

ПРЯМОУГОЛЬНИК, РОМБ, КВАДРАТ

НОВАКОВА С.А.

АСТРАХАНЬ, СОШ № 23

Прямоугольник

- Прямоугольником называется параллелограмм, у которого все углы прямые (равны 90° градусам).
- *Примечание.* В евклидовой геометрии. В евклидовой геометрии для того, чтобы четырёхугольник был прямоугольником, достаточно, чтобы хотя бы три его угла были прямые. Четвёртый угол (в силу теоремы о сумме углов многоугольника) также будет равен 90° . В неевклидовой геометрии, где сумма углов четырёхугольника не равна 360° - прямоугольников не существует.



СВОЙСТВА ПРЯМОУГОЛЬНИКА

- Прямоугольник является параллелограммом – его противоположные стороны параллельны.
- Стороны прямоугольника являются одновременно его высотами.
- Квадрат диагонали прямоугольника равен сумме квадратов двух его смежных сторон (по теореме Пифагора).
- Около любого прямоугольника можно описать окружность, причем диагональ прямоугольника равна диаметру описанной окружности. (радиус равен полудиagonали)



ПЛОЩАДЬ И СТОРОНЫ

- Длинной прямоугольника называют длинну более длинной пары его сторон, а шириной – длину более короткой пары сторон.
- Величина площади прямоугольника равна произведению ширины прямоугольника на его длину (высоту).
- Периметр прямоугольника равен удвоенной сумме длин его ширины и длины.



ДИАГОНАЛИ ПРЯМОУГОЛЬНИКА

- Диагонали прямоугольника равны.
- Диагонали прямоугольника делятся точкой пересечения пополам.
- Длина диагонали прямоугольника вычисляется по теореме Пифагора и равна квадратному корню из суммы квадратов длины и ширины.



ПРИЗНАКИ

Параллелограмм является прямоугольником, если выполняются условия:

- Если 4 угла равны 90 градусам, то это прямоугольник
- Если диагонали параллелограмма равны.
- Если квадрат диагонали параллелограмма равен сумме квадратов смежных сторон.



РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

Задача №1

Докажите, что параллелограмм, один из углов которого прямой, является прямоугольником.

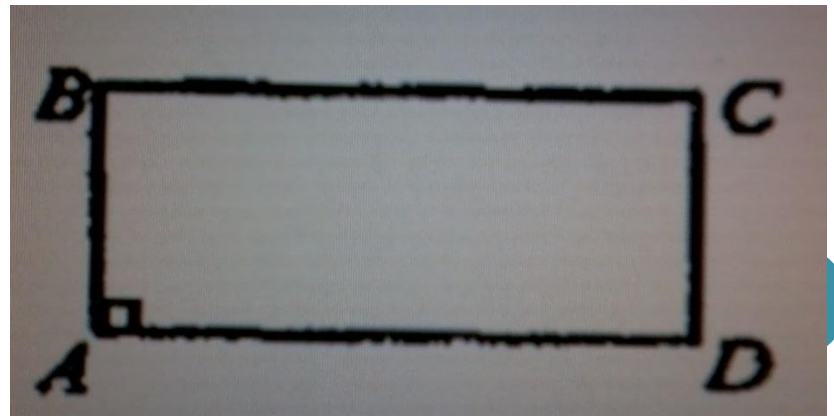
Дано:

ABCD- параллелограмм

$$\angle A = 90^\circ$$

Доказать:

ABCD-прямоугольник



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

ABCD-параллелограмм, следовательно,
 $AB=CD$, $BC=AD$, угол A=угол C=
90градусов; угол B= угол D.

Т.к. угол A+ угол B= 180 градусов, то угол
 $B= 180\text{градусов} - 90\text{градусов} = 90\text{градусов}$
т.е. в ABCD стороны попарно равны; все
углы прямые, следовательно, ABCD-
прямоугольник.

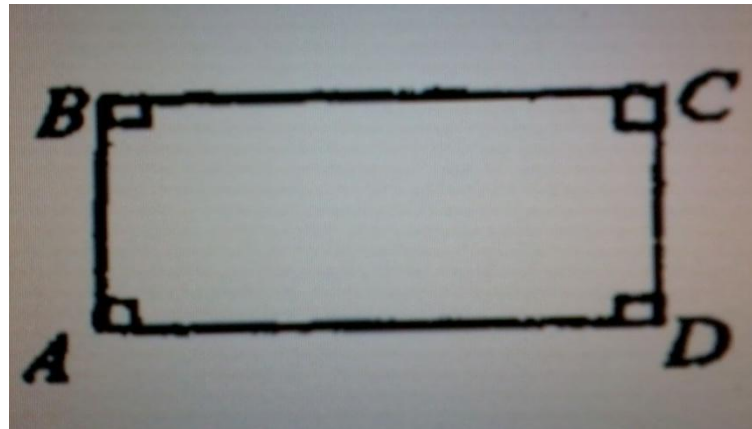


Задача №2

Докажите, что если в четырехугольнике все углы прямые, то четырехугольник - прямоугольник.

Дано: угол $A =$ углу $B =$ углу $C =$ углу $D = 90$ градусов

Доказать: $ABCD$ - прямоугольник



Док-во:

угол $A + \text{угол } B = 180^\circ$ градусов

угол A , угол B - односторонние при AD и BC и секущей AB , следовательно, $AD \parallel BC$; также, $AB \parallel CD$, угол B , угол C - односторонние при CD и AB и секущей BC ;

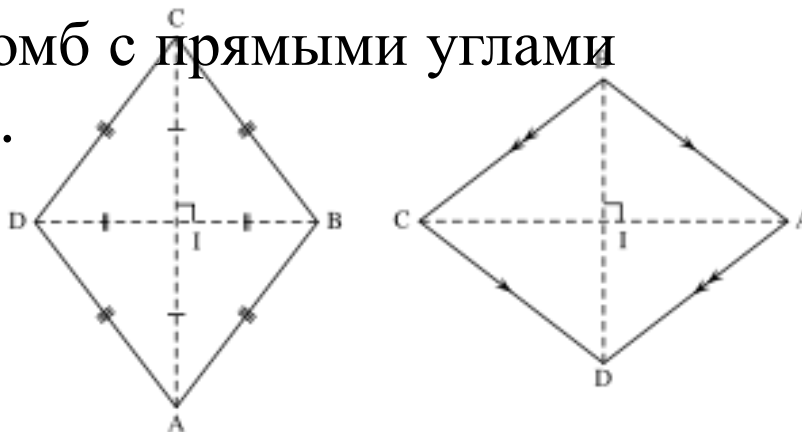
$AD \parallel BC$, $AB \parallel CD$, следовательно, $ABCD$ - прямоугольник.

Ч.т.д.

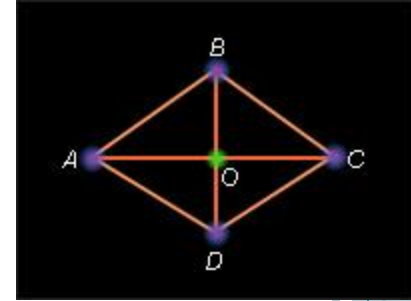


Ромб

- Ромб (др.-греч. (др.-греч. $\rho\acute{o}\mu\beta\omicron\varsigma$, лат. *rombus* «бубен «бубен») — это четырёхугольник «бубен») — это четырёхугольник, у которого все стороны равны. Ромб является параллелограммом «бубен») — это четырёхугольник, у которого все стороны равны. Ромб является параллелограммом. Ромб с прямыми углами «бубен») — это четырёхугольник, у которого все стороны равны. Ромб является параллелограммом. Ромб с прямыми углами называется квадратом.



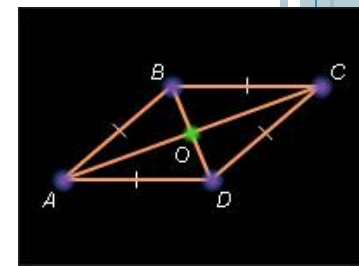
СВОЙСТВА



- Ромб является параллелограммом. Ромб является параллелограммом. Его противоположные стороны попарно параллельны, $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$.
- Диагонали Диагонали ромба пересекаются под прямым углом ($AC \perp BD$) и в точке пересечения делятся пополам.

Доказательство

Пусть $ABCD$ – данный ромб. Рассмотрим треугольник ABD . $AB = AD$ по условию, и, следовательно, $\triangle ABD$ равнобедренный. Так как $ABCD$ – параллелограмм, то $BO = OD$. Тогда AO – медиана и по теореме 4.4 AO – высота в треугольнике BAD . Следовательно, $(AC) \perp (BD)$.

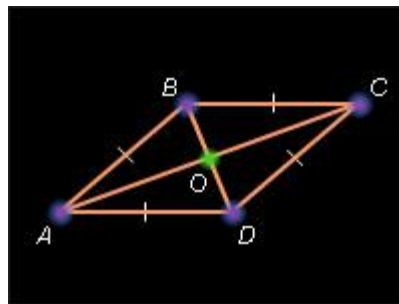


- Диагонали ромба являются биссектрисами его углов ($\angle DCA = \angle BSA$, $\angle ABD = \angle CBD$ и т. д.).

Доказательство

Пусть $ABCD$ – данный ромб. Рассмотрим треугольник ABD . $AB = AD$ по условию, и, следовательно, $\triangle ABD$ – равнобедренный. Так как $ABCD$ – параллелограмм, то $BO = OD$. Тогда AO – медиана и по теореме 4.4 AO – биссектриса в треугольнике BAD . Следовательно, $\angle BAO = \angle DAO$. Аналогично, рассмотрев треугольник ABC , получаем, что BO – медиана в равнобедренном треугольнике ABC , и, следовательно, BO – биссектриса угла ABC . Теорема доказана.

- Сумма квадратов диагоналей равна квадрату стороны, умноженному на 4 (следствие из тождества параллелограмма).



ПРИЗНАКИ

Параллелограмм $ABCD$ является ромбом, если выполняется одно из следующих условий:

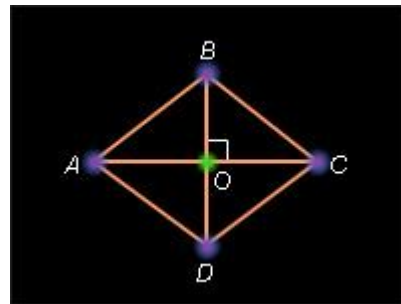
- Все его стороны равны ($AB = BC = CD = AD$).
- Его диагонали пересекаются под прямым углом ($AC \perp BD$).



- Если диагонали параллелограмма перпендикулярны, то параллелограмм – ромб.

Доказательство

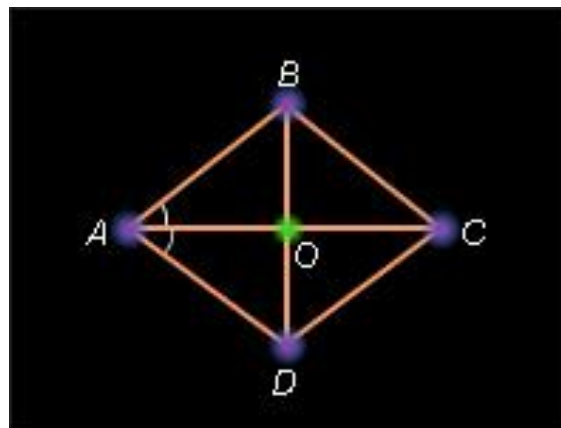
Пусть $ABCD$ – данный параллелограмм, AC и BD – его диагонали и $(AC) \perp (BD)$. Пусть O – точка пересечения диагоналей параллелограмма. Треугольник ABC – равнобедренный с основанием AC . Действительно, так как диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам, то $AO = OC$, и тогда BO – медиана треугольника ABC , проведенная к стороне AC . Но по условию $(BO) \perp (AC)$ и $[BO]$ – высота треугольника ABC . Тогда ABC – равнобедренный треугольник с основанием AC . Отсюда – $AB = BC$. По свойству равенства противоположных сторон параллелограмма следует, что $AB = BC = CD = AD$. Таким образом, данный параллелограмм – ромб. Теорема доказана.



- Если диагональ параллелограмма является биссектрисой его угла, то параллелограмм – ромб.

Доказательство

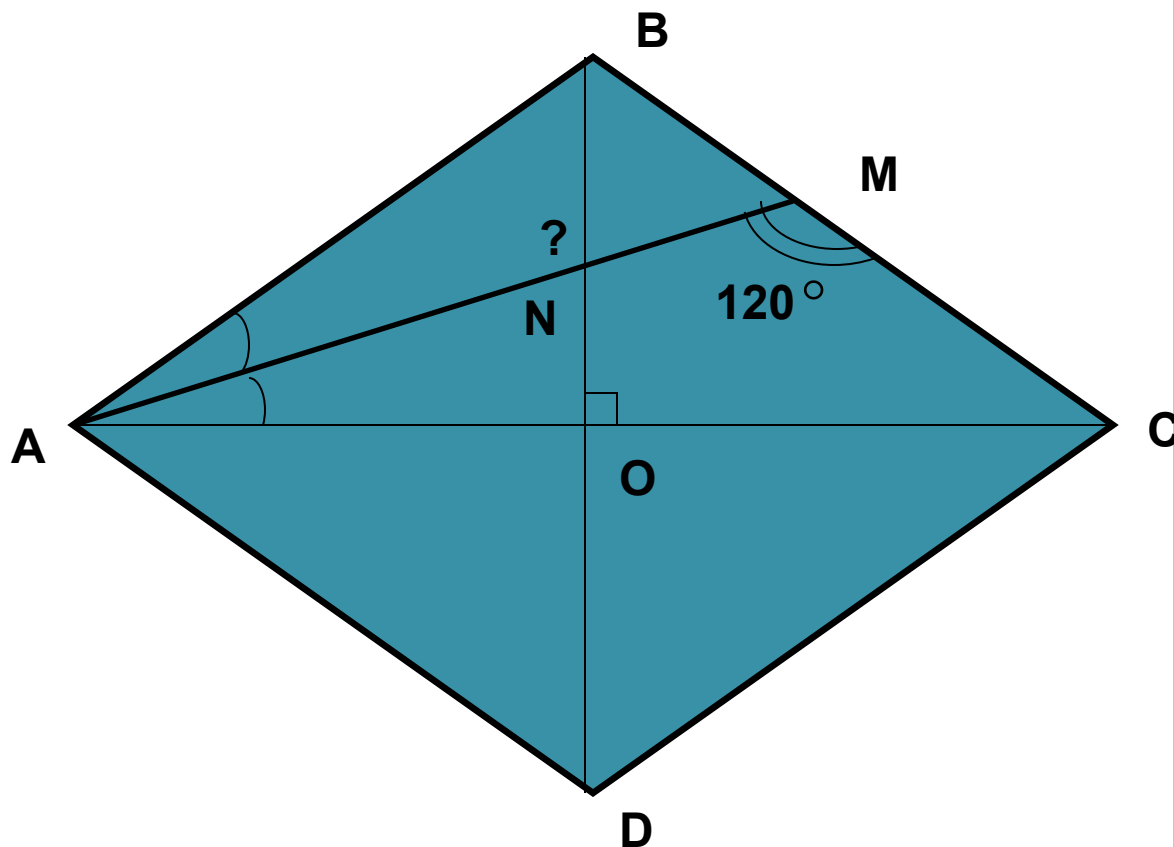
Пусть $ABCD$ – данный параллелограмм, AC – его диагональ и, при этом, AC – биссектриса угла A параллелограмма. Так как AC – биссектриса угла A , то $\angle BAC = \angle CAD$. С другой стороны, углы $\angle CAD$ и $\angle BCA$ внутренние накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей AC и по теореме 3.4 $\angle BCA = \angle CAD$. Отсюда $\angle BAC = \angle BCA$ и по признаку равнобедренного треугольника ([теорема 4.5](#)) ABC равнобедренный, и, следовательно, $AB = BC$. Так как $ABCD$ – параллелограмм, то $AB = CD$, $BC = AD$. Тогда $AB = BC = CD = AD$. Таким образом, $ABCD$ – ромб. Теорема доказана.



РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

Задача №1

В ромбе $ABCD$ биссектриса угла BAC пересекает сторону BC и диагональ BD соответственно в точках M и N . Найдите угол $\angle ANB$, если $\angle AMC = 120^\circ$.



РЕШЕНИЕ:

В ромбе противоположные углы равны и диагонали являются биссектрисами его углов, т.е. $\angle BAC = \angle BAD : 2 = \angle BCD : 2 = \angle BCA$.

Т.к. AM – биссектриса $\angle BAC$, а $\angle BAC = \angle BCA$, то $\angle MAC = \angle MCA : 2$.

В треугольнике AMC

$$\angle MAC + \angle MCA = 180^\circ - \angle AMC$$

$$\angle MAC + \angle MCA = 180^\circ - 120^\circ$$

$$\angle MAC + \angle MCA = 60^\circ.$$

$\angle MAC = \angle MCA : 2$, тогда

$$\angle MAC = 20^\circ,$$

$$\angle BAC = 40^\circ.$$

В ромбе диагонали

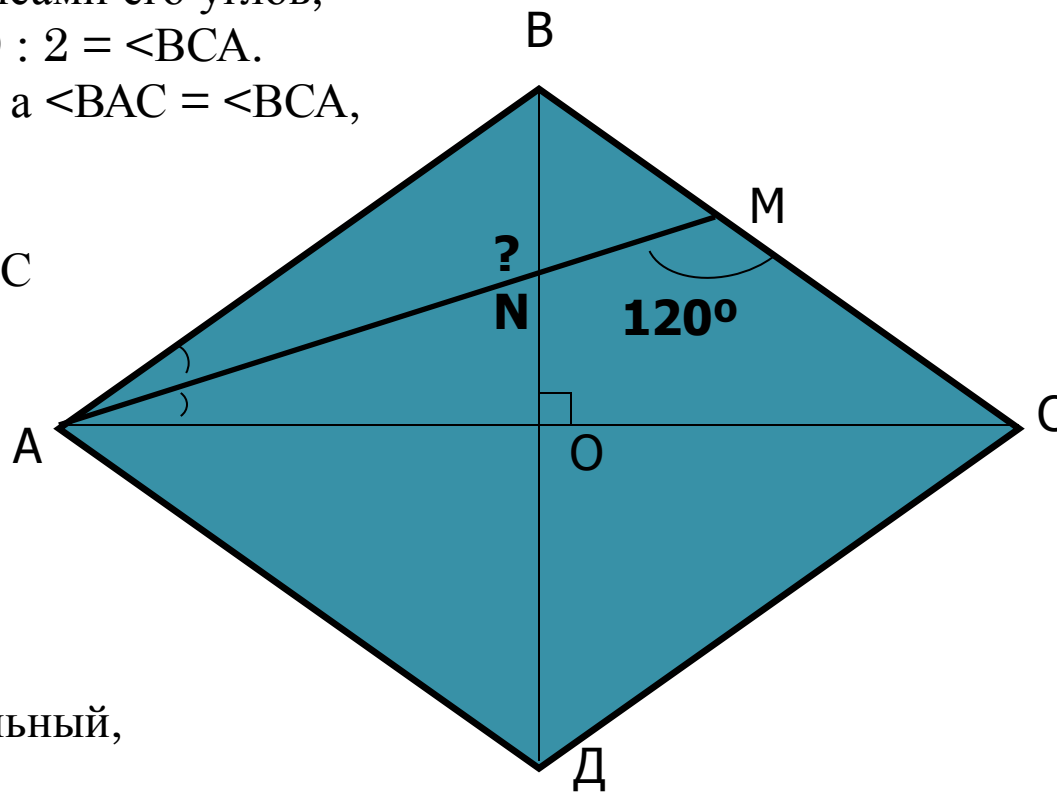
взаимно перпендикулярны,

треугольник AOB – прямоугольный,

$$\angle ABO = 90^\circ - \angle BAO = 50^\circ.$$

В треугольнике ABN $\angle BAN = \angle MAC = 20^\circ$, $\angle ABN = 50^\circ$, тогда

$$\angle ANB = 180^\circ - (20^\circ + 50^\circ) = 110^\circ.$$



Ответ: $\angle ANB = 110^\circ$.



Задача №2

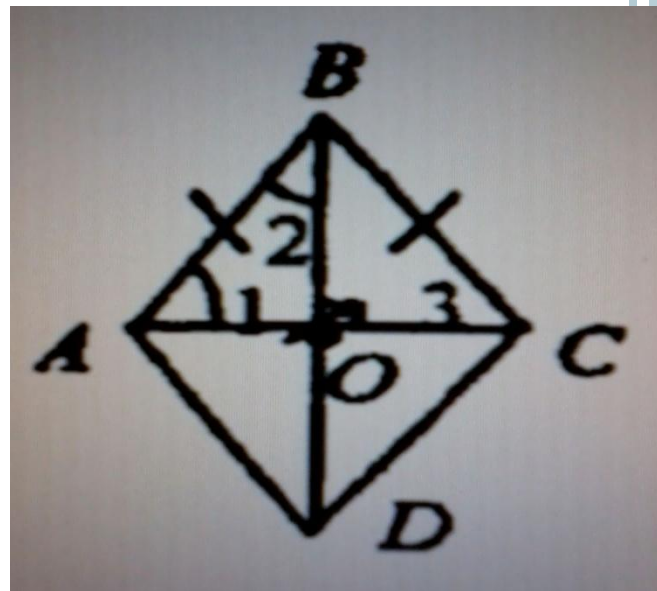
В ромбе одна из диагоналей равна стороне. Найдите: а) углы ромба; б) углы, которые диагонали ромба образуют с его сторонами.

Решение:

- 1) $AB=AC$, следовательно, $\text{тр.} ABC$ -равносторонний, т.е. $\text{угол}1 = \text{углу}B = \text{углу}3 = 60 \text{градусов}$
- 2) По свойству углов ромба $\text{угол}A + \text{угол}B = 180 \text{градусов}$, т.е. $\text{угол}A = 180 \text{градусов} - 60 \text{градусов} = 120 \text{градусов}$.
- 3) $\text{Тр.} ABO$ -прямоугольный, т.е. из свойства углов

- 4) $\text{угол}1 + \text{угол}2 = 90 \text{градусов}$,
 $60 \text{градусов} + \text{угол}2 = 90 \text{градусов}$,
 $\text{угол}2 = 30 \text{градусов}$.

Ответ: а) $\text{угол}A = \text{угол}C = 120 \text{градусов}$,
 $\text{угол}B = \text{угол}D = 60 \text{градусов}$; б) $\text{угол}1 = 60 \text{градусов}$, $\text{угол}2 = 30 \text{градусов}$.



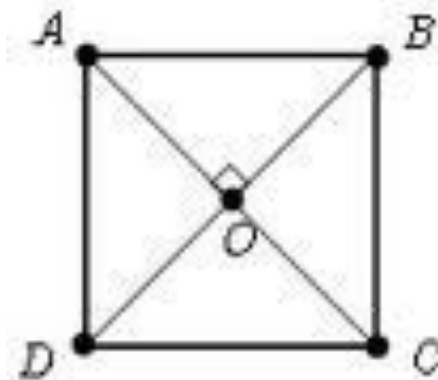
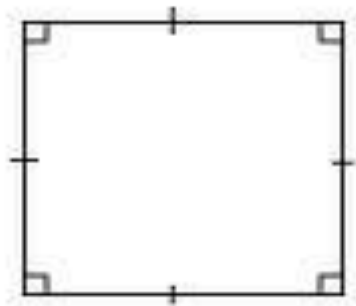
Квадрат

Квадрат — правильный — правильный четырёхугольник или ромб, у которого все углы прямые, или параллелограмм, у которого все стороны и углы равны.

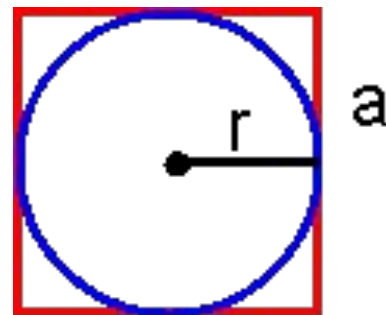
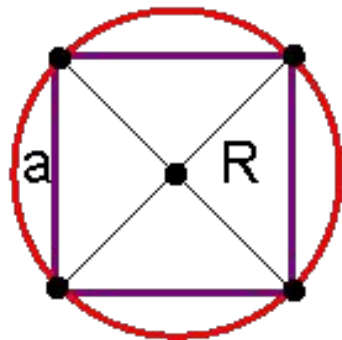


СВОЙСТВА КВАДРАТА

- Все углы квадрата прямые.
- Диагонали квадрата равны, взаимно перпендикулярны, точкой пересечения делятся пополам и делят углы квадрата пополам.



- Около квадрата можно описать окружность. Радиус описанной окружности выражается через сторону \underline{a} квадрата и его диагональ \underline{d} : $R = a : \sqrt{2} = d : 2$
- В квадрат можно вписать окружность. Радиус вписанной окружности равен половине стороны: $r = a : 2$



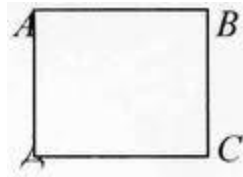
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

Задача №1

Докажите, что ромб, у которого один угол прямой, является квадратом.

Дано: $ABCD$ -ромб,
угол $A = 90^\circ$

Доказать: $ABCD$ -квадрат.



Док-во:

ABCD- ромб, следовательно:

$$AB=BC=CD=AD,$$

$$\text{угол}A = \text{угол}C = 90\text{градусов}$$

$$\text{угол}A + \text{угол}B = 180\text{градусов, т.е. } \text{угол}B = 180\text{градусов} - \text{угол}A = 90\text{градусов.}$$

Т.к. все стороны равны и все углы равны 90градусов,
то ABCD-квадрат



Задача №2

В прямоугольном треугольнике проведена биссектриса прямого угла. Через точку пересечения этой биссектрисы с гипотенузой проведены прямые, параллельные катетам. Докажите, что полученный четырехугольник-квадрат.

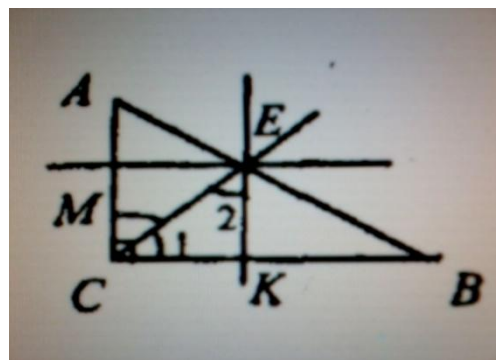
Дано:

тр. ABC , угол $C = 90^\circ$

CE - биссектриса;

$EM \parallel AC$, $EN \parallel BC$

Доказать: $EMEN$ - квадрат



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

По условию $МСIIЕК$, значит, по определению $СМЕК$ -параллелограмм.

По свойству углов параллелограмма угол $С$ = углу $Е$, т. к. $СЕ$ - биссектриса угла $С$, то $ЕС$ -биссектриса угла $Е$, значит, $\text{угол}_1 = \text{угол}_2$ и тр. $СЕК$ - равнобедр. (по признаку).

Т.е. $СК = ЕК$.

$СК = МЕ$, т.к. $СМЕК$ -параллелограмм,

Следовательно, $СМЕК$ - ромб.

угол $С = 90^\circ$ градусов, значит, угол $Е = 90^\circ$ градусов, угол $М =$
угол $К = 90^\circ$ градусов.

Следовательно, $СМЕК$ - квадрат, что и требовалось доказать.



Разминка

Является ли четырехугольник квадратом, если его диагонали: а) равны и взаимно перпендикулярны; б) взаимно перпендикулярны и имеют общую середину; в) равны, взаимно перпендикулярны и имеют общую середину?



