



# ТЕМА 10. ЧИСЛОВЫЕ, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ И СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ.

**Числовым рядом** называется сумма вида:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$$

где числа  $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$  – **члены ряда**  
(бесконечная последовательность),  
 $u_n$  – **общий член ряда**.

**Частичные суммы ряда:**

$$S_1 = u_1,$$

$$S_2 = u_1 + u_2,$$

$$S_3 = u_1 + u_2 + u_3,$$

.....

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$$

Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$  или  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_1 + u_2 + \dots + u_n) = S$ ,

то ряд называется **сходящимся**, а число  $S$  – **суммой** сходящегося ряда.

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = S$$

Если частичная сумма  $S_n$  ряда при неограниченном возрастании  $n$  не имеет конечного предела (в частности, стремится к  $+\infty$  или к  $-\infty$ ), то такой ряд называется **расходящимся**.

**Пример.** Найти сумму членов ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$
$$= \frac{1}{1*3} + \frac{1}{3*5} + \frac{1}{5*7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \dots;$$

Находим частичные суммы членов ряда:

$$S_1 = u_1 = \frac{1}{3}; \quad S_2 = u_1 + u_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} = \frac{2}{5};$$

$$S_3 = u_1 + u_2 + u_3 = \frac{2}{5} + \frac{1}{35} = \frac{3}{7}; \quad S_4 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = \frac{3}{7} + \frac{1}{63}$$
$$= \frac{4}{9}, \dots$$

Запишем последовательность частичных

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \dots$$

Общий член этой последовательности есть:  $n/(2n+1)$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{2}.$$

Последовательность частичных сумм имеет предел, равный  $1/2$ . Итак, ряд сходится и его сумма равна  $1/2$ .

# Необходимый признак сходимости

Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  может сходиться только при условии, что его общий член  $u_n$  при неограниченном увеличении номера  $n$  стремится к нулю:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  расходится – это достаточный признак расходимости ряда.

## Достаточные признаки сходимости ряда с положительными членами

### **а) Признак сравнения рядов с положительными членами.**

Исследуемый ряд сходится, если его члены не превосходят соответствующих членов другого, заведомо сходящегося ряда: исследуемый ряд расходится, если его члены превосходят соответствующие члены другого заведомо расходящегося ряда.

### **б) Признак Даламбера.**

Если для ряда с положительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + u_{n+1} \dots (u_n > 0)$$

выполняется условие  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$ , то ряд сходится при  $l < 1$  и расходится при  $l > 1$ .

Признак Даламбера не дает ответа, если  $l = 1$ . В этом случае для исследования ряда применяют другие приемы.

# Геометрический ряд

*-образован из членов геометрической прогрессии:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^n + \dots$$

$$(a > 0)$$



*сходится при  $|q| < 1$*



*расходится при  $|q| \geq 1$*



# Обобщенный гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots$$



*сходится при  $p > 1$*



*расходится при  $p \leq 1$*

**Пример.** Исследовать сходимость ряда, применяя необходимый признак сходимости и признак сравнения:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1) \cdot 2^n} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 2^2} + \frac{1}{5 \cdot 2^3} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \cdot 2^n} + \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n-1) \cdot 2^n} = 0$$

Необходимый признак сходимости ряда выполняется. Для признака сравнения сравним данный ряд с геометрическим:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

который сходится, так как  $q=1/2 < 1$ .

Сравнивая члены нашего ряда с соответствующими членами геометрического ряда, получим неравенства:

$$\frac{1}{2} < 1; \frac{1}{3 \cdot 2^2} < \frac{1}{2^2}; \frac{1}{5 \cdot 2^3} < \frac{1}{2^3}; \dots; \frac{1}{(2n-1) \cdot 2^n} < \frac{1}{2^n}; \dots$$

Т.е. члены данного ряда соответственно меньше членов геометрического ряда. Следовательно, данный ряд сходится.

**Пример.** Исследовать сходимость ряда, используя признак Даламбера:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{5^n} = \frac{2}{5} + \frac{4}{25} + \frac{6}{125} + \dots + \frac{2n}{5^n} + \dots;$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2(n+1)}{5^{n+1}} : \frac{2n}{5^n} = \frac{n+1}{5n} = \frac{1}{5} \left(1 + \frac{1}{n}\right);$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{5} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{5} < 1.$$

Следовательно, данный ряд сходится.

# ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

## Определение 1:

Функциональным называется ряд, члены которого есть непрерывные функции от аргумента  $x$ :

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

При  $x=n$  функциональный ряд становится числовым, который либо сходится, либо расходится.

# ПРИМЕР ФУНКЦИОНАЛЬНОГО РЯДА

Рассмотрим геометрическую прогрессию со знаменателем  $x$ :

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots$$

Геометрическая прогрессия сходится, если ее знаменатель  $|x| < 1$ . Тогда она имеет сумму  $S = \frac{1}{1-x}$ , которая

очевидно является функцией от  $x$ .

# ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

## Определение 2:

Совокупность значений  $x$ , при которых ФР сходится, называется областью сходимости ряда.

Сумма ФР может быть представлена:

$$S(x) = S_n(x) + R_n(x)$$

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x)$$

$$R_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots$$

### Определение 3:

ФР называется равномерно сходящимся в некоторой области  $X$ , если для каждого сколь угодно малого  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $N(\varepsilon) > 0$ , что при  $n > N$  выполняется неравенство:

$$|S(x) - S_n(x)| = |R_n(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in X$$

$S(x)$  – непрерывная функция



## Определение 4:

Пусть даны:  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  функциональный ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  знакоположительный числовой ряд

причем в некоторой области выполняется условие:

$$|u_1(x)| \leq a_1, |u_2(x)| \leq a_2, \dots, |u_n(x)| \leq a_n, \dots$$

Тогда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  является мажорантой для  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$

# ПРИЗНАК ВЕЙЕРШТРАСА

- Если *мажоранта* функционального ряда сходится, то сходится и функциональный ряд абсолютно и равномерно.

# СВОЙСТВА АБСОЛЮТНО И РАВНОМЕРНО СХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ

Пусть даны функциональные ряды:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x) \quad \text{равномерно сходящийся на } [a; b]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) = S_1(x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) = S_2(x) \quad \text{равномерно сходящиеся, причем:}$$

$$v_n(x) = u_n'(x) \quad \text{и} \quad \varphi_n(x) = \int_a^b u_n(x) dx \quad \text{тогда:}$$

$$S_1(x) = S'(x) \quad S_2(x) = \int_a^b S(x) dx$$

# СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Определение 5:

Функциональный ряд вида:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

$a_0, a_1, \dots, a_n$  – вещественные числа

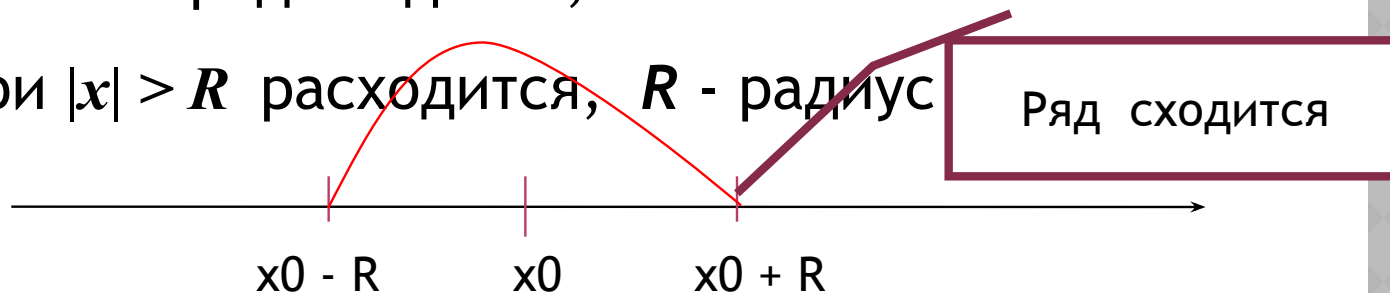
называется степенным рядом.

# ТЕОРЕМА АБЕЛЯ

1. Если степенной ряд сходится при  $x = x_1$ , то он сходится для всех  $|x| < |x_1|$ .
2. Если степенной ряд расходится при  $x = x_2$ , то он расходится для всех  $|x| > |x_2|$ .

Из теоремы следует, что существует такое положительное значение  $x = R$ , что при  $|x| < R$  степенной ряд сходится,

а при  $|x| > R$  расходится,  $R$  - радиус



# НАХОЖДЕНИЕ РАДИУСА СХОДИМОСТИ

1. По признаку Даламбера:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

# НАХОЖДЕНИЕ РАДИУСА СХОДИМОСТИ

2. По радикальному признаку Коши:

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}}$$

# РЯД ТЕЙЛОРА

## Определение 6:

Рядом Тейлора функции  $f(x)$  называется степенной ряд вида:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots$$

это есть разложение функции в окрестности точки  $x_0$ .

Коэффициентами являются производные высших порядков в точке  $x_0$ , т.е. Для разложения в ряд Тейлора необходимо, чтобы  $f(x)$  существовала в  $x_0$  вместе со своими производными.



# ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ФУНКЦИИ В РЯД ТЕЙЛОРА

## Определение 6:

Всякая функция  $f(x)$  бесконечно дифференцируемая в интервале  $|x-x_0| < r$  может быть разложена в степенной ряд Тейлора, если в этом интервале остаток ряда стремится к нулю:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$$

# РЯД МАКЛОРЕНА

## Определение 7:

Рядом Маклорена функции  $f(x)$  называется степенной ряд вида:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

это есть разложение функции в окрестности точки  $x=0$ .

Коэффициентами являются производные высших порядков в точке  $x=0$ , т.е. Для разложения в ряд Маклорена необходимо, чтобы  $f(x)$  существовала в  $x=0$  вместе со своими производными.

# СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

**Определение.** Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

$n=0$  называется степенным по степеням  $x$ . Ряд

является степенным по степеням

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \dots + a_n (x - x_0)^n + \dots$$

$(x - x_0)$

# ИНТЕРВАЛ СХОДИМОСТИ СТЕПЕННОГО РЯДА

Для любого степенного ряда существует конечное неотрицательное число  $R$  - радиус сходимости - такое, что если  $|x| < R$ , то при  $|x| > R$  ряд сходится, а при  $|x| > R$  расходится.  $(-R, R)$

Интервал  $(-R, R)$  называется интервалом сходимости степенного ряда. Если  $R = +\infty$ , то интервал сходимости представляет собой всю числовую прямую. Если же  $R = 0$ , то степенной ряд сходится лишь в точке  $x=0$ .

# НАХОЖДЕНИЕ ИНТЕРВАЛА СХОДИМОСТИ ПО ПРИЗНАКУ ДАЛАМБЕРА

Составим ряд из абсолютных величин членов степенного ряда и найдем интервал, в котором он будет сходиться, Тогда в этом интервале данный степенной ряд будет сходиться абсолютно. Согласно признаку

Даламбера, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}| |x|^{n+1}}{|a_n| |x^n|} < 1$$

,  
то степенной ряд абсолютно сходится для всех  $x$ , удовлетворяющих этому условию.

# ПРОДОЛЖЕНИЕ

В этом случае ряд будет сходиться внутри интервала  $(-R, R)$ , где  $R$ -это радиус сходимости ряда:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

За пределами этого интервала ряд будет расходиться, а на концах интервала, где

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}| |x|^{n+1}}{|a_n| |x|^n} = 1$$

, требуется

дополнительное исследование.

# ПРИМЕРЫ

Найти интервал сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2n+1}$$

Следовательно, ряд сходится абсолютно в интервале  $(-1, 1)$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x^{n+1}|(2n+1)}{(2n+3) \cdot |x|^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} |x| \frac{2n+1}{2n+3} = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{2n} = |x| < 1$$

# ПРИМЕРЫ

Положим  $x = 1$ . Тогда получим числовой ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$ . Этот ряд расходится

(сравните его с гармоническим рядом).

Полагая  $x = -1$ , имеем знакочередующийся ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ , который сходится условно в силу теоремы Лейбница.

Итак, степенной ряд сходится в промежутке  $[-1, 1)$ .



# ПРИМЕРЫ

Найти интервал сходимости степенного

ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ . Здесь  $u_n = \frac{x^n}{n!} = \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}$

$u_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{x^{n+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n(n+1)}$ . Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+1} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n(n+1) |x|^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{n+1}$$

# ПРОДОЛЖЕНИЕ

$$= |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = |x| \cdot 0 = 0 .$$

Но  $0 < \frac{1}{n+1}$  всегда, т.е. независимо от  $x$ . Это означает, что степенной ряд сходится независимо от  $x$ , т.е. на всей числовой прямой.

Итак, интервал сходимости ряда - это промежуток

$$(-\infty, \infty)$$

# ПРИМЕР

Найти интервал сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! |x|^{n+1}}{n! |x|^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n (n+1) |x|}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) |x| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) .$$

Этот предел может быть меньше единицы, если только  $x=0$  (иначе он будет равен бесконечности). Это означает, что степенной ряд сходится лишь в точке  $x=0$ .

# СВОЙСТВА СТЕПЕННЫХ РЯДОВ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ СУММЫ РЯДА

## 1. Сумма степенного ряда

$$S(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

является непрерывной функцией в каждой точке интервала сходимости этого ряда.

Например,

непрерывна, если

$$S(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots$$

$|x| < 1$

# ПОЧЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

2. Ряд, полученный почленным дифференцированием степенного ряда, является степенным рядом с тем же интервалом сходимости, что и данный ряд, причем :если

$$\text{то } S(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots,$$

$$S'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1} + \dots$$

# ПОЧЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

3. Степенной ряд можно почленно интегрировать на любом промежутке, целиком входящем в интервал сходимости степенного ряда, при этом

$$\text{где } \int_{\alpha}^{\beta} S(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} a_0 dx + \int_{\alpha}^{\beta} a_1 x dx + \dots + \int_{\alpha}^{\beta} a_n x^n dx + \dots$$
$$(\alpha, \beta) \subset (-R, R)$$

## ОПРЕДЕЛЕНИЯ

**Определение.** Если бесконечно дифференцируемая функция является суммой степенного ряда, то говорят, что она разлагается в степенной ряд.

**Опр.** Рядом Тейлора функции  $f(x)$  называется ряд, коэффициенты которого определяются

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

по формулам  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$  или  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$  ряд

# СТЕПЕННОЙ РЯД КАК РЯД ТЕЙЛОРА

*Теорема.* Если в некоторой окрестности точки  $x_0$

$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots$   
то ряд справа есть ее ряд Тейлора.

*Короче:* если функция представлена в виде степенного ряда, то этот ряд является ее рядом Тейлора.

Представление функции ее рядом Тейлора единственно.



# ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

Рассмотрим  $n$ -ю частичную сумму ряда Тейлора:

$$S_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Этот многочлен называется  $n$ -м многочленом Тейлора функции  $f(x)$ .

Разность  $f(x)$  и  $S_n(x)$  называется остаточным членом ряда Тейлора.

$$R_n(x) = f(x) - S_n(x)$$

# ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА С ОСТАТОЧНЫМ ЧЛЕНОМ В ФОРМЕ ЛАГРАНЖА

Остаточный член в форме Лагранжа имеет вид:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}, \text{ где } c \in (x_0, x)$$

Тогда

называется формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

# УСЛОВИЯ СХОДИМОСТИ РЯДА ТЕЙЛОРА К ФУНКЦИИ $y=f(x)$

*Для того чтобы функцию можно было разложить в ряд Тейлора на интервале  $(-R, R)$ , необходимо и достаточно, чтобы функция на этом интервале имела производные всех порядков и чтобы остаточный член формулы Тейлора стремился к нулю при всех*

$$x \in (-R, R) \text{ при } n \rightarrow \infty$$

# ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ РАЗЛОЖИМОСТИ ФУНКЦИИ В РЯД ТЕЙЛОРА

*Если функция  $f(x)$  на интервале  $(-R, R)$  бесконечно дифференцируема и ее производные равномерно ограничены в совокупности, т. е. существует такая константа  $M$ , что для всех*

*выполняется условие*

*$x \in (-R, R)$  при  $n=0, 1, 2, \dots$ , то функцию можно разложить в ряд Тейлора на этом интервале.*

$$|f^{(n)}(x)| \leq M$$

# РАЗЛОЖЕНИЕ

$$f(x) = e^x$$

Все производные этой функции совпадают с самой функцией, а в точке  $x=0$  они равны 1. Составим для функции формально ряд Маклорена:

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Этот ряд, очевидно, сходится на всей числовой оси. Но все производные

функции равномерно ограничены, т. к.  $f^{(n)}(c) = e^c < e^R$ , где  $R$ -любое

число из интервала сходимости.

Поэтому этот ряд сходится именно к функции

# РАЗЛОЖЕНИЕ В РЯД СИНУСА.

Вычислим производные синуса:

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f(0) = 0,$$

$$f'(0) = 1,$$

$$f''(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f''(0) = 0$$

$$f'''(0) = -1$$

$$f'''(x) = \cos\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f^{(4)}(0) = 0$$

.....

.....

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

$$f^{(2n-1)}(0) = (-1)^{n-1}$$

.....

# ПРОДОЛЖЕНИЕ

Ясно, что все производные синуса не превосходят по модулю единицу. Так что запишем ряд, который будет разложением синуса:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

при этом видно, что этот ряд сходится на всей числовой оси.

# ПРИМЕНЕНИЕ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

## ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ

Разложения 1-7 позволяют, используя соответствующее разложение, вычислять приближенно значения функций, интегралы, приближенно интегрировать дифференциальные уравнения.

*Пример* . С помощью степенного ряда вычислить с точностью до 0,0001  $\int_0^1 e^{-x^2} dx$



# РЕШЕНИЕ

Разложим подынтегральную функцию в степенной ряд:

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{(x^2)^2}{2!} - \frac{(x^2)^3}{3!} + \frac{(x^2)^4}{4!} + \dots$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-x^2} dx &= \int_0^1 \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \dots\right) dx = \\ &= \int_0^1 dx - \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 \frac{x^4}{2!} dx - \int_0^1 \frac{x^6}{3!} dx + \int_0^1 \frac{x^8}{4!} dx - \dots = \\ &= x \Big|_0^1 - \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 + \frac{x^5}{2 \cdot 5} \Big|_0^1 - \frac{x^7}{6 \cdot 7} \Big|_0^1 + \frac{x^9}{24 \cdot 9} \Big|_0^1 - \dots = \end{aligned}$$

# ПРОДОЛЖЕНИЕ

$$\begin{aligned} &= x \Big|_0^1 - \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 + \frac{x^5}{2 \cdot 5} \Big|_0^1 - \frac{x^7}{6 \cdot 7} \Big|_0^1 + \frac{x^9}{24 \cdot 9} \Big|_0^1 - \dots = \\ &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} + \dots \end{aligned}$$

Так как получившийся ряд является знакочередующимся, то сумма знакочередующегося ряда не превосходит первого члена такого ряда. Ясно, что часть ряда, которую в задаче следует отбросить, также является знакочередующимся рядом и его сумма не превзойдет модуля первого отброшенного члена ряда.

Таким образом, первый отброшенный член ряда должен быть меньше заданной погрешности, т.е. 0,0001.

# ПРОДОЛЖЕНИЕ

Вычислив еще несколько членов ряда

$$-\frac{1}{1320}, -\frac{1}{9360}, -\frac{1}{75600}$$

ВИДИМ, ЧТО  $\frac{1}{75600} \approx 0,0001$

Отбросив этот и следующие за ним члены ряда, получим:

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \frac{1}{1320} + \frac{1}{9360} = 0,7468$$

# ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИЙ

Вычислить  $\sqrt[3]{10}$  с точностью до 0,001.

Преобразуем

$$\sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{8 \frac{10}{8}} = 2 \sqrt[3]{1 + \frac{2}{8}} = 2 \sqrt[3]{1 + 0,25} = 2(1 + 0,25)^{\frac{1}{3}}$$

Воспользуемся биномиальным рядом при  $x=0,25$  и  $m = \frac{1}{3}$ .

Получим

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{10} &\approx 2 \left( 1 + \frac{1}{3} 0,25 + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2!} 0,25^2 + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-2)}{3!} 0,25^3 \right) \approx \\ &\approx 2(1 + 0,0833 - 0,0069 + 0,0009) \approx 2(1 + 0,0833 - 0,0069) \approx \\ &\approx 2,1528 \approx 2,153. \end{aligned}$$