

решение

систем

тригонометрических

уравнений

1. Системы уравнений, в которых одно уравнение – алгебраическое, а другое – сумма или разность тригонометрических функций.

Примеры:

$$a) \begin{cases} x \pm y = a, \\ \sin x - \sin y = \frac{1}{2}; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} x + y = \frac{2}{3}\pi, \\ \operatorname{tg}x + \operatorname{tgy} = 2\sqrt{3}; \end{cases}$$

$$в) \begin{cases} x + y = \frac{5}{6}\pi, \\ \cos^2 x + \cos^2 y = \frac{1}{4}; \end{cases}$$

$$г) \begin{cases} x - y = \frac{\pi}{3}, \\ \operatorname{ctgx} - \operatorname{ctgy} = -\sqrt{3}. \end{cases}$$

2. Системы уравнений, в которых одно уравнение – алгебраическое, а другое – произведение тригонометрических функций.

Примеры:

$$a) \begin{cases} x \pm y = a, \\ \sin x \cdot \sin y = b; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} x \pm y = a, \\ \sin x \cdot \cos y = b; \end{cases}$$

$$в) \begin{cases} x \pm y = a, \\ \cos x \cdot \cos y = b; \end{cases}$$

$$г) \begin{cases} x + y = \frac{7}{12}\pi, \\ \operatorname{tg}x \cdot \operatorname{ctg}y = \frac{\sqrt{3}}{3}; \end{cases}$$

$$д) \begin{cases} x + y = \pi, \\ \operatorname{ctg}x \cdot \operatorname{ctg}y = -\frac{1}{3}. \end{cases}$$

3. Системы уравнений, в которых одно уравнение – алгебраическое, а другое – отношение тригонометрических функций.

Примеры:

$$a) \begin{cases} x \pm y = a, \\ \frac{\sin x}{\sin y} = b; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} x \pm y = a, \\ \frac{tgx}{tgy} = b; \end{cases}$$

$$в) \begin{cases} x \pm y = a, \\ \frac{ctgx}{ctgy} = b; \end{cases}$$

$$г) \begin{cases} x \pm y = a, \\ \frac{\cos x}{\cos y} = b; \end{cases}$$

$$д) \begin{cases} x \pm y = a, \\ \frac{\cos x}{\sin y} = b; \end{cases}$$

4. Системы уравнений, содержащих только тригонометрические функции.

Примеры:

$$a) \begin{cases} \sin x + \cos y = \frac{1}{4}, \\ \sin^2 x + \cos^2 y = \frac{1}{2}; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \operatorname{tg} \frac{y}{2} = 2, \\ \operatorname{ctgx} + \operatorname{ctgy} = -1,8; \end{cases}$$

$$в) \begin{cases} \sin x \cdot \sin y = \frac{1}{4}, \\ \cos x \cdot \cos y = \frac{3}{4}; \end{cases}$$

$$г) \begin{cases} 3\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}^3 y, \\ \cos x = \sin 2y. \end{cases}$$

1. Решить систему уравнений

$$x - y = \frac{\pi}{3},$$

$$\cos x + \cos y = \frac{3}{2}.$$

Решение.

$$x - y = \frac{\pi}{3}, (1)$$

$$\cos x + \cos y = \frac{3}{2}; (2).$$

Из (2) следует: $2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} = \frac{3}{2}.$

Из (1) следует: $2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{6} = \frac{3}{2},$

$$2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}, \cos \frac{x+y}{2} = \frac{3}{2\sqrt{3}}, \cos \frac{x+y}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\cos \frac{x+y}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\frac{x+y}{2} = \pm \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z},$$

$$\frac{x+y}{2} = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z},$$

$$x+y = \pm \frac{\pi}{3} + 4\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Запишем систему:

$$\begin{cases} x+y = \pm \frac{\pi}{3} + 4\pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ x-y = \frac{\pi}{3}; \end{cases}$$

Запишем систему:

$$\begin{cases} x + y = \pm \frac{\pi}{3} + 4\pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ x - y = \frac{\pi}{3}; \end{cases}$$

Если сложить и вычесть уравнения системы, то получим систему, равносильную исходной.

$$\begin{cases} 2x = \pm \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + 4\pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ 2y = \pm \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} + 4\pi n, n \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = \pm \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + 4\pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ 2y = \pm \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} + 4\pi n, n \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \\ y = \pm \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n + \frac{\pi}{6}, y = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n - \frac{\pi}{6}, n \in \mathbb{Z}.$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{6}, \\ \cos x \cdot \sin y = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{6}, (1) \\ \cos x \cdot \sin y = \frac{1}{4} (2); \end{cases}$$

Из (2) следует:

$$\frac{1}{2}(\sin(x + y) + \sin(y - x)) = \frac{1}{4},$$

$$(\sin(x + y) + \sin(y - x)) = \frac{1}{2}.$$

Из (1) следует:

$$\sin(x + y) - \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2},$$

$$\sin(x + y) = 1,$$

$$x + y = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Запишем систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ x - y = \frac{\pi}{6}; \end{cases}$$

Складывая и вычитая уравнения системы, получим систему, равносильную исходной:

$$\begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \\ 2y = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \\ 2y = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \pi n, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{3} \cdot (3n + 1), y = \frac{\pi}{6} (6n + 1), n \in \mathbb{Z}$

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{6}, \\ \frac{\sin x}{\cos y} = 2. \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{6}, \\ \frac{\sin x}{\cos y} = 2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x - \frac{\pi}{6}, \\ \sin x = 2 \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right); \end{cases}$$

Решим второе уравнение системы: $\sin x = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$, (1).

Правую часть уравнения (1) распишем по формуле косинуса разности:

$$\sin x = 2 \cos x \cdot \cos \frac{\pi}{6} + 2 \sin x \cdot \sin \frac{\pi}{6},$$

$$\sin x = \sqrt{3} \cos x + \sin x,$$

откуда $\cos x = 0$,

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ y = x - \frac{\pi}{6}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \\ y = \frac{\pi}{2} + \pi n - \frac{\pi}{6}, n \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \\ y = \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, y = \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x \cdot \cos y = \frac{\sqrt{3}}{4}, \\ \cos x \cdot \sin y = \frac{\sqrt{3}}{4}. \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} \sin x \cdot \cos y = \frac{\sqrt{3}}{4}, \\ \cos x \cdot \sin y = \frac{\sqrt{3}}{4}. \end{cases}$$

Если сложить и вычесть уравнения системы, то получим систему равносильную исходной. Итак:

$$\begin{cases} \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y = 0. \end{cases}$$

Применим формулы сложения:

$$\begin{cases} \sin(x + y) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \sin(x - y) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ x - y = \pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

При решении независимых простейших уравнений необходимо писать разные целочисленные параметры, иначе будет потеряно множество корней.

Сложим и вычтем уравнения системы(1):

$$\begin{cases} 2x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n + \pi k, n, k \in \mathbb{Z}, \\ 2y = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n - \pi k, n, k \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} (n+k)\pi, n, k \in \mathbb{Z}, \\ y = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} (n-k)\pi, n, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

ОТВЕТ: $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} (n+k) \cdot \pi,$

$$y = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} (n-k) \cdot \pi, n, k \in \mathbb{Z}$$