

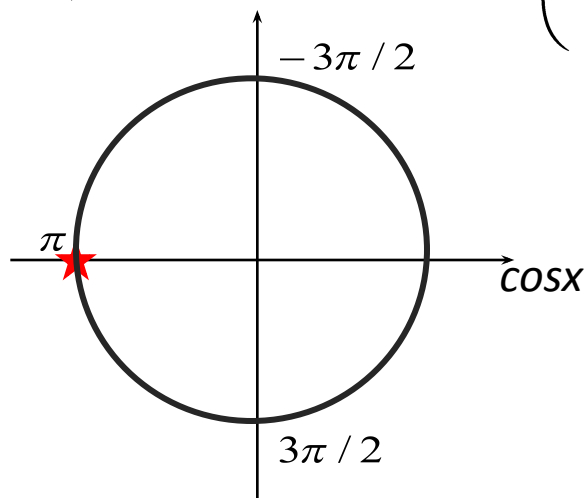
Отбор корней при решении тригонометрических уравнений

учитель математики
Королева Е.В.

**Решите уравнение и определите его корни
удовлетворяющие дополнительному условию:**

а) $\cos x = -1$;

$$x \in \left(-\frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right)$$



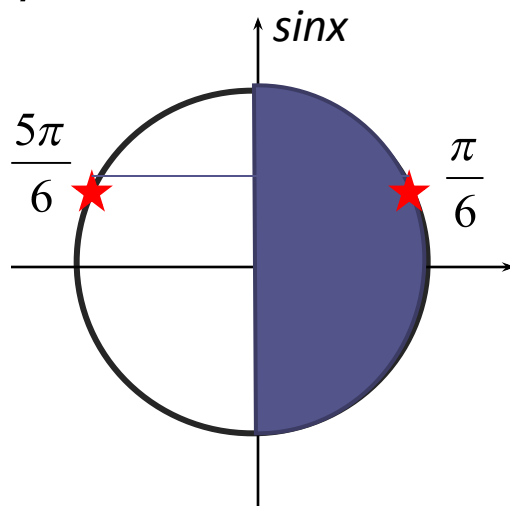
$$x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pm\pi$$

**Решите уравнение и определите его корни
удовлетворяющие дополнительному условию:**

б) $\sin x = 1/2$

$\cos x > 0$



$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k,$$

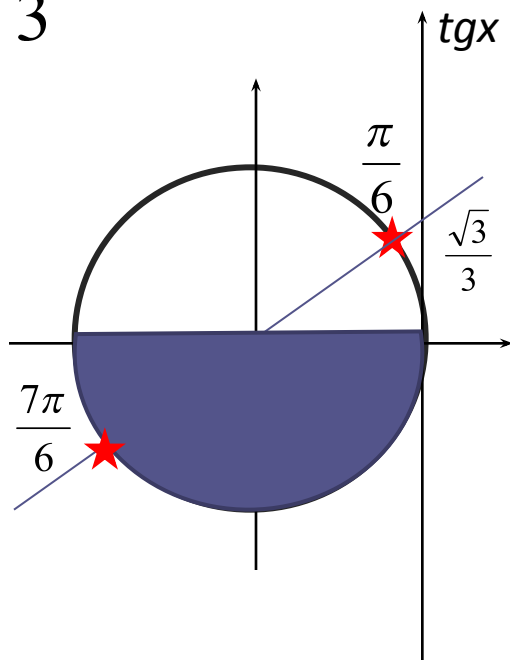
$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

**Решите уравнение и определите его корни
удовлетворяющие дополнительному условию:**

$$\text{в) } \operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\sin x < 0$$



$$x = \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Отбор корней в тригонометрическом уравнении с помощью числовой окружности

Пример: 1.

- а) решите уравнение $\sin x \sin 2x = \sin^2 x$,
б) определите корни принадлежащие интервалу $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right)$

Решение.

$$\sin x \sin 2x - \sin^2 x = 0$$

$$\sin x 2\sin x \cos x - \sin^2 x = 0$$

$$2 \sin^2 x \cos x - \sin^2 x = 0$$

$$\sin^2 x (2\cos x - 1) = 0$$

$$\sin^2 x = 0 \quad \text{или} \quad 2\cos x - 1 = 0$$

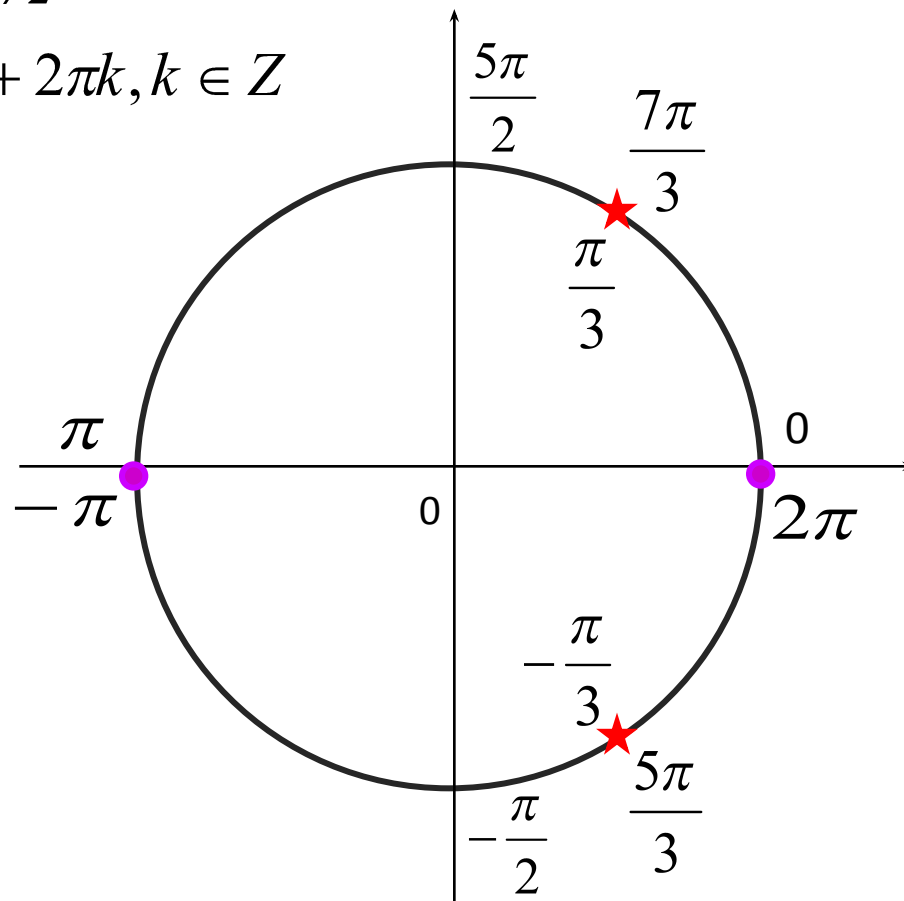
$$\sin x = 0 \qquad \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\sin x = 0$$

$$x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$



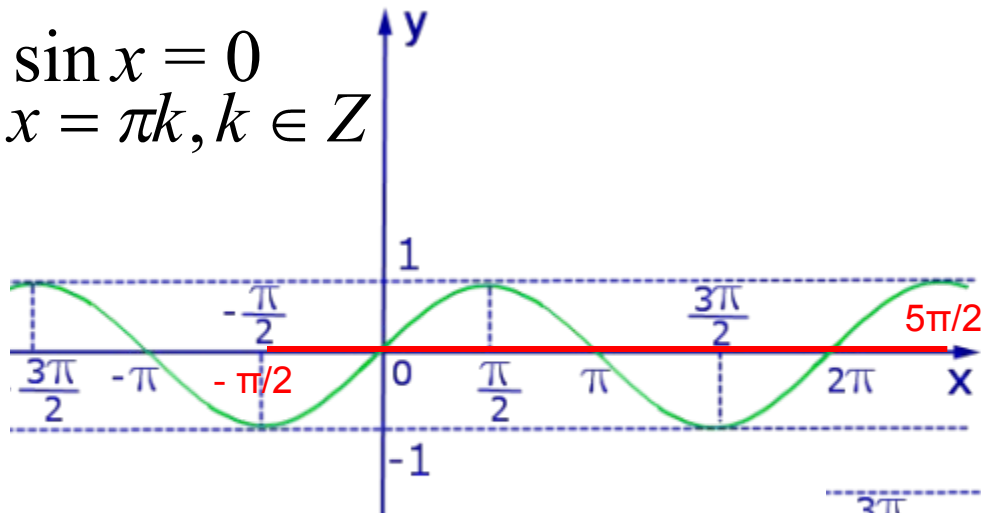
$$\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right)$$

$$-\frac{\pi}{3}; 0; \frac{\pi}{3}; \pi; \frac{5\pi}{3}; 2\pi; \frac{7\pi}{3}.$$

2. Отбор корней в тригонометрическом уравнении с помощью графиков тригонометрических функций.

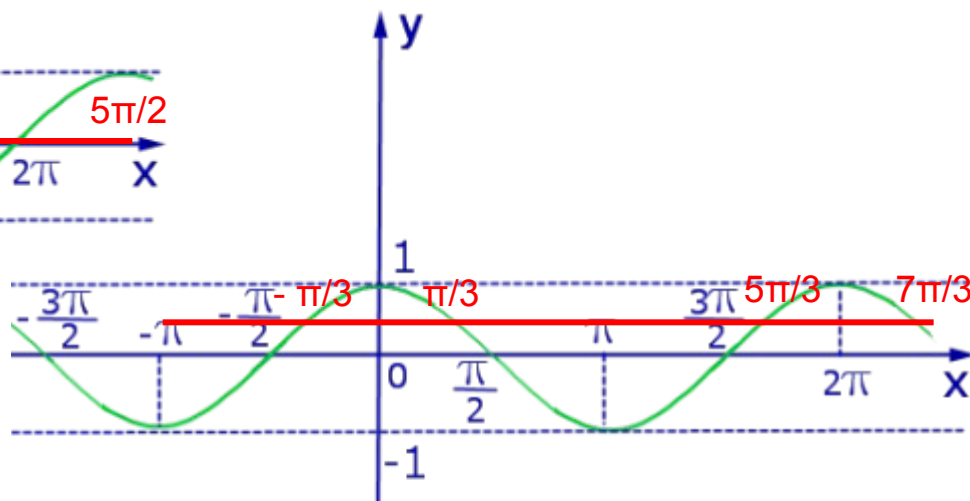
$$\sin x = 0$$

$$x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$



$$\cos x = 1/2$$

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$



$$\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2} \right)$$

$$-\frac{\pi}{3}; 0; \frac{\pi}{3}; \pi; \frac{5\pi}{3}; 2\pi; \frac{7\pi}{3}.$$

Изложенные выше способы отбора корней в тригонометрических уравнениях не всегда применяются в чистом виде: выбор способа зависит от конкретных условий, но иногда эти способы комбинируются.

Пример 3. Найти все корни уравнения

$$10 \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} + x \right) = \sin \left(\frac{7\pi}{2} + 2x \right) + 3,$$

которые удовлетворяют условию $x \in \left[-\frac{2\pi}{3}; \frac{19\pi}{12} \right]$.

Решение.

$$10 \sin^2 x = -\cos 2x + 3;$$

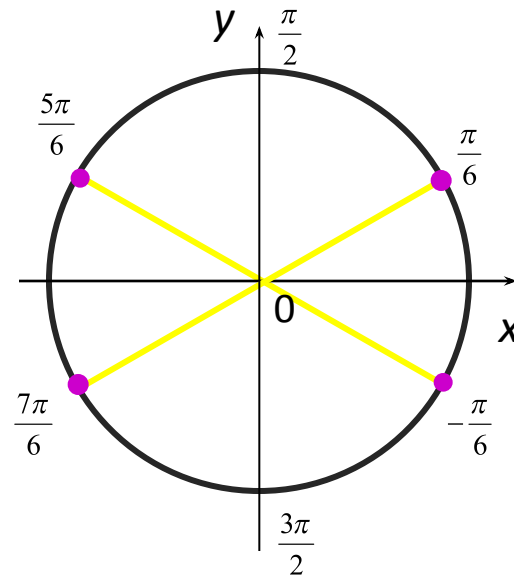
$$10 \sin^2 x = 2 \sin^2 x - 1 + 3,$$

$$8 \sin^2 x = 2;$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{4};$$

$$\sin x = \pm \frac{1}{2};$$

$$\begin{cases} x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ x = (-1)^m \cdot \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi m, m \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$



С помощью числовой окружности получим:

$$x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

Выберем с помощью двойного неравенства корни, удовлетворяющие условию задачи.

$$\begin{aligned}\text{Из первой серии: } -\frac{2\pi}{3} &\leq \frac{\pi}{6} + \pi n \leq \frac{19\pi}{12}, n \in \mathbb{Z}; \\ -8\pi &\leq 2\pi + 12\pi n \leq 19\pi, n \in \mathbb{Z}; \\ -10 &\leq 12n \leq 17, n \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

$$\text{Следовательно } n=0 \text{ или } n=1, \text{ то есть } \begin{cases} x = \frac{\pi}{6}, \\ x = \frac{7\pi}{6}. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\text{Из второй серии: } -\frac{2\pi}{3} &\leq -\frac{\pi}{6} + \pi n \leq \frac{19\pi}{12}, n \in \mathbb{Z}; \\ -8\pi &\leq -2\pi + 12\pi n \leq 19\pi, n \in \mathbb{Z}; \\ -6 &\leq 12n \leq 21, n \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

$$\text{Следовательно } n=0 \text{ или } n=1, \text{ то есть } \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6}, \\ x = \frac{5\pi}{6}. \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \pm \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6} \right\}.$$

Работа в парах (по вариантам).

Решите уравнение и определите его корни
принадлежащие интервалу $(-\pi; 2\pi)$

1). $6\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

2). $3\sin 2x - \sin x = 0$

3). $\operatorname{tg} x + 5\operatorname{ctg} x = 6$

4). $1 + \cos x + \cos 2x = 0$

5). $\sin x + \cos x = 0$

6). $\sin^2 x - 2\sin x \cos x - \cos^2 x = 2$

7). $\sin^2 x - 2\sin x \cos x = 3\cos^2 x$

8). $\cos^2 x - \sqrt{3}\sin x \cos x = 0$

Спасибо за урок!