{кв} = 4.77 + 20\lg M - 20\lg\frac{u_{\max}}{\sigma_c}} \quad \boxed{= 4,77 + 6B - 20\lg\frac{u_{\max}}{\sigma_c}}$$

Пример. $u_{\max} = 4\sigma_c$ $\quad A_{кв} = 6B - 7.2$

ПРИМЕР

Найти защищенность от шумов квантования гармонического сигнала со случайной фазой при M=16

$$\sigma_c^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} A^2\cos(2\pi f_0 t + \phi)^2\, d\phi = \frac{A^2}{2} \qquad u_{\max} = A$$

$$A_{KB}(дБ) = 6 \quad + 4,77 - 20\lg\frac{u_{\max}}{\sigma_c}$$

$$\approx 6\cdot 4 + 4.77 - 20\lg\sqrt{2} = 25.7дБ$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛА УРОВНЕЙ КВАНТОВАНИЯ

$$A_{кв} = 4.77 + 20\lg M - 20\lg \frac{u_{\max}}{\sigma_c};$$

$$M \approx 10^{0.05(A_{кв} - 4.77 + 20\lg \frac{u_{\max}}{\sigma_c})}$$

$$A_{кв} = 4,77 + 6B - 20\lg \frac{u_{\max}}{\sigma_c};$$

$$B \approx \frac{1}{6}(A_{кв} - 4.77 + 20\lg \frac{u_{\max}}{\sigma_c})$$

ПРИМЕР

Определить число уровней квантования двух двуполярных сигналов, если:

1. мощность первого сигнала на 30дБ больше мощности второго сигнала;
2. защищенность: $A_{кв} \geq 25$ дБ;
3. пик-фактор слабого и сильного сигналов: 18дБ.

На сколько отличается защищенность первого сигнала от второго?

ПРИМЕР

У сигналов одинаковый пик-фактор

$$20\lg\frac{u_{\max,1}}{\sigma_{c,1}} = 20\lg\frac{u_{\max,2}}{\sigma_{c,2}} = 18\partial Б;$$

Мощность первого сигнала на 30дБ больше мощности второго сигнала:

$$20\lg\frac{\sigma_{c,1}}{\sigma_{c,2}} = 30\partial Б;$$

Следовательно: $u_{\max,1} > u_{\max,2};$

Примем для квантователя: $u_{\max} = u_{\max,1};$

ПРИМЕР

Число разрядов квантования (максимальное)

$$B \approx \frac{1}{6}(A_{кв} - 4.77 + 20\lg\frac{u_{\max}}{\sigma_{c,2}})$$

$$20\lg\frac{u_{\max}}{\sigma_{c,2}} = 20\lg\frac{u_{\max,1}}{\sigma_{c,2}} = 20\lg\frac{u_{\max,1}}{\sigma_{c,2}}\frac{\sigma_{c,1}}{\sigma_{c,1}}$$

$$= 20\lg\frac{u_{\max,1}}{\sigma_{c,1}} + 20\lg\frac{\sigma_{c,1}}{\sigma_{c,2}} = 18 + 30 = 48 дБ$$

$$B \approx \frac{1}{6}(25 - 4.77 + 48) = 11.3 \quad \approx 12$$

ПРИМЕР

Защищенность для каждого из сигналов

$$B = 12$$

Для слабого сигнала

$$a_{KB,2}(B) = 6 \quad + 4,77 - 20\lg\frac{u_{\max}}{\sigma_{c,2}}$$

$$= 72 + 4,77 - 48 \quad = 28.77$$

Для сильного сигнала

$$a_{KB,1}(B) = 6 \quad + 4,77 - 20\lg\frac{u_{\max}}{\sigma_{c,1}}$$

$$= 72 + 4,77 - 18 \quad = 58.77$$

ЗАВИСИМОСТЬ ЗАЩИЩЕННОСТИ ОТ УРОВНЯ СИГНАЛА (РАВНОМЕРНОЕ КВАНТОВАНИЕ)

$$A_{КВ} = 6B + 4,77 - 20\lg\frac{u_{\max}}{\sigma_c} \qquad \Delta_i = \Delta$$

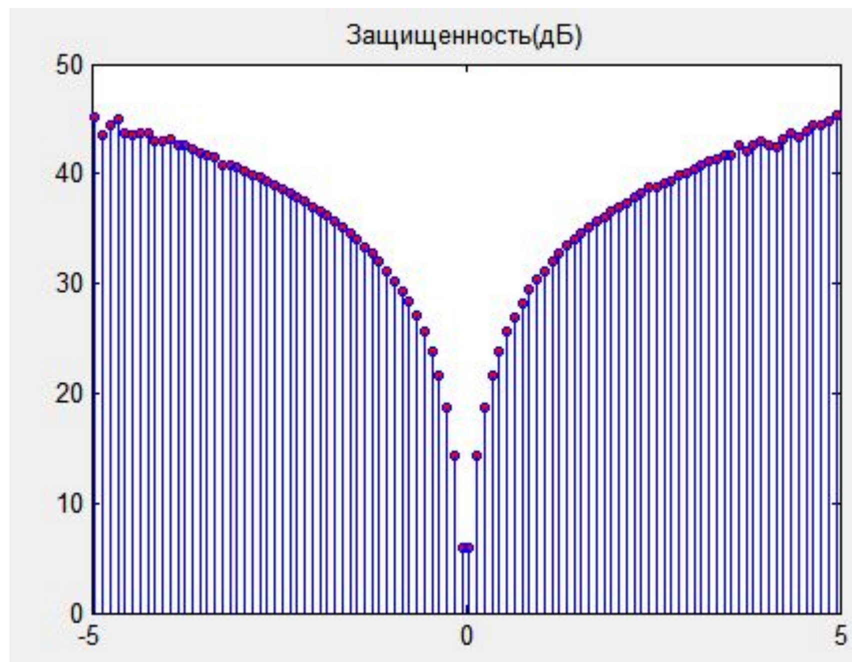
Мощность шума квантования для i-го уровня

$$W_{КВ,i} = \frac{1}{12}\Delta_i^2 p_i = \frac{1}{12}\Delta^2 p_i$$

Мощность сигнала для i-го уровня

$$W_{ср,i} \approx u_i^2 p_i$$

$$A_{КВ,i} = 10\lg\frac{W_{ср,i}}{W_{КВ,i}} = 10\lg(\frac{12u_i^2}{\Delta^2})$$

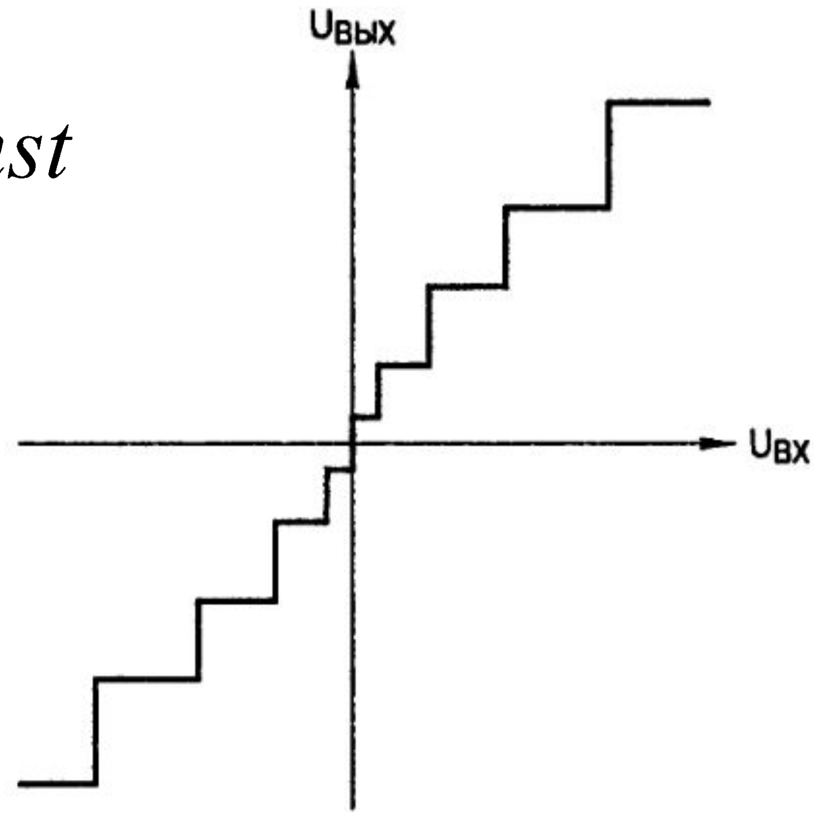


НЕРАВНОМЕРНОЕ КВАНТОВАНИЕ

Условие:постоянство защищенности от шумов квантования в заданном динамическом диапазоне для всех уровней входных сигналов:

$$A_{KB,i} = 10\lg\left(\frac{12u_i^2}{\Delta_i^2}\right) = const$$

$$\Delta_i \approx u_i\sqrt{12}\cdot 10^{-0.05\,A_{KB}}$$

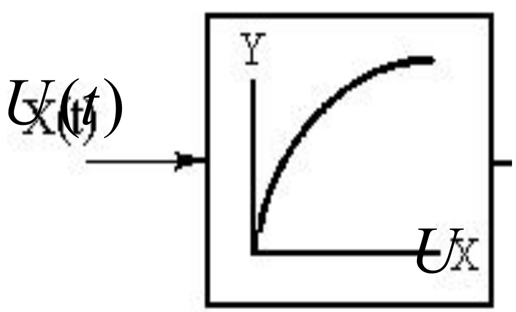


Неравномерная шкала квантования

РЕАЛИЗАЦИЯ НЕРАВНОМЕРНОГО КВАНТОВАНИЯ

Компандирование – процесс сжатия (компрессии), а затем расширения (экспандирования)

$$u_{вых,к}(u_{вх,к}) \cdot u_{вых,э}(u_{вх,к}) = 1$$

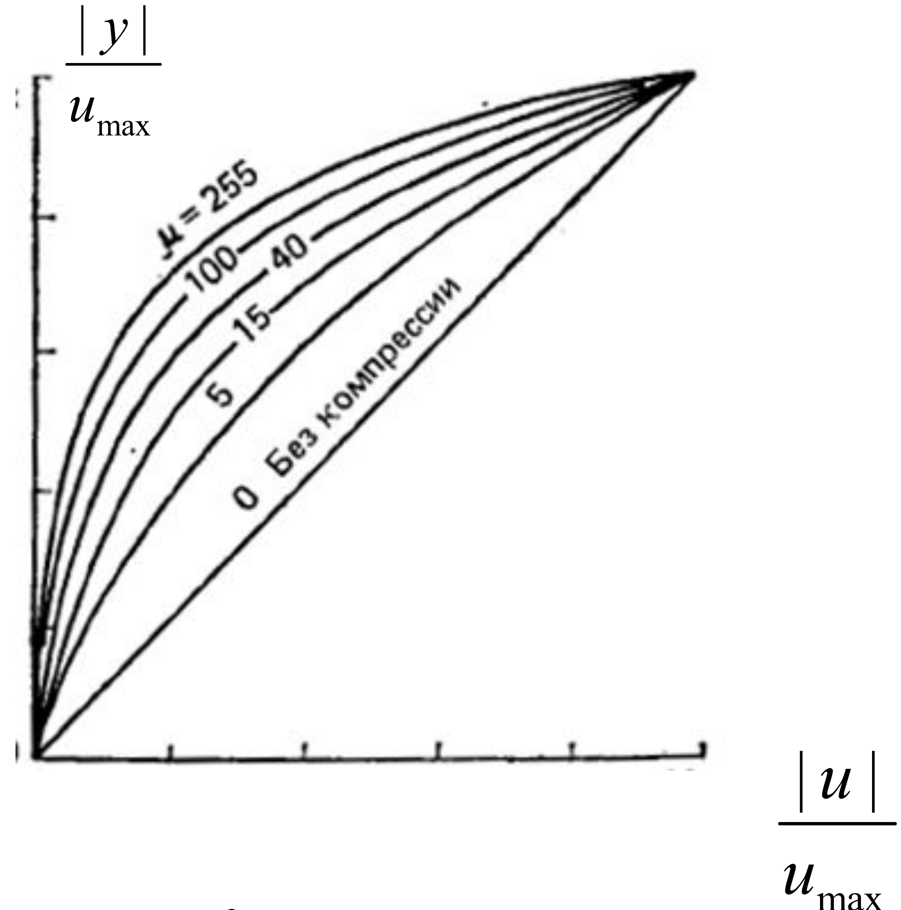


Сжатие

μ-ЗАКОН КОМПАНДИРОВАНИЯ

μ-закон компандирования

$$y = u_{\max} \frac{\ln\left(1+\mu \frac{|u|}{u_{\max}}\right)}{\ln(1+\mu)} sign(u)$$



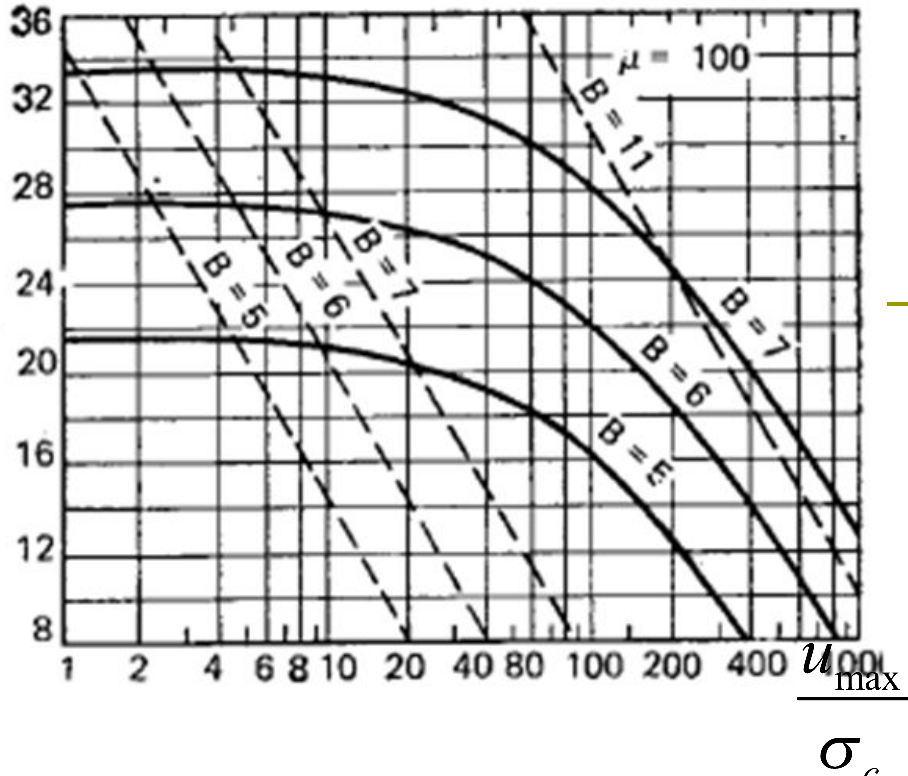
РАВНОМЕРНЫЙ КВАНТОВАТЕЛЬ

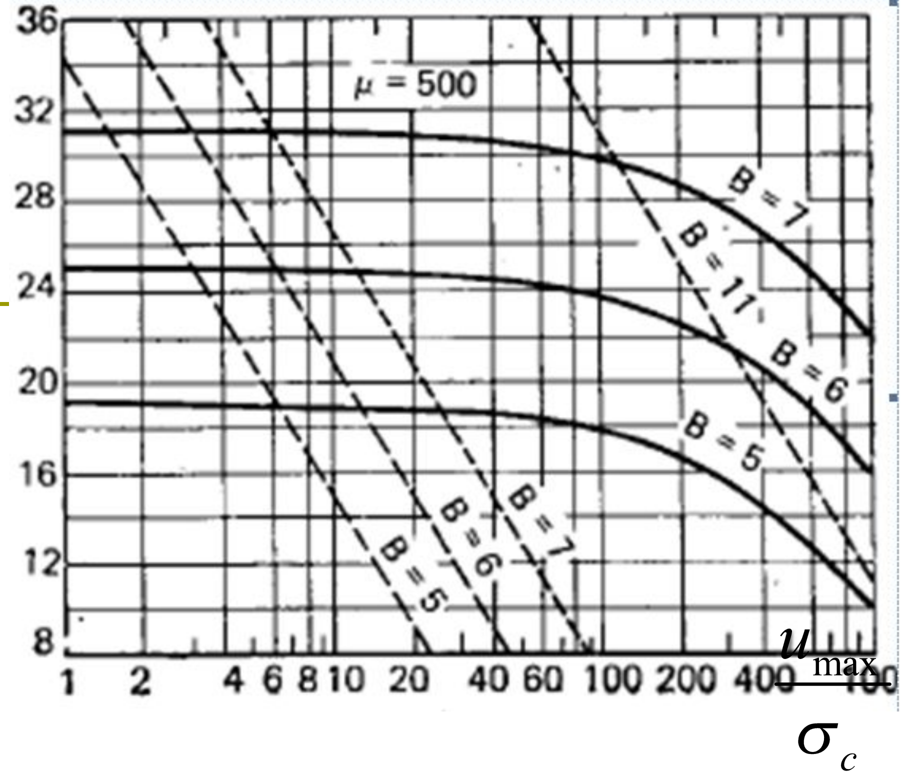
$$A_{KB}(дБ) = 6B + 4,77 - 20\lg\frac{u_{\max}}{\sigma_c}$$

μ-КВАНТОВАТЕЛЬ

$$A_{KB} = 6B + 4,77$$

$$-20\lg[\ln(1+\mu)] - 10\lg[1 + \left(\frac{u_{\max}}{\mu\sigma_c}\right)^2 + \sqrt{2}\left(\frac{u_{\max}}{\mu\sigma_c}\right)]$$





1.Отношение сигнал/шум более или менее постоянно в широком диапазоне

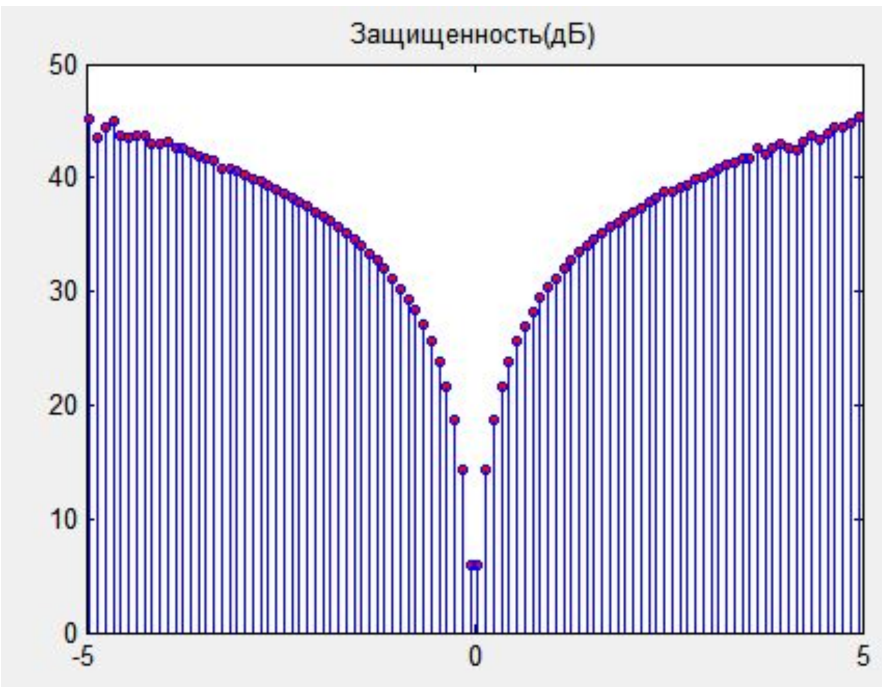
2. Используя большие значения коэффициента компрессии, мы получаем выигрыш в динамическом диапазоне ценой проигрыша в отношении сигнал/шум

3. При B=7 защищенность превышает 30 дБ в широком диапазоне уровней входного сигнала. Поэтому семиразрядная ИКМ с компрессией используется как стандарт для получения речевого сигнала с хорошим качеством

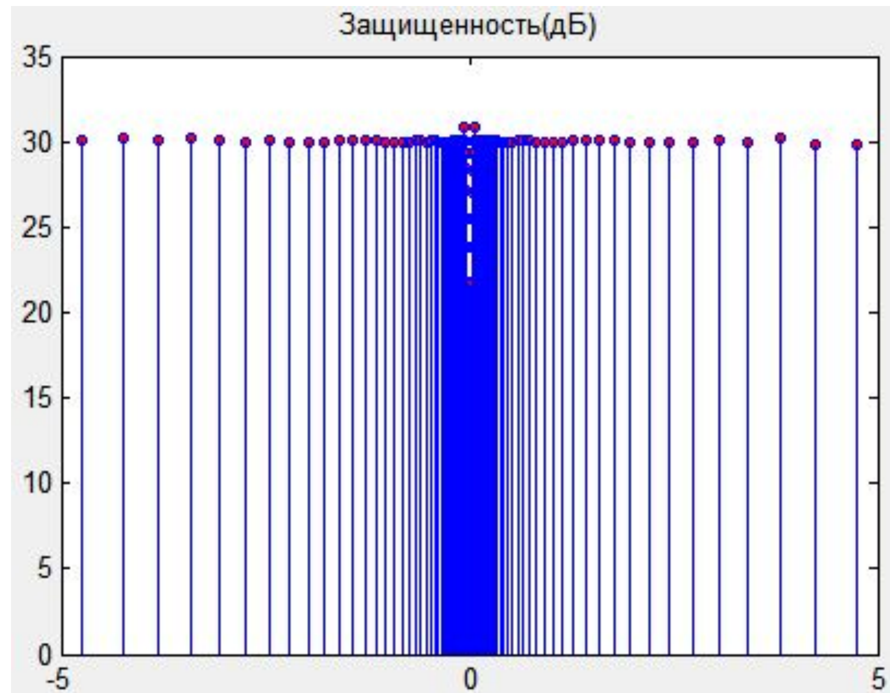
4. При равномерном квантовании для получения такого же динамического диапазона требуется 11 разрядов

ЗАВИСИМОСТЬ ЗАЩИЩЕННОСТИ ОТ УРОВНЯ СИГНАЛА (НЕРАВНОМЕРНОЕ КВАНТОВАНИЕ)

Равномерный квантователь



Неравномерный квантователь

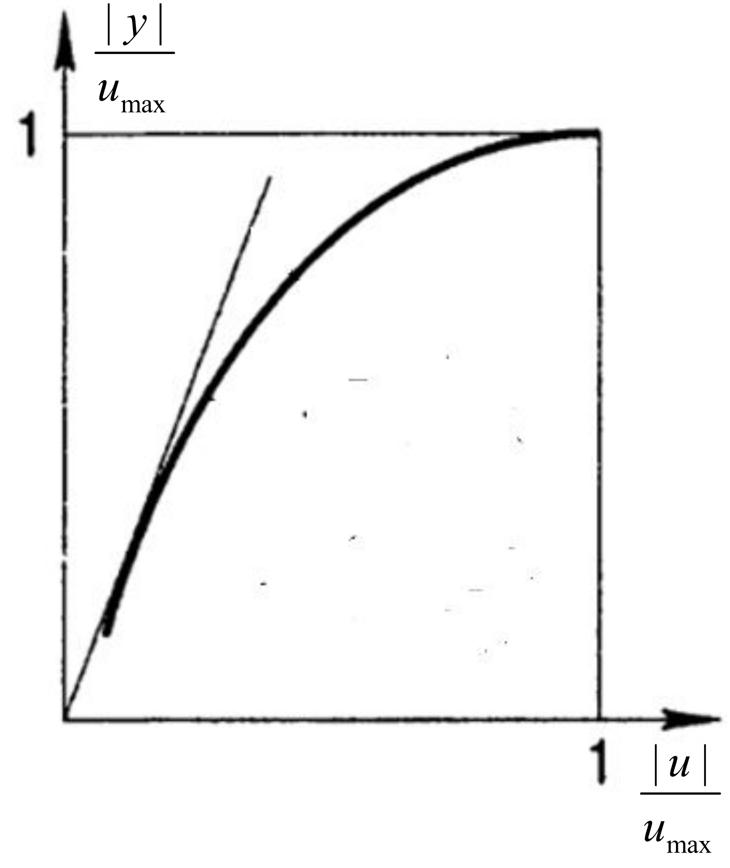


$$\mu = 255$$

А-ЗАКОН КОМПАНДИРОВАНИЯ

$$
y = \begin{cases}
u_{\max} \dfrac{A \dfrac{|u|}{u_{\max}}}{1+\ln A} sign(u), & \dfrac{|u|}{u_{\max}} < \dfrac{1}{A} \\[2em]
u_{\max} \dfrac{1+\ln A \dfrac{|u|}{u_{\max}}}{1+\ln A} sign(u), & \dfrac{|u|}{u_{\max}} > \dfrac{1}{A}
\end{cases}
$$

$$A = 87.6$$



ВЫИГРЫШ В ЗАЩИЩЕННОСТИ ПРИ НЕРАВНОМЕРНОМ КВАНТОВАНИИ ДЛЯ СЛАБЫХ СИГНАЛОВ (U<1/A)

При равномерном квантовании $$W_{КВ,р} = \frac{\Delta^2}{12}$$

При неравномерном квантовании для слабых сигналов

$$W_{КВ,н} = \frac{\Delta_{\min}^2}{12} \qquad \Delta_{\min} < \Delta$$

Выигрыш в защищенности за счет неравномерного квантования

$$\Delta A \approx 10\lg\frac{12u^2}{\Delta_{\min}^2} - 10\lg\frac{12u^2}{\Delta^2} = 20\lg\frac{\Delta}{\Delta_{\min}}$$

$$\frac{\Delta_{\min}}{\Delta} \approx \frac{A}{1+\ln A} \qquad A = 87.6 \qquad \Delta A\,\text{дБ} \approx 24$$

ШУМЫ ОГРАНИЧЕНИЯ

Мгновенное значение шума ограничения:

$$\varepsilon_{огр} = \begin{cases} u - u_{\max}; u > u_{\max} \\ u + u_{\max}; u < -u_{\max} \end{cases}$$

Вероятность появления шума ограничения

$$p_{огр} = \int_{-\infty}^{-u_{\max}} w(u)du + \int_{u_{\max}}^{\infty} w(u)du$$

Вероятность появления шума ограничения (для симметричных распределений):

$$p_{огр} = 2\int_{u_{\max}}^{\infty} w(u)du$$

ПРИМЕР. Мощность шума ограничения (для симметричных распределений)

$$W_{огр} = \frac{2}{p_{огр}} \int_{u_{\max}}^{\infty} (u - u_{\max})^2 w(u) du$$

Равномерное распределение:

$$w(u) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}, |u| \le \frac{\Delta}{2}, \\ 0, |u| > \Delta; \end{cases} \qquad \sigma_c = \frac{\Delta}{\sqrt{12}}$$

$$p_{огр} = 2\int_{U_{огр}}^{\Delta/2} \frac{1}{\Delta} du \quad = 2\frac{\Delta / 2 - U_{огр}}{\Delta}$$

$$= 1 - 2\frac{U_{огр}}{\Delta} \quad = 1 - \frac{U_{огр}}{\sqrt{3}\sigma_c}$$

ПРИМЕР

Гауссовское: $$w(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_c^2}}exp(-\frac{u^2}{2\sigma_c^2}) \qquad -\infty\le u\le\infty;$$

$$p_{ер}=2\int_{U_{огр}}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_c^2}}\exp(-\frac{u^2}{2\sigma_c^2})du \quad =2(1-\Phi(\frac{U_{огр}}{\sigma_c}))$$

Лапласа: $$w(u)=\frac{\alpha}{2}exp(-\alpha\,|\,u\,|) \qquad -\infty\le u\le\infty$$

$$p_{ер}=2\int_{U_{огр}}^{\infty}\frac{\alpha}{2}\exp(-\alpha\,|\,u\,|)du \qquad \sigma_c=\frac{\sqrt{2}}{\alpha}$$

$$=exp(-\alpha U_{огр}) \quad =exp(-\frac{\sqrt{2}U_{огр}}{\sigma_c})$$

ШУМЫ ОГРАНИЧЕНИЯ

Мощность шума ограничения и квантования (для симметричных распределений):

$$W_{огр} = \frac{2}{p_{огр}} \int_{u_{\max}}^{\infty} (u - u_{\max})^2 w(u) du$$

$$W_{кв} = \frac{2}{1 - p_{огр}} \int_{0}^{u_{\max}} (u - \phi(u))^2 w(u) du$$

Мощность общего шума, возникающего при квантовании:

$$W_{кв,s} = p_{огр} W_{огр} + (1 - p_{огр}) W_{кв}$$

КОДЕР И ДЕКОДЕР ИКМ