

Различные методы решения неравенств



**«МЕТОД РЕШЕНИЯ ХОРОШ,
ЕСЛИ С САМОГО НАЧАЛА
МЫ МОЖЕМ ПРЕДВИДЕТЬ –
И ВПОСЛЕДСТВИИ ПОДТВЕРДИТЬ,
ЧТО, СЛЕДУЯ ЭТОМУ МЕТОДУ,
МЫ ДОСТИГНЕМ ЦЕЛИ.»
ЛЕЙБНИЦ**

Общие методы решения неравенств



1. Обобщенный метод интервалов.
2. Метод замены переменной.
3. «Расщепление» неравенств.
4. Использование свойств функции.
 - 4.1. Исследование области определения функции.
 - 4.2. Использование свойства ограниченности функции.
 - 4.3. Использование свойства монотонности функции.
5. Метод рационализации.

1. Обобщенный метод интервалов



- Применимость метода интервалов не ограничивается решением рациональных неравенств.
- Применяя метод интервалов к решению иррациональных, трансцендентных, комбинированных неравенств, говорят об обобщенном методе интервалов.

Алгоритм обобщенного метода интервалов



- 1) Привести неравенство к виду $f(x) \vee 0$
- 2) Найти область определения функции $f(x)$ (она же ОДЗ переменной).
- 3) Найти нули функции $f(x)$ решив уравнение
- 4) Из $f(x) = 0$ отъ на числовой прямой область определения и нули функции.
- 5) Определить знаки функции на промежутках, входящих в область определения функции.
- 6) Записать ответ, включив в него промежутки в соответствии со знаком неравенства (не забыть включить в ответ изолированные точки).

Обобщенный метод интервалов. Примеры



$$1. \frac{(2x - 5)(32^{\frac{1}{x}} - 4)}{(3^x - 1)(x^4 + 4x + 20)} \geq 0$$

$$2. (x^2 - 8x + 12)\sqrt{x^2 - 10x + 21} \geq 0$$

$$3. \frac{\lg x}{x^2 - x - 6} \geq 0$$

2.Метод замены переменной. Примеры.



$$1. \sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x} - 2} \leq 3$$

$$2. 5 \cdot 3^{2x} + 15 \cdot 5^{2x-1} \leq 8 \cdot 15^x$$

$$3. \log_2^2(x^2 - 2x) + \log_{0,5}(x^2 - 2x)^3 + 2 \leq 0$$

3. «Расщепление» неравенств.



- Если левая часть неравенства представляет собой произведение двух выражений, а правая равна нулю, то схема решения неравенства опирается на правило знаков при умножении (делении) положительных и отрицательных чисел.

Пример 1. $f(x) \cdot g(x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$ или $\begin{cases} f(x) \leq 0, \\ g(x) \leq 0. \end{cases}$

Пример 2. $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0. \end{cases}$ или $\begin{cases} f(x) \leq 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$

«Расщепление» неравенств. Примеры.



1. $(x^2 - 8x + 12)\sqrt{x^2 - 10x + 21} \geq 0$

2. $\frac{\log_3^2(2x^2 - 5x + 2)}{2x^2 + 6x} \leq 0$

3. $\frac{1}{2x^2}(2x - 3) > 0$

4.Использование свойств функции.

4.1. Исследование области определения функции.



- Предварительный анализ области определения функций, входящих в неравенство (ОДЗ неизвестной), иногда позволяет получить решение без преобразований.

4.1. Исследование ОДЗ неизвестной. Примеры.



1. $\sqrt{-x^2 + 3x - 2} > x^3 - 9$

2. $(\sqrt{x^2 - 6x + 5} + 1) \cdot \log_5 \frac{x}{5} + \frac{1}{x} (\sqrt{12x - 2x^2 - 10} + 1) > 0$

3. $\arcsin x \geq \sqrt{x - \frac{\pi}{2}}$

4.2. Использование ограниченности функции.

Метод оценки.



- Иногда неравенство $f(x) \leq g(x)$ устроено так, что на всей ОДЗ неизвестной x имеют место неравенства $f(x) \geq A$ и $g(x) \leq A$.

В этом случае:

а) решение неравенства $f(x) \leq g(x)$ сводится к нахождению тех значений x , для которых $f(x) = A$ и $g(x) = A$.

б) решение неравенства $f(x) \geq g(x)$ сводится к нахождению ОДЗ неизвестной неравенства.

4.2. Использование ограниченности функции. Метод оценки.



Примеры.

1. $\log_5 x \leq \sqrt{1 - x^4}$

2. $\sqrt{16 - (5x + 2)^2} \geq 4 + \cos^2 \frac{15\pi x}{4}$

4.2. Использование ограниченности функции. Использование неотрицательности функций.



- Пусть левая часть неравенства $f(x) \leq 0$ есть сумма нескольких функций $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)$. Установили, что каждая из этих функций неотрицательна на своей области определения. Тогда неравенство $f(x) \leq 0$ равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} f_1(x) = 0, \\ \dots \dots \dots \\ f_n(x) = 0. \end{cases}$$

- При тех же условиях неравенство $f(x) \geq 0$ сводится к нахождению области определения функции $f(x)$.

4.2. Использование ограниченности функции. Использование неотрицательности функций.



Примеры.

1.
$$\sqrt{x^3 + 8x^2 - 7x - 26} + \sqrt{x^2 + 3x - 10} \leq 0$$

2.
$$\sqrt{x^3 + 8x^2 - 7x - 26} + \sqrt{x^2 + 3x - 10} \geq 0$$

4.3. Использование монотонности функции.



- Если функция $f(t)$ возрастает на своей области определения, то неравенство $f(h(x)) > f(g(x))$ на ОДЗ равносильно неравенству $h(x) > g(x)$.
- Если функция $f(t)$ убывает на своей области определения, то неравенство $f(h(x)) > f(g(x))$ на ОДЗ равносильно неравенству $h(x) < g(x)$.

Использование монотонности. Примеры.

1. $(\sin 91^\circ)^{3x-8} \geq (\sin 89^\circ)^4$

2. $\log_{2x+3} x^2 < 1$

3. $\arcsin(3x^2 - 2x) \leq \arcsin(3x + 2)$

5. Метод рационализации.



- Метод рационализации заключается в замене сложного выражения $F(x)$ на более простое выражение $G(x)$ (в конечном счете рациональное), при которой неравенство $G(x) > 0$ равносильно неравенству $F(x) > 0$ в области определения выражения $F(x)$.
- Выделим некоторые выражения F и соответствующие им рационализирующие выражения G .

Метод рационализации.



Выражение F(x)	Выражение G(x)
$\log_h f - \log_h g$	$(h - 1)(f - g)$
$\log_f h - \log_g h$	$(f - 1)(g - 1)(h - 1)(g - f)$
$h^f - h^g$	$(h - 1)(f - g)$
$f^h - g^h$	$(f - g)h$
$ f - g $	$(f - g)(f + g)$
$\log_h f \cdot \log_p g$	$(f - 1)(g - 1)(h - 1)(p - 1)$
$\sqrt{f} - \sqrt{g}$	$f - g$

Метод рационализации. Примеры.



1. $\log_{2x+3} x^2 < 1$

2. $\log_{\frac{x}{3}}(\log_x \sqrt{3-x}) \geq 0$

3. $\log_{84-2x-2x^2}(\cos x) \leq \log_{x+19}(\cos x)$

Домашнее задание.



1. $\log_{\frac{\pi}{3}}(x^2 - 2x - 9) \geq \log_{\frac{\pi}{3}}(x + 1)$

2. $\frac{x^2 - 4}{\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 1)} < 0$

3. $\frac{2 \log_{2^{x-1}}|x|}{\log_{2^{x-1}}(x + 7)} \leq \frac{\log_3(x + 12)}{\log_3(x + 7)}$

4. $\left(x + \frac{x}{3}\right) \left(\frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9} - 1}{\sqrt{5-x} - 1}\right)^2 \geq 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9} - 1}{\sqrt{5-x} - 1}\right)^2$

5. $\frac{1}{6x^2 - 5x} \geq \frac{1}{\sqrt{6x^2 - 5x + 1} - 1}$

Домашнее задание.



6. $7^{-|x-3|} \cdot \log_2(6x - x^2 - 7) \geq 1$

7. $\sqrt{4x - x^2 - 3} \geq \sqrt{x^2 - 7x + 12} - \sqrt{x^2 - 5x + 6}$

8. $\frac{12^x - 4^{x+1} - 3^{x+1} + 12}{x^2 - 2x + 1} < 0$

9. $(3 + 2\sqrt{2})^x + 3 < 4 \cdot (3 - 2\sqrt{2})^x$