Решение тригонометрических уравнений функционально-графическим методом

Уравнение есть равенство,
которое еще не является истинным,
но которое стремятся сделать истинным,
не будучи уверенным, что этого можно достичь.

А. Фуше

Прежде всего, уточним, тригонометрическое уравнение - это уравнение, содержащее неизвестное в тригонометрической функции, и для нахождения его корней необходимо с помощью различных преобразований свести данное уравнение к простейшему тригонометрическому уравнению, а затем найти неизвестное.

Существуют общие методы решений уравнений как тригонометрических, так и показательных и логарифмических.

Мы знаем такие методы как:

- сведение к квадратным уравнениям;
- разложение на множители;
- введение новой переменной (вспомогательного угла);
- однородные уравнения;
- различные преобразования с помощью формул;
- использование ограниченности функций;
- функционально-графический метод;
- и др.

функционально-графический метод решения уравнений

основан на применении свойств тригонометрических функций и анализа построения графиков функций.

Этот метод является общим для различных уравнений, поэтому знание его поможет в решении многих уравнений

Примерами, в решении которых используется данный метод, могут быть

$$\sin\left(\frac{37}{2}\pi + x\right) = 3x^2+1$$

$$\sin x = 3x^2 + 1$$

$$\sqrt{16-(4x+5)^2} = 4 + \cos^2\frac{2\pi x}{5}$$

$$16x^2 + 24x + 12 = \left(\sqrt{3} - \cos\frac{14\pi x}{3}\right)\left(\sqrt{3} + \cos\frac{14\pi x}{3}\right)$$

$$X^2 - 8x + 20 = (2 - \sin \pi x)(2 + \sin \pi x)$$

$$X^2 - 8x - 20 = (2 - \cos \pi x)(2 + \cos \pi x)$$

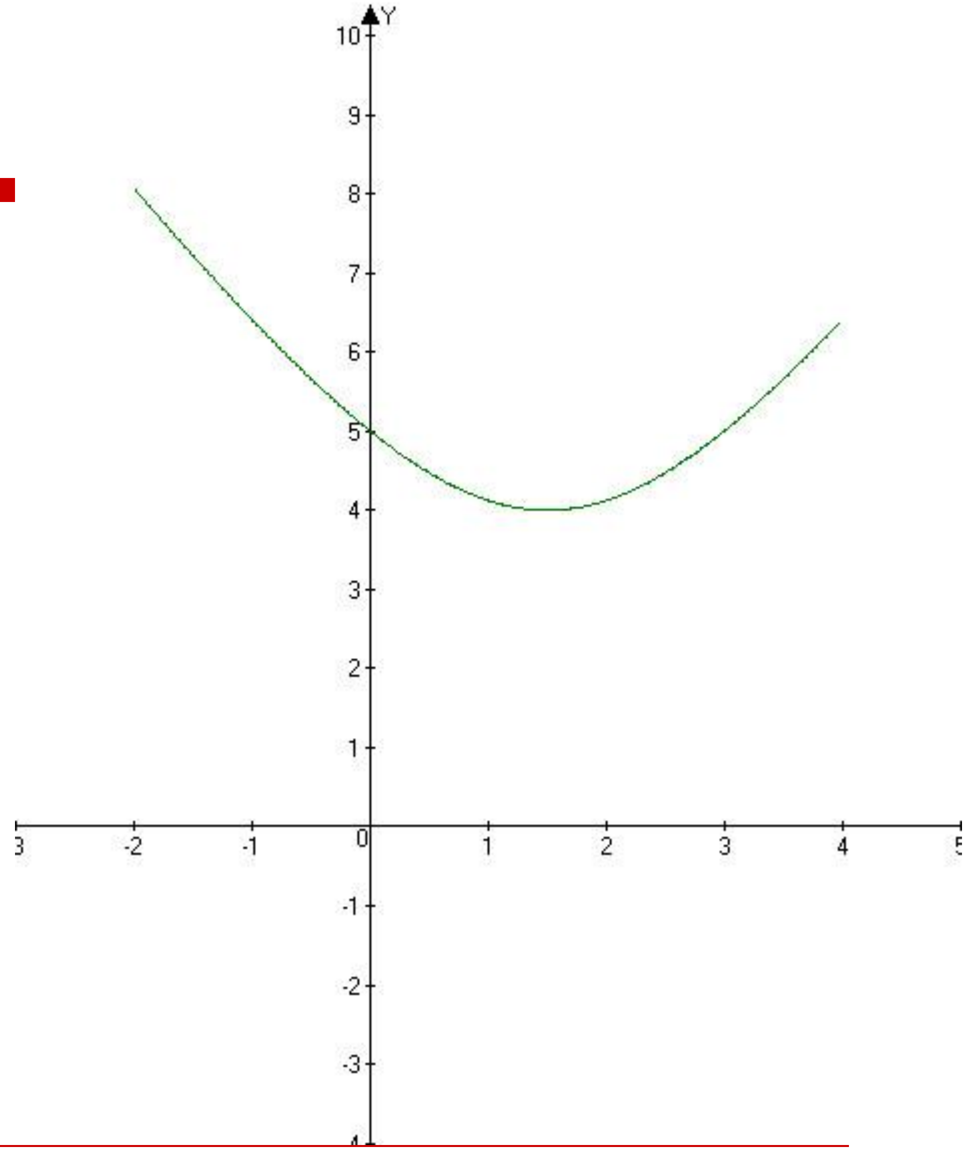
Решим уравнение

$\sqrt{16 + (2x - 3)^2} = 4 - \text{Cos}^2 \frac{5\pi x}{3}$

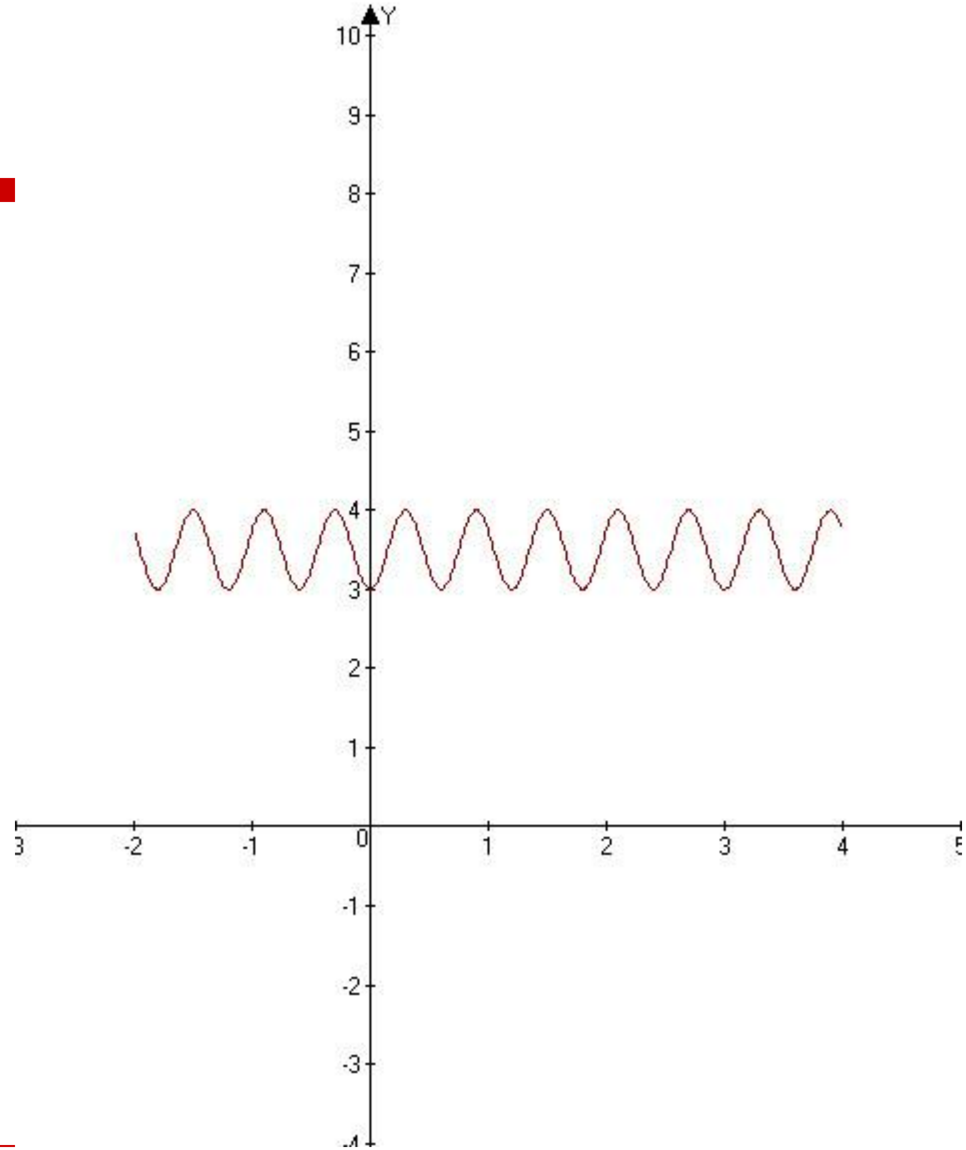
Построим графики двух функций

$y_1 = \sqrt{16 + (2x - 3)^2}$ и $y_2 = 4 - \text{Cos}^2 \frac{5\pi x}{3}$

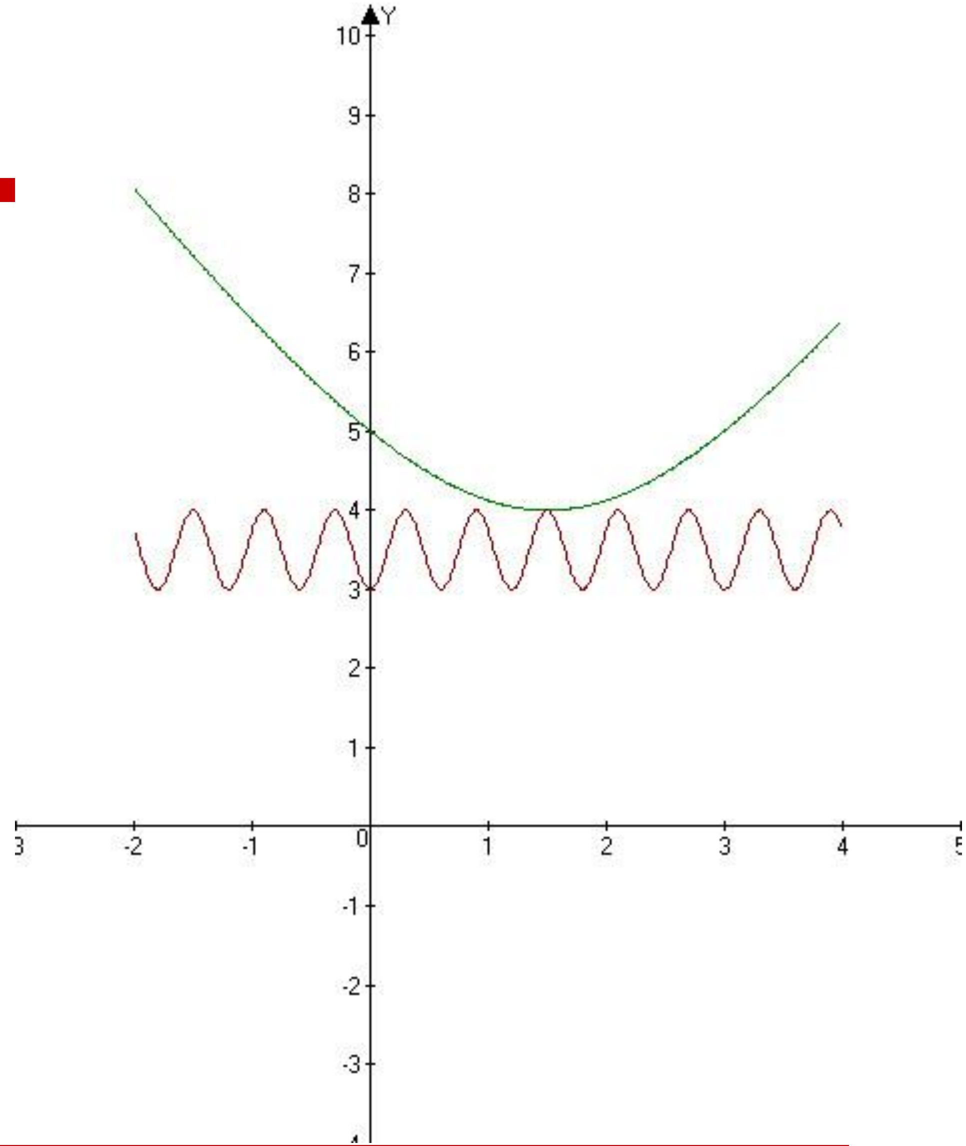
$$y=\sqrt{16+(2x-3)^2}$$



$$y = 4 - \cos^2 \frac{5\pi x}{3}$$



$$\sqrt{16+(2x-3)^2} = 4 - \cos^2 \frac{5\pi x}{3}$$



Графически решить это уравнение сложно, но можно воспользоваться свойствами данных функций.

Попробуем решить аналитическим путем

Найдем множество значений данных функций

$E(y_1) = [4; \infty)$, т.к. какое бы x не было,

всегда подкоренное выражение будет больше или равно 16,

и $E(y_2) = [3; 4]$ т.к. по свойству ограниченности функции имеем

$0 < \text{Cos}^2 \frac{5\pi x}{3} < 1$

$-1 < -\text{Cos}^2 \frac{5\pi x}{3} < 0$

$3 < 4 - \text{Cos}^2 \frac{5\pi x}{3} < 4$

Ординаты двух функций имеют одно общее значение равное 4.

Следует выяснить, существует ли такая точка А (Х, 4), принадлежащая обоим графикам.

Для этого обратим внимание, что

$\sqrt{16 + (2x - 3)^2}$ = 4 , при наименьшем значении, имеем

$16+4x^2-12x+9 = 16$

$4x^2-12x+9 = 0$

$(2x-3)=0$

$X=\frac{3}{2}$

2. Проверим, принадлежит ли X $= \frac{3}{2}$ второй функции

$y_2 = 4 - \text{Cos}^2 \frac{5\pi x}{3}$ и

будет ли при этом значении X $= \frac{3}{2}$, $y_2 = 4$

$4 - \text{Cos}^2 \frac{5\pi 3}{3 * 2} = 4 - \text{Cos}^2 \frac{5\pi}{2} = 4 - 0 = 4$

Значит, точка $(\frac{3}{2}; 4)$ принадлежит двум графикам и

решением данного уравнения является X $= \frac{3}{2}$

Решим уравнение $\sin\left(\frac{37\pi}{2}+x\right)=3x^2+1$

Упростим аргумент $\sin\left(\frac{37\pi}{2}+x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$

Исходное уравнение примет вид $\cos x = 3x^2+1$

Т.к. $-1 \le \cos x \le 1$, и $3x^2+1 \ge 1$,

то уравнение имеет решение, если имеет решение система $\begin{cases} \cos x = 1 \\ 3xx + 1 = 1 \end{cases}$

Решим второе уравнение $3x^2+1=1$; $x=0$.

Проверим, удовлетворяет ли полученное число 0 первому уравнению:

$\begin{cases} Cos 0 = 1 \\ x = 0 \end{cases}$ (верно).

Значит, корнем данного уравнения будет $x=0$.

Рассмотрим еще пример с использованием данного метода

$25X^2 - 20X + 6 = (\sqrt{2} - \text{Cos}\,\frac{5\pi x}{4}) * (\sqrt{2} + \text{Cos}\,\frac{5\pi x}{4})$

$(25X^2 - 20X + 4) + 2 = 2 - \text{Cos}^2\,\frac{5\pi x}{4}$

$(5x-2)^2 + 2 = 2 - \text{Cos}^2\,\frac{5\pi x}{4}$

$(5x-2)^2 = -\text{Cos}^2\,\frac{5\pi x}{4}$

$Y_1 = (5x-2)^2$, $Y_2 = -\text{Cos}^2\,\frac{5\pi x}{4}$

Y_1- парабола, ветви которой направлены вверх,

вершина находится в точке

с абсциссой $X = \frac{2}{5}$. Это точка $(\frac{2}{5}; 0)$

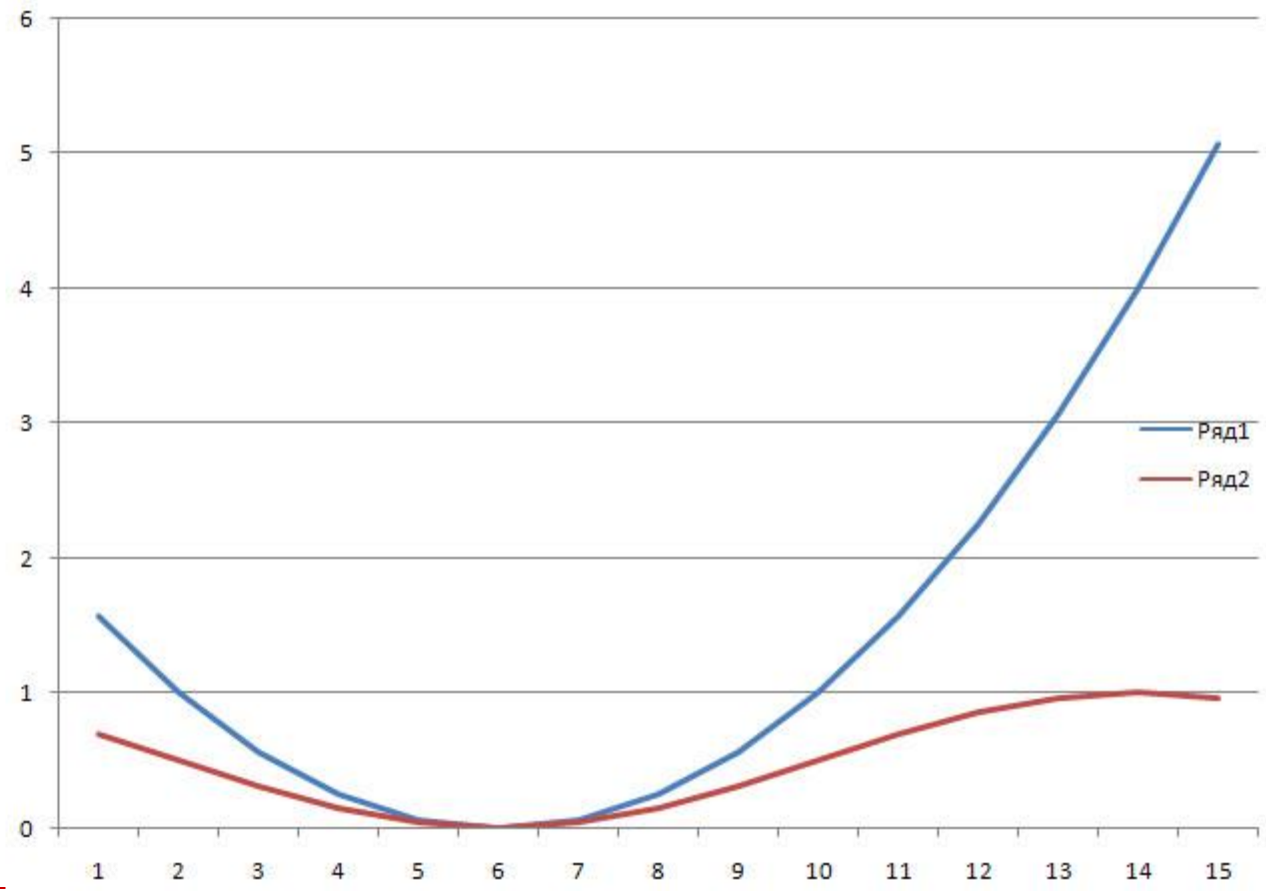
Выясним, будет ли иметь общую точку график

функции $y = (5x-2)^2 + 2$

с графиком функции $Y_2 = -\text{Cos}^2\,\frac{5\pi x}{4}$

На чертеже это легко увидеть, что такая точка есть.

0	4	1	3
0,05	3,0625	0,961978	2,100522
0,1	2,25	0,853694	1,396306
0,15	1,5625	0,691618	0,870882
0,2	1	0,500398	0,499602
0,25	0,5625	0,309118	0,253382
0,3	0,25	0,146869	0,103131
0,35	0,0625	0,038327	0,024173
0,4	0	6,34E-07	-6,3E-07
0,45	0,0625	0,037718	0,024782
0,5	0,25	0,145743	0,104257
0,55	0,5625	0,307647	0,254853
0,6	1	0,498806	0,501194
0,65	1,5625	0,690146	0,872354
0,7	2,25	0,852567	1,397433
0,75	3,0625	0,961366	2,101134
0,8	4	0,999997	3,000003
0,85	5,0625	0,962585	4,099915



На чертеже это легко увидеть, что такая точка есть.

Проверим аналитически.

$2 - \mathrm{Cos}^2 \frac{5\pi x}{4} = 2 - \mathrm{Cos}^2 \frac{5\pi 2}{4*5} = 2 - \mathrm{Cos}^2 \frac{\pi}{2} = 2.$

Осталось увидеть, что точка с координатами $(\frac{2}{5}; 2)$

принадлежит и параболе $Y_1 = (5x-2)^2$ и косинусоиде Y_2

$= - \mathrm{Cos}^{2} \frac{5\pi x}{4}$,

т.е. $X = \frac{2}{5}$ является корнем данного уравнения.

Данные уравнения входили в задания С в ЕГЭ 2008–2010 г.г.

В презентации использовались программы:

- Microsoft PowerPoint 2007
- Microsoft Office Word 2007
- Microsoft Office Excel 2007
- Microsoft Office Equation 3/0
- Fast Stone Capture
- Advanced Grapher

Задания выполнила Шлеенкова Мария 10 класс