

کتاب ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت

رشته های حسابداری و مدیریت

مؤلف: ليدا فرخي

تهيه ي پاور پوينت: اردوان ميرزاىي

تعداد واحد : 3

اهداف درس

توانایی حل مسئله

تقویت تفکر ریاضی

آشنایی با: بردارها

ماتریس و دترمینان

دستگاه معادلات خطی و توابع خطی

توابع چند متغیره و معادلات دیفرانسیل

انتگرال

فهرست مطالب

- * فصل اول: بردارها
- * فصل دوم: ماتریس و دترمینان
- * فصل سوم: دستگاه معادلات خطی و توابع خطی
- * فصل چهارم: توابع چند متغیره
- * فصل پنجم: معادلات دیفرانسیل
- * فصل ششم: انتگرال

فصل اول: بردارها

* بردارها در صفحه

* ضرب عددي دو بردار

* بردارها در فضاي سه بعدي

* ضرب برداري بردارها

* بردارها در فضاي n بعد

فصل دوم: ماتریس و دترمینان

* ماتریس

* دترمینان

* وارون ماتریس

فصل سوم: دستگاہ معادلات خطي و توابع خطي

* دستگاہ معادلات

* استقلال و وابستگی خطي

* رتبه ي يك ماتريس

* توابع خطي

فصل چهارم: توابع چند متغیره

- * توابع چند متغیره
- * حد و پیوستگی توابع چند متغیره
- * مشتق های جزئی
- * دیفرانسیل کل و مشتقگیری ضمنی
- * ماکسیمم و مینییم توابع دو متغیره
- * ماکسیمم و مینییم توابع نسبت به شرایط داده شده

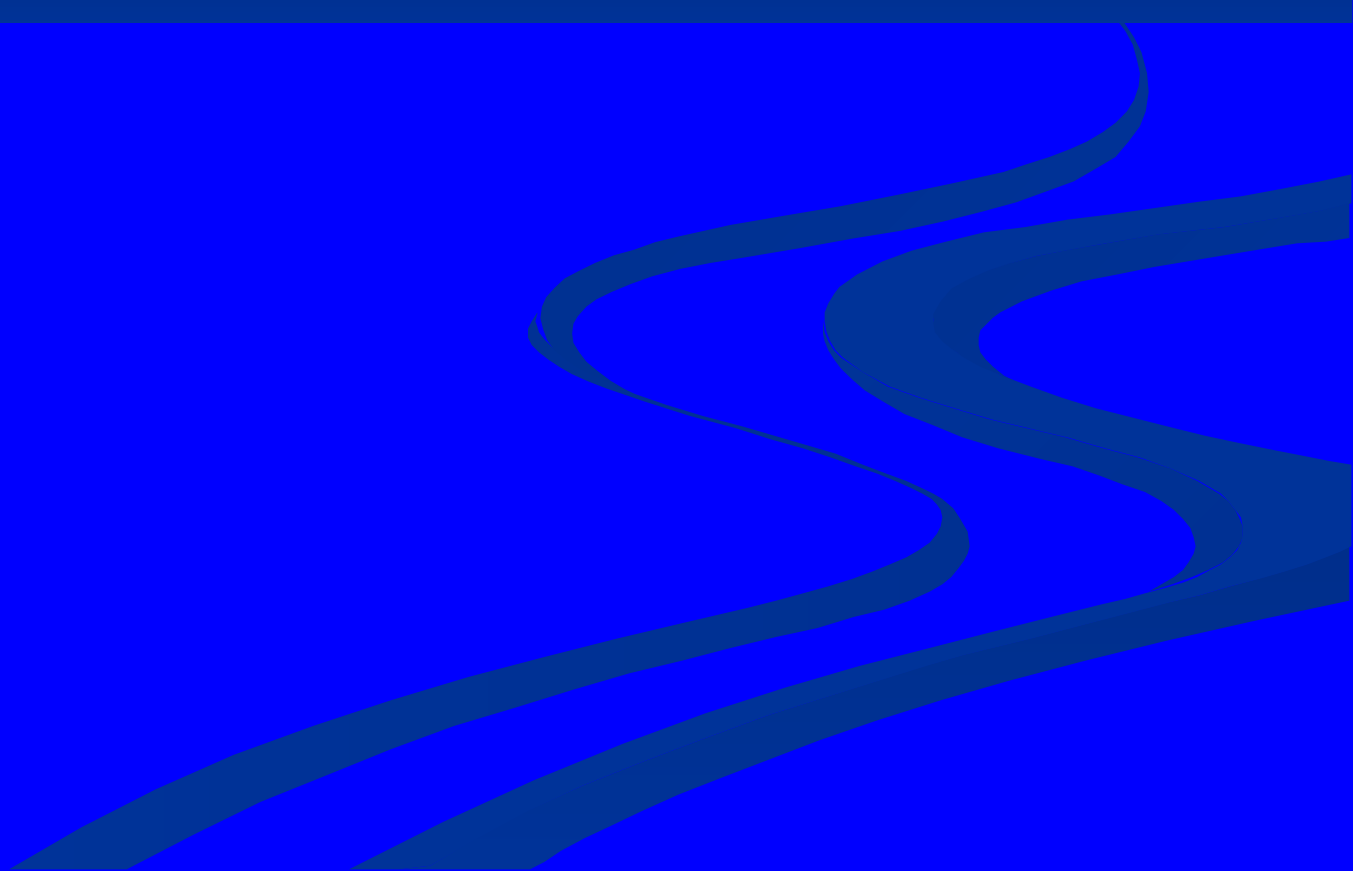
فصل پنجم: معادلات دیفرانسیل

* آشنایی معادلات دیفرانسیل

* معادلات دیفرانسیل جدایی پذیر

فصل ششم: انتگرال

* انتگرال



فصل اول: بردارها



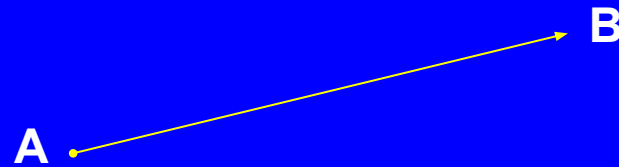
کمیت‌هایی مانند سرعت یا شتاب یک متحرک و نیروی وارد بر یک جسم هنگامی مشخص می‌شوند که علاوه بر اندازه سو و جهتشان نیز معین باشد. این نوع کمیت‌ها را برداری می‌نامیم.

برخي از کمیت ها هنگامی که اندازه ی آنها بر حسب واحد
مشخصی داده شود کاملاً معین می شوند
مانند درجه ی حرارت، جرم، طول و حجم ، هزینه و درآمد.
این گونه کمیت ها را عددی یا اسکالر می نامیم

بردارها در صفحه 1.1

تعريف 1.1.1

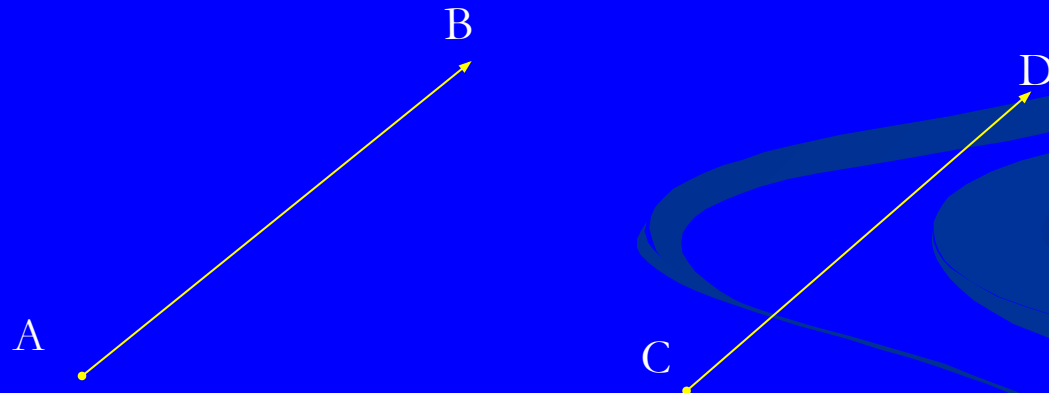
پاره خط AB که ابتدای آن A و انتهای آن B است، یک پاره خط جهت دار نامیده می شود. به شکل زیر توجه کنید:



پاره خط جهت دار AB را یک بردار می نامیم و با \vec{AB} نمایش می دهیم
نقطه A را مبدا و نقطه B را انتهای بردار می نامیم

تساوي دو بردار 1.1.2

دو بردار \vec{AB} و \vec{CD} را برابر يا همسنگ مي ناميم و مينويسيم $\vec{AB} = \vec{CD}$ ، اگر اندازه و جهت آنها يکي باشد.



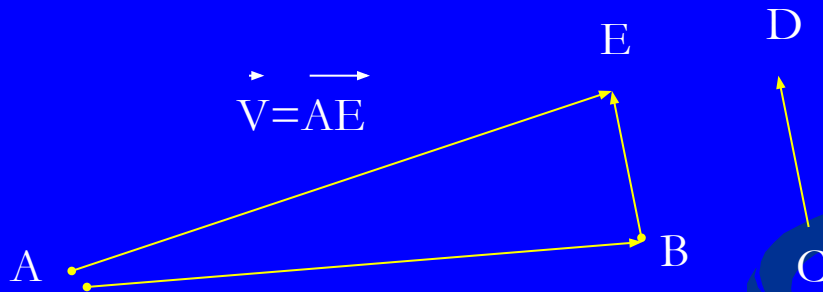
جمع بردارها 1.1.3

دو بردار AB و CD را در نظر می‌گیریم. مجموع $AB+CD$ برداری است مانند V که به یکی از دو روش زیر به دست می‌آید.

با توجه به تعریف تساوی دو بردار، می‌توان دو بردار را که دارای یک مبدا نباشند نیز با یکدیگر جمع کرد.

روش اول

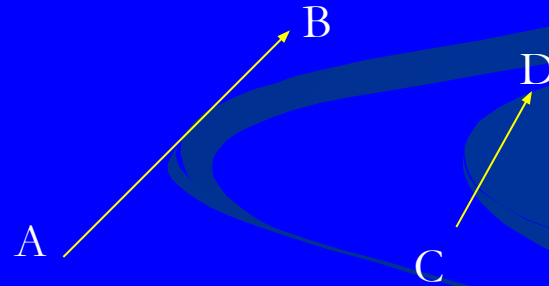
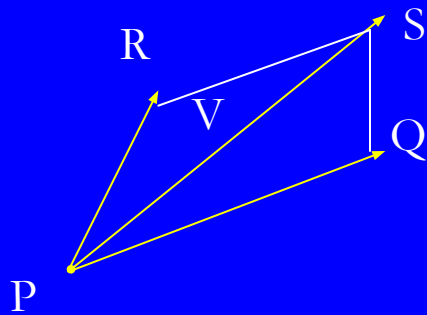
از نقطه B بردار \overrightarrow{BE} را برابر با بردار \overrightarrow{CD} رسم می کنیم.
بردار $\vec{V} = \overrightarrow{AE}$ مجموع دو بردار \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{CD} است.



$$\vec{V} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$$

روش دوم

از نقطه P دلخواه دو بردار PQ و PR را که به ترتیب برابر با بردارهای AB و CD هستند، رسم می‌کنیم. بردار PS قطر متوازی الاضلاع حاصل از این دو بردار برابر با مجموع دو بردار AB و CD است.



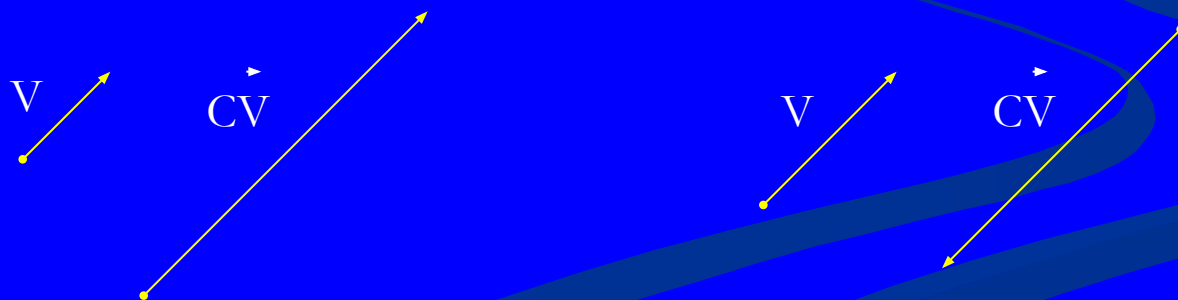
$$\vec{P} = \vec{V} = \vec{PQ} = \vec{AB} + \vec{CD}$$

بردار صفر 1.1.4

اگر اندازه ي بردار \vec{V} برابر صفر باشد يعني $|\vec{V}|=0$ ،
بردار \vec{V} را **بردار صفر** مي ناميم و 0 با نشان مي دهيم. بنا بر
اين اندازه ي 0 برابر صفر است ، ولي جهت آن مشخص
نيست.

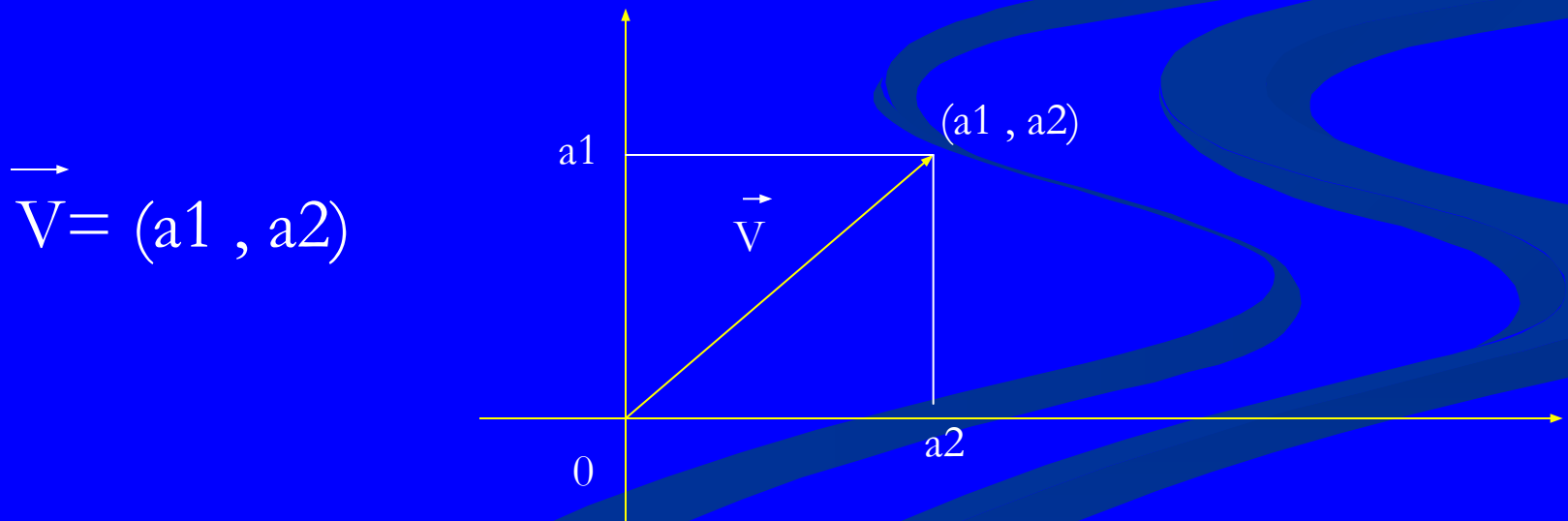
ضرب عدد در بردار (ضرب اسکالر) 1.1.5

فرض می‌کنیم \vec{V} برداری دلخواه و C عددی حقیقی باشد. منظور از حاصلضرب عدد C در بردار \vec{V} برداری است با اندازه C و \vec{V} و همجهت با \vec{V} اگر $C > 0$ و در خلاف جهت \vec{V} اگر $C < 0$. حاصلضرب عدد C در بردار \vec{V} را با $C\vec{V}$ نشان می‌دهیم. در شکل: اگر $C = 0$ آنگاه $C\vec{V}$ برابر است با بردار صفر.



تعريف 1.1.7

بردار \vec{V} را که ابتدای آن مبدا مختصات و انتهای آن نقطه (a_1, a_2) است در صفحه xoy مختصات است، بردار نظیر زوج مرتب (a_1, a_2) می نامیم. اعداد a_1 و a_2 را مؤلفه های بردار \vec{V} می نامیم و می نویسیم:



قضیه 1.11

اگر $\vec{V}_1 = (a_1, a_2)$ و $\vec{V}_2 = (b_1, b_2)$ دو بردار باشند ، آنگاه مجموع $\vec{V}_1 + \vec{V}_2$ برابر است با:

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

تعريف قرينه ي يك بردار 1.1.13

اگر $\vec{V}=(a_1,a_2)$ ، آنگاه بردار $(-a_1,-a_2)$ را قرينه ي بردار \vec{V} مي ناميم و با $-\vec{V}$ نشان مي دهيم. پس:

$$-\vec{V}=(-a_1, -a_2)$$

تعريف تفاضل دو بردار 1.1.14

بردار $\vec{V} + (-\vec{U})$ را که مساوی با جمع \vec{V} با قرینه \vec{U} است
تفاضل \vec{U} از \vec{V} می نامیم و با $\vec{V} - \vec{U}$ نشان می دهیم. یعنی:

$$\vec{V} - \vec{U} = \vec{V} + (-\vec{U})$$

تعبیر هندسی تفاضل دو بردار 1.15

نمایش های دو بردار \vec{V} و \vec{U} را از یک نقطه رسم می کنیم. در این صورت، پاره خط جهت داری که مبدا آن نقطه ی انتهایی نمایش \vec{U} و انتهایی آن، نقطه ی انتهایی نمایش \vec{V} باشد، یک نمایش بردار $\vec{V}-\vec{U}$ است. زیرا بنا بر تعریف جمع بردارها داریم:

$$\vec{U} + (\vec{V} - \vec{U}) = \vec{V}$$

اندازه ي يك بردار 1.1.16

اندازه ي بردار $\vec{V}=(a_1,a_2)$ برابر است با:

$$V = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

قضیه 1.1.18

اگر \vec{V} و \vec{U} و \vec{W} بردارهایی در V_x بوده و c و d اعدادی حقیقی باشند، آنگاه جمع برداری و ضرب اسکالر دارای خواص زیرند:

■ $\vec{U} + \vec{V} = \vec{V} + \vec{U}$ (قانون جا به جایی جمع)

■ $\vec{U} + (\vec{V} + \vec{W}) = (\vec{U} + \vec{V}) + \vec{W}$ (قانون شرکت پذیری جمع)

■ برداری مانند 0 در V وجود دارد به طوری که $\vec{V} + \vec{0} = \vec{V}$ (وجود همانی نسبت به عمل جمع)

■ برداری مانند $-\vec{V}$ و \vec{V} در هست به طوری که $\vec{V} + (-\vec{V}) = 0$ (وجود قرینه ی هندسی نسبت به عمل جمع)

ادامه

- $V = \vec{c} (dV) (\vec{c}d)$ (قانون شرکت پذیری)
- $C \vec{(U+V)} = \vec{c}U + \vec{c}V$ (قانون بخش پذیری)
- $U = c\vec{U} + d\vec{U}(c+d)$ (قانون بخش پذیری)
- $\vec{U} \equiv U$ (وجود هماني نسبت به ضرب اسكالر)

تعريف فضاي برداري حقيقي 1.1.20

فضاي برداري حقيقي V مجموعه اي است از بردارها، همراه با مجموعه اعداد حقيقي (اسكالرها)، با دو عمل جمع برداري و ضرب اسكالر، به طوري كه هر جفت بردار \vec{U} و \vec{V} در V و هر اسكالر c ، بردارهاي $\vec{U} + \vec{V}$ و $c\vec{U}$ طوري تعريف شده باشند كه در خواص قضيه ي قبل صدق كنند.

بردارهاي يکه

اندازه ي هر دو بردار $(1 و 0)$ و $(0 و 1)$ ، برابر با 1 است، آنها را بردارهاي يکه مي ناميم و با نمادهاي زير نشان مي دهيم.

$$\vec{i} = (1,0)$$

$$\vec{j} = (0,1)$$

با توجه به نماد گذاري گذشته براي هر بردار $\vec{V}=(a_1,a_2)$ به دست مي آوريم:

$$a_1 (1,0)+a_2 (0,1)=a_1 \vec{i}+ a_2 \vec{j}=\vec{(a_1,a_2)}$$

بنابر این هر بردار V_2 در R^3 می تواند به صورت یک ترکیب خطی از دو بردار i و j (عبارتی به صورت $a_1 i + a_2 j$) را یک ترکیب خطی از i و j می نامند.) نوشت. از این رو بردارهای i و j یک پایه برای فضای برداری V_2 تشکیل می دهند. تعداد عناصر یک پایه یک فضای برداری، بعد فضای برداری نام دارد. بنابر این V_2 یک فضای برداری دو بعدی است.

تعريف توازي بردارها 1.1.25

دو بردار نا صفر \vec{U} و \vec{V} را موازي مي ناميم ، در صورتي كه اسكالر (عدد حقيقي) c وجود داشته باشد، به طوري كه $\vec{V} = c\vec{U}$.

قضیه 1.1.25

اگر \vec{V} بردار نا صفری باشد ، آنگاه

$$\vec{U} = \frac{1}{|\vec{V}|} \vec{V}$$

برداری یکه (واحد) هم جهت با \vec{V} است.

ضرب عددي دو بردار 1.2

تعريف ضرب عددي دو بردار 1.2.1

اگر $\vec{U}=(a_1,a_2)$ و $\vec{V}=(b_1,b_2)$ دو بردار در \mathbb{R}^2 باشند ، آنگاه حاصلضرب عددي دو بردار \vec{U} و \vec{V} را با $\vec{U} \cdot \vec{V}$ نشان مي دهيم و به صورت زير تعريف مي كنيم:

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = (a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

توجه می‌کنیم که حاصلضرب عددی دو بردار ، عددی حقیقی است و بردار نیست. این حاصلضرب داخلی یا حاصلضرب نقطه‌ای دو بردار نیز نامیده می‌شود.

قضیه 1.2.4

اگر \vec{U} و \vec{V} و \vec{W} بردارهایی در V^2 بوده و c یک اسکالر باشد.
آنگاه:

$\vec{U} \cdot \vec{V} = \vec{V} \cdot \vec{U}$ 1

$\vec{U} \cdot (\vec{V} + \vec{W}) = \vec{U} \cdot \vec{V} + \vec{U} \cdot \vec{W}$ 2

$\vec{W} = \vec{U} \cdot \vec{W} + \vec{V} \cdot \vec{W}$ 3. $(\vec{U} + \vec{V})$

$c(\vec{U} \cdot \vec{V}) = (c\vec{U}) \cdot \vec{V} = \vec{U} \cdot (c\vec{V})$ 4

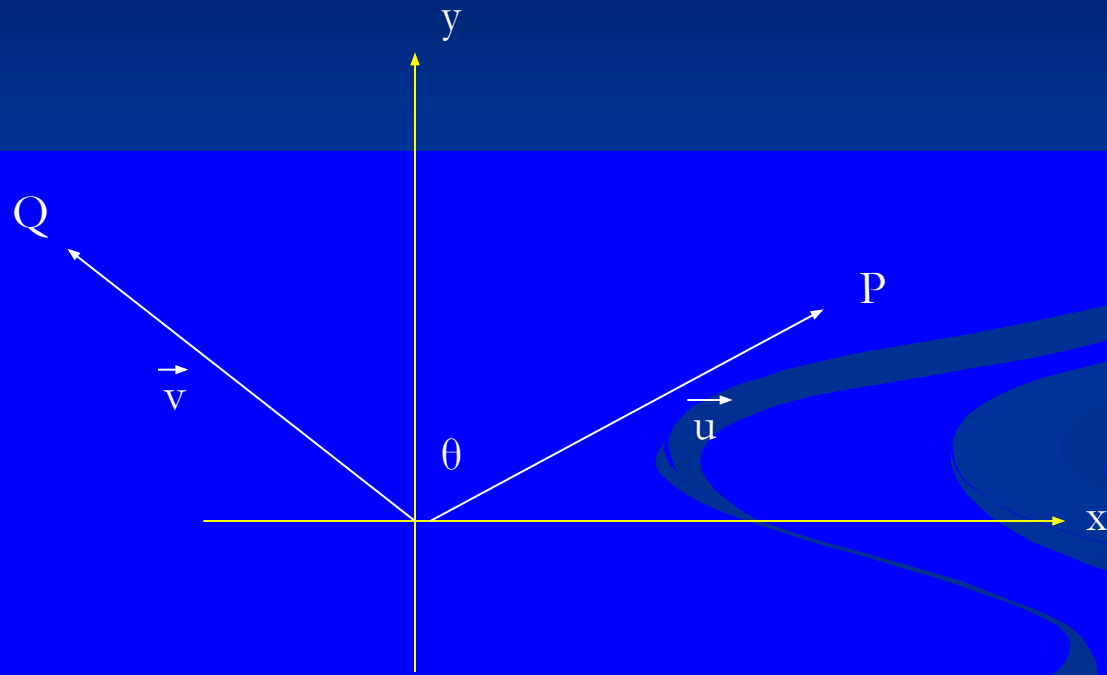
$\vec{U} = 0$ 5.0

$\vec{V} \cdot \vec{V} = V$ 6

تعريف زاويه ي بين دو بردار 1.2.5

فرض مي كنيم U و V دو بردار نا صفر باشند به طوري U كه مضرب اسكالي از V نباشد. اگر OP و OQ به ترتيب بردارهاي نمايشگر U و V باشند. آنگاه زاويه ي بين U و V را كوچكترين زاويه ي بين دو پاره خط OP و OQ تعريف مي كنيم.

شکل زیر زاویه ی بین دو بردار را در حالتی که مضرب اسکالری از نباشد، نشان می دهد:



قضیه 1.2.6

اگر θ زاویه ی بین دو بردار \vec{U} و \vec{V} باشد، آنگاه:


$$\vec{U} \cdot \vec{V} = U V \cos \theta$$

نتیجه 1.2.8

از قضیه ی قبل نتیجه می شود که دو بردار \vec{U} و \vec{V} بر هم عمودند (متعامدند) اگر و تنها اگر:

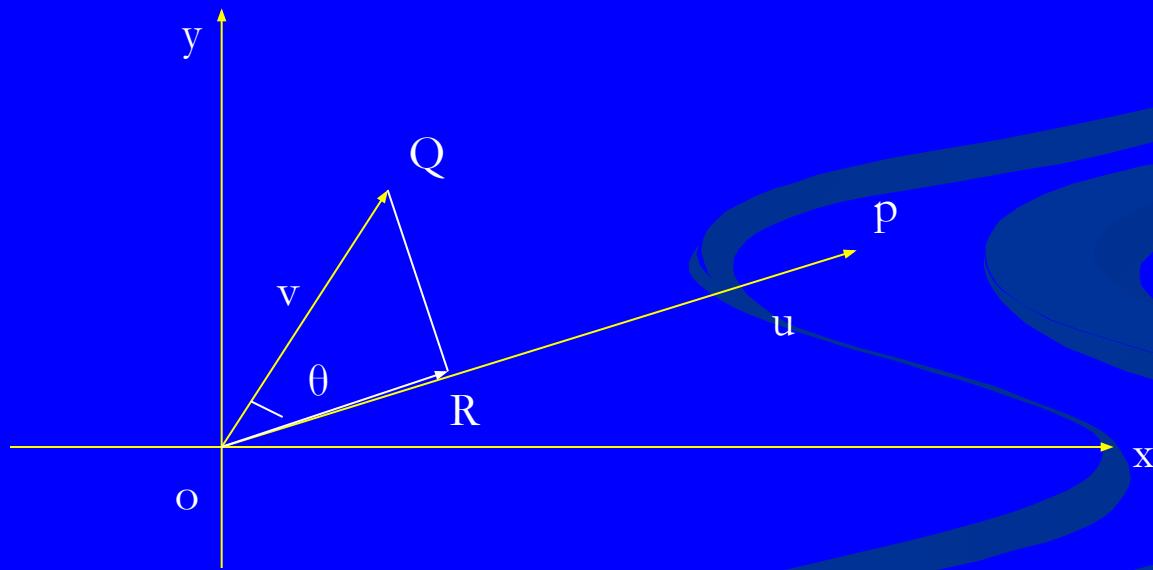
$\vec{U} \cdot \vec{V}$

$$U \cdot V = 0$$

تصویر يك بردار بر روی بردار دیگر 1.2.10

فرض می کنیم \vec{OP} و \vec{OQ} به ترتیب نمایشگرهای بردارهای U و V باشند. تصویر OQ در جهت OP ، بردار OR است، که در آن R پای عمود از نقطه Q بر خطی است که از دو نقطه P و D می گذرد.

شکل: تصویر بردار V بر روی بردار P



تعريف 1.2.11

اگر \vec{U} بردار ناصفري باشد، تصوير برداري \vec{V} روي بردار \vec{U} به صورت زير تعريف مي کنيم:

$$\text{Proj}_{\vec{u}} \vec{v} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|^2} \vec{u}$$

تصویر اسکالر \vec{V} روی \vec{U} برابر با $\vec{V} \cos\theta$ است . با توجه به قضیه داریم:

$$\vec{V} \cos\theta = \frac{\vec{V} \cdot \vec{U}}{|\vec{U}|} = \vec{V} \cdot \left(\frac{\vec{U}}{|\vec{U}|} \right)$$

بردارها در فضای سه بعدی 1.3

تعريف 1.3.1

مجموعه E تمام سه تاي هاي مرتب از اعداد حقيقي را
فضاي عددي سه بعدي مي ناميم و با R^3 نشان مي دهيم. هر
سه تاي مرتب (x, y, z) را يك نقطه در فضاي عددي سه
بعدي مي ناميم.

قضيه 1.3.2

فاصله ي بين دو نقطه $p_1(x_1, y_1, z_1)$ و $p_2(x_2, y_2, z_2)$ برابر است با:

$$| \overline{p_1 p_2} | = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

تعريف 1.3.4

يك بردار در فضاي سه بعدي، يك سه تايي مرتب از اعداد حقيقي به صورت (a_1, a_2, a_3) است. اعداد a_1, a_2, a_3 را مولفه هاي بردار (a_1, a_2, a_3) مي ناميم. مجموعه تمام بردارهايي به صورت (a_1, a_2, a_3) را با V^3 نشان مي دهيم.

اگر بردارهاي يکۀ \vec{i} و \vec{j} و \vec{k} عبارت باشند از:

$$\vec{i}=(1,0,0) \quad \vec{j}=(0,1,0) \quad \vec{k}=(0,0,1)$$

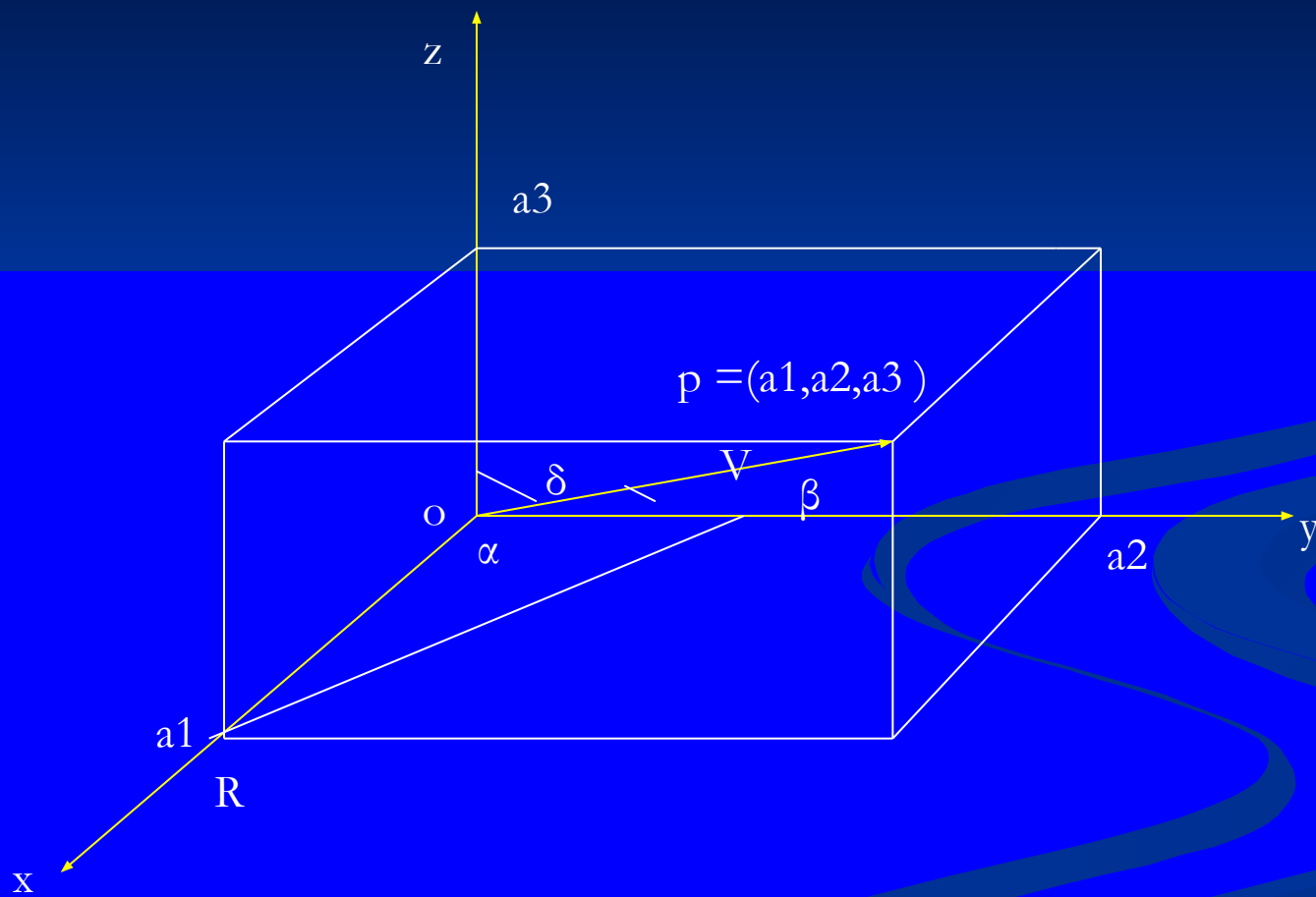
آنگاه هر بردار $\vec{V}=(a_1,a_2,a_3)$ در \mathbb{R}^3 مي توان به صورت
زير نوشت:

$$\vec{V}=(a_1,a_2,a_3)=a_1 \vec{i}+ a_2 \vec{j}+ a_3 \vec{k}$$

تعريف 1.3.5

سه زاويه α و β و δ زوايايي كه بردار \vec{V} نا صفر به ترتيب
با جهت مثبت محورهاي x و y و z مي سازد را **زوايايي**
هادي \vec{V} مي ناميم. توجه كنيد كه هر زاويه ي هادي بزرگتر
يا مساوي 0 و كوچكتر يا مساوي π است.

زوایای هادی بردار $\vec{V}=(a_1,a_2,a_3)$ در شکل نشان داده شده است.



در شکل مؤلفه های V اعدادی مثبت و زوایای هادی آن مثبت و کوچکتر 2π از هستند به طوری که در شکل دیده می شود، مثلث قائم الزاویه OPR است و داریم :

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{OR}|}{|\vec{OP}|} = \frac{a_1}{|V|}$$

مي توان نشان داد كه دستور اخير به ازاي $\alpha \leq \pi/2$ $\pi \geq$ نیز
بر قرار است. دستور هاي مشابهي براي $\cos \beta$ و α
COS به دست مي آيند.

$$\cos \beta = \frac{a_2}{|\vec{v}|}$$

$$\cos \alpha = \frac{a_3}{|\vec{v}|}$$

اعداد $\alpha \cos$ و $\beta \cos$ و $\delta \cos$ را کسینوسهای هادی بردار \vec{V} می نامند.

توجه کنید که بردار صفر، زوایای هادی و در نتیجه کسینوس های هادی ندارد.

نکته 1.3.7

اگر اندازه ي يك بردار و كسينوسهاي هادي آن معلوم باشند، آنگاه بردار به طور منحصر به فردي معي است،
زیرا:

$$a_1 = \cos \alpha |\vec{V}|$$

$$a_2 = \cos \beta |\vec{V}|$$

$$a_3 = \cos \delta |\vec{V}|$$

قضیه 1.3.8

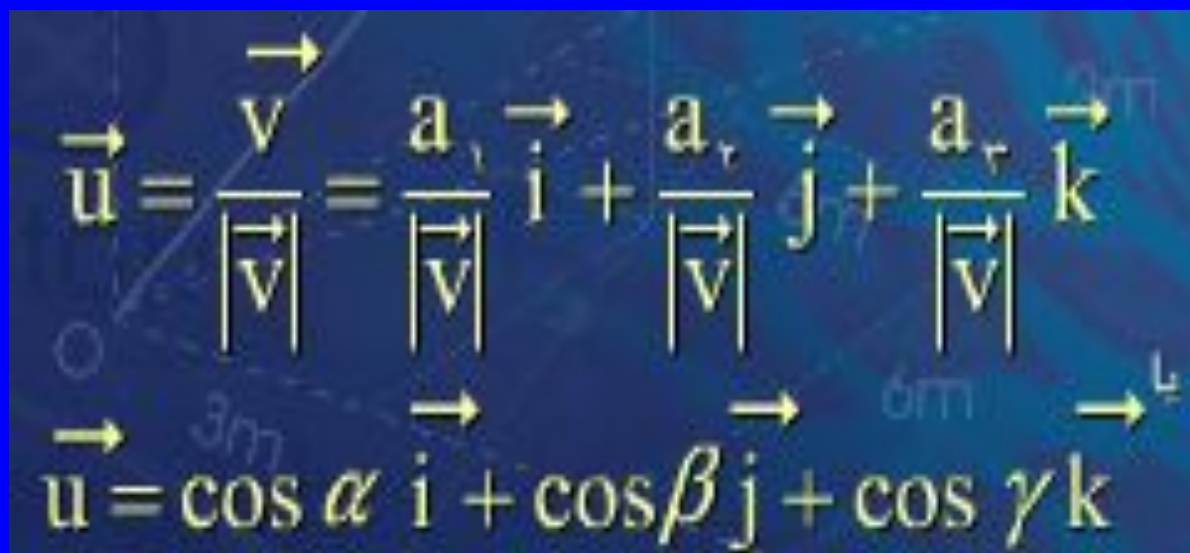
اگر α و β و δ کسینوسهای هادی بردار \vec{V} باشند، آنگاه:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \delta = 1$$

1.3.15 نتیجه

از قضیه و تعریف کسینوسهای هادی نتیجه می‌شود که مؤلفه های يك بردار يکه کسینوسهای هادی آن هستند.

به عبارت دیگر اگر $V=(a_1,a_2,a_3)$ بردار یکه هم جهت با V باشد آنگاه:


$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{a_1}{|\vec{v}|} \vec{i} + \frac{a_2}{|\vec{v}|} \vec{j} + \frac{a_3}{|\vec{v}|} \vec{k}$$
$$\vec{u} = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k}$$

در مورد بردارهاي فضايي اعمال جمع ، تفریق، ضرب اسكالر و ضرب عددي دو بردار در V_3 ، مشابه آنچه V_2 در تعريف مي شوند.

فرض مي كنيم $\vec{U}=(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec{V}=(b_1,b_2,b_3)$ يك اسكالر باشد. داريم:

$$\begin{aligned}\vec{u} + \vec{v} &= (a_1, a_2, a_3) + (b_1 + b_2 + b_3) \\ &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)\end{aligned}$$

الف

$$\begin{aligned}\vec{u} - \vec{v} &= (a_1, a_2, a_3) - (b_1 + b_2 + b_3) \\ &= (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)\end{aligned}$$

ج.

$$\vec{cu} = c(a_1, a_2, a_3) = (ca_1, ca_2, ca_3)$$

↓

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= (a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3) \\ &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3\end{aligned}$$

↓

نکته 1.3.14

به آساني مي توان نشان داد كه:

$$\begin{array}{l} \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \\ i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1 \\ \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \\ i \cdot j = j \cdot k = j \cdot k = 0 \end{array}$$

قضیه 1.3.15

اگر θ زاویه ی بین دو بردار نا صفر \vec{u} و \vec{v} در V_3 باشد آنگاه:

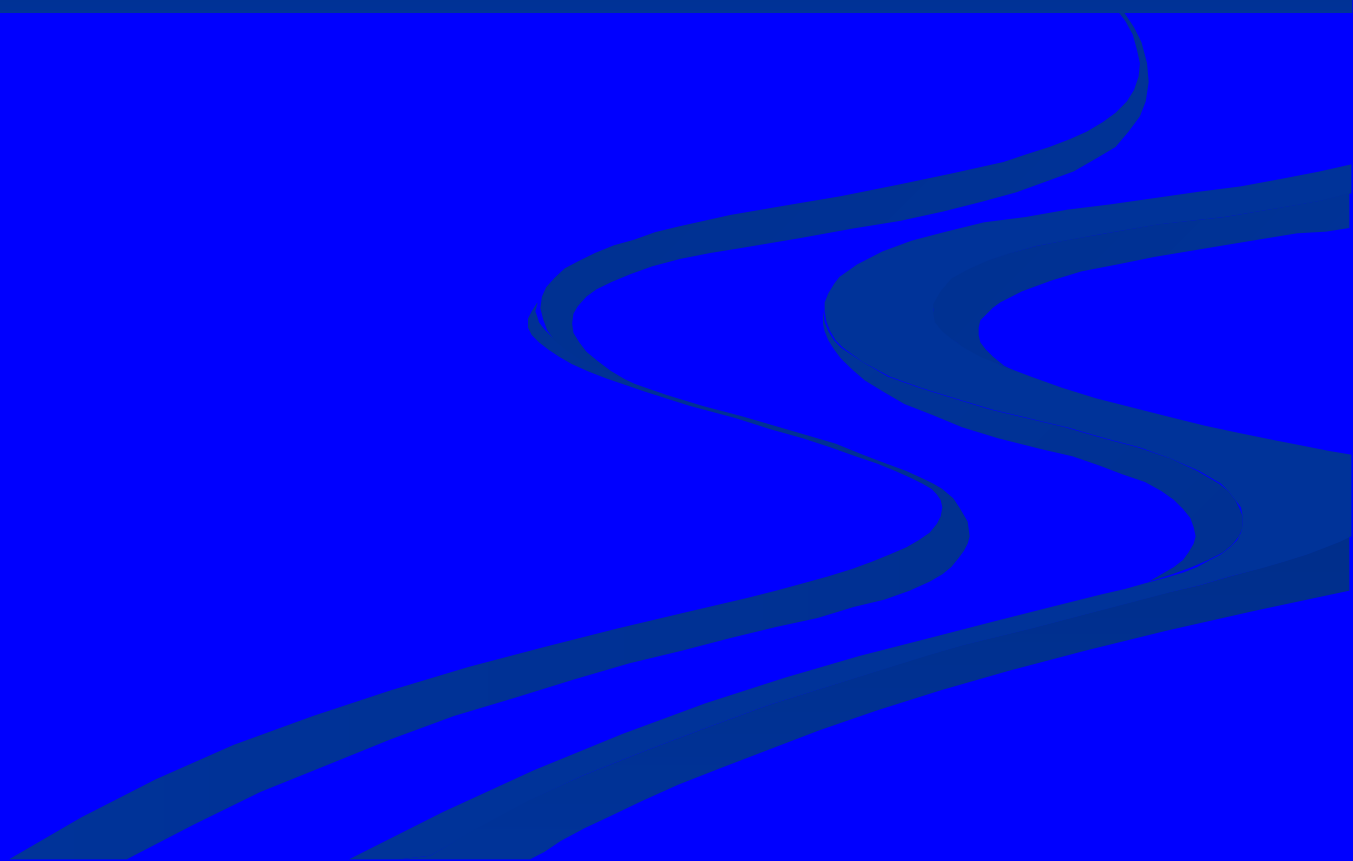
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta$$

تعريف 1.3.16

دو بردار در V_3 را موازي مي ناميم اگر و تنها اگر يکي از بردارها مضرب اسکالري از ديگري باشد.

قضيه 1.3.17

دو بردار نا صفر در V_3 موازي اند اگر و تنها اگر زاويه ي
بين آنها 0 يا π باشد.



قضیه 1.3.18

دو بردار نا صفر \vec{U} و \vec{V} در V_3 متعامدند اگر و تنها اگر

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = 0$$

ضرب برداري بردارها 1.4

تعريف 1.4.1

اگر $\vec{U}=(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec{V}=(b_1,b_2,b_3)$ آنگاه حاصل ضرب برداري U در V با نشان $U*V$ مي دهيم. برداري است که به صورت زیر تعريف مي شود:

$$\vec{U}*\vec{V}=(a_2b_3-a_3b_2,a_3b_1-a_1b_3,a_1b_2-a_2b_1)$$

برای سهولت در یادگیری و به ذهن سپردن دستور $\vec{U} * \vec{V}$ ، از نماد دترمینان استفاده می‌کنیم. یک دترمینان مرتبه دوم را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

با استفاده از نماد دترمینان دستور محاسبه $\vec{u} \times \vec{v}$ به صورت زیر در می آید:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

سمت راست عبارت اخير را مي توان با نماد زير نشان داد:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

قضیه 1.4.3

اگر \vec{U} و \vec{V} بردارهایی در V_3 باشند، آنگاه:

$$\vec{U} * \vec{V} = - (\vec{V} * \vec{U})$$

قضیه 1.4.4

اگر \vec{i} و \vec{j} و \vec{k} بردارهای یکه ی V_3 باشند، آنگاه:

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0 \quad (\text{الف})$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} \quad , \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \quad , \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} \quad (\text{ب})$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k} \quad , \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i} \quad , \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j} \quad (\text{پ})$$

قضیه 1.4.5

اگر \vec{U} و \vec{V} و \vec{W} بردارهایی در V^3 و c یک اسکالر باشد آنگاه:

$$\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$$

(الف)

$$\vec{u} \times \vec{0} = \vec{0} \times \vec{u} = \vec{0}$$

(ب)

$$(c\vec{u}) \times \vec{v} = c(\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{u} \times (c\vec{v})$$

(پ)

$$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w})$$

(ت)

$$(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \times \vec{w}) + (\vec{v} \times \vec{w})$$

(ث)

قضیه 1.4.7

اگر \vec{U} و \vec{V} دو بردار V_3 و θ زاویه ی بین \vec{U} و \vec{V} باشد، آنگاه:

$$|\vec{U} * \vec{V}| = |\vec{U}| |\vec{V}| \sin \theta$$

نتیجه 1.4.9

اگر \vec{U} و \vec{V} دو بردار نا صفر در V_3 باشند آنگاه و موازی اند
اگر و تنها اگر $\vec{U} * \vec{V} = 0$

قضیه 1.4.11

اگر \vec{U} و \vec{V} و \vec{W} سه بردار در V^3 باشند، آنگاه:

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} \quad (\text{الف})$$

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{w} \quad (\text{ب})$$

تعريف 1.4.12

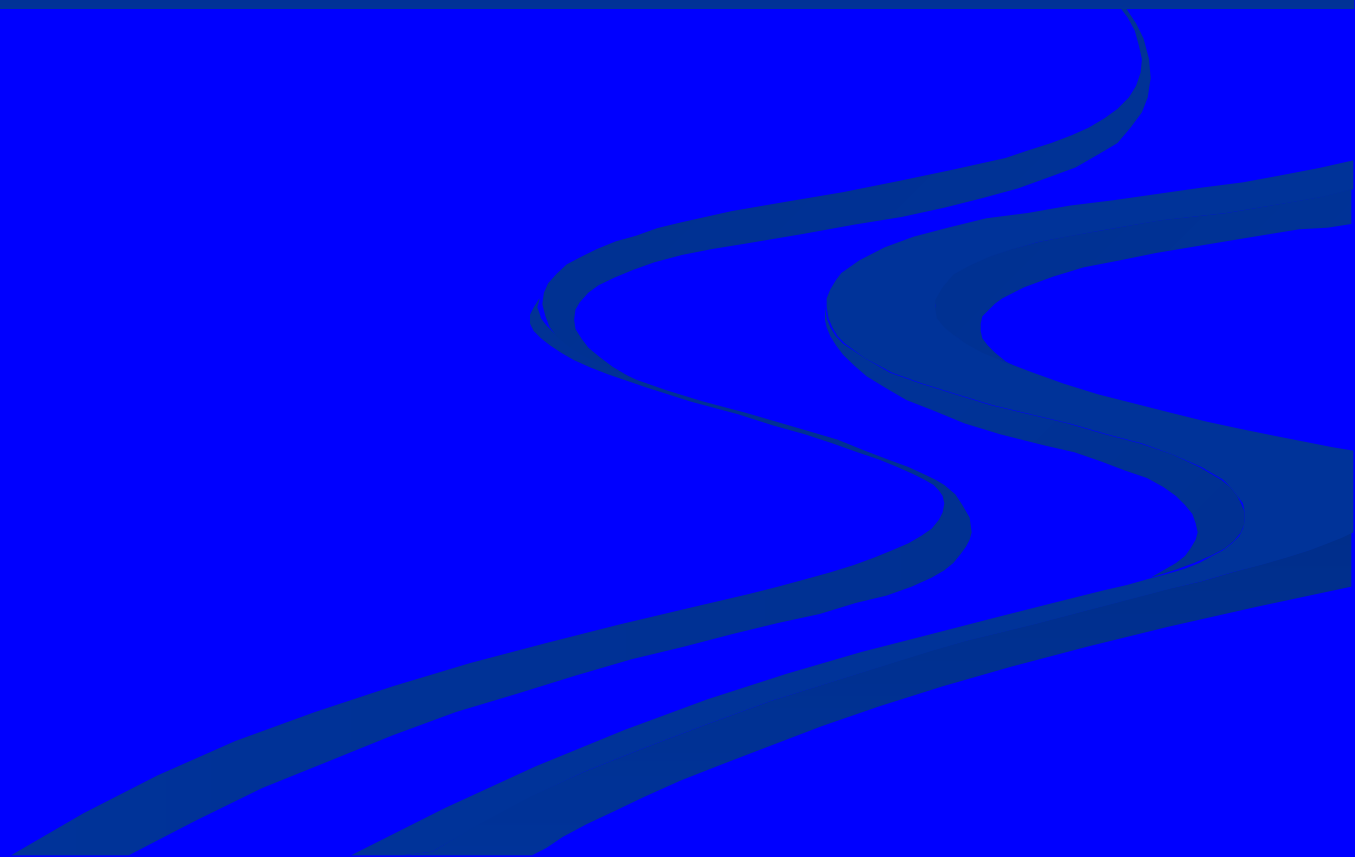
فرض مي كنيم $\vec{U}=(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec{V}=(b_1,b_2,b_3)$ و حاصلضرب $(c_1,c_2,c_3)=\vec{U} \cdot (\vec{V} * \vec{W})$ را حاصلضرب عددي سه گانه بردارهاي U و V و W مي ناميم.

حاصلضرب عددي سه گانه برابر است با:

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

حاصل ضرب عددي سه گانه يك اسكالر است.



قضیه 1.4.13

اگر \vec{U} و \vec{V} دو بردار نا صفر در باشند آنگاه:

$$\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0 \quad (\text{الف})$$
$$\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0 \quad (\text{ب})$$

1.5 بردارهاي فضاي n بعدي

تعريف 1.5.1

فرض کنید n عدد صحيح مثبتی باشد، n تایی مرتب (x_1, x_2, \dots, x_n) مجموعه ای از n عدد است که به ترتیب معینی نوشته شده اند.

اعداد حقيقي x_1, x_2, \dots, x_n را به ترتيب مؤلفه هاي اول تا n ام اين n تاي مرتب مي خوانيم. مجموعه ي تمام n تاي هاي مرتب را با R نشان مي دهيم.

دو تایی مرتب $X=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ و $Y=(y_1,y_2,\dots,y_n)$ را
برابر مب نامیم اگر و تنها اگر برای هر $i=1,2,\dots,n$ داشته
باشیم:

$$x_i=y_i$$

تعريف 1.5.3

فرض مي كنيم $\vec{U}=(a_1,a_2,\dots,a_n)$ و $\vec{V}=(b_1,b_2,\dots,b_n)$ دو بردار در V_n و c عدد حقيقي (اسكالر) باشد.

مجموع دو بردار و ضرب اسکالر عدد در بردار به صورت
زیر تعریف می شود:

$$\begin{aligned} \vec{U} + \vec{V} &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n) \\ c\vec{U} &= (ca_1, ca_2, \dots, ca_n) \end{aligned}$$

قضیه 1.5.4

فرض می‌کنیم \vec{U} و \vec{V} و \vec{W} سه بردار در V_n و c و k دو اسکالر
(عدد حقیقی) باشند. در این صورت

الف) جمع بردارها جا به جایی پذیر است، یعنی

$\vec{} \quad \vec{} \quad \vec{} \quad \vec{}$

$$U+V=V+U$$

ب) جمع بردارها شرکت پذیر است، یعنی

$$\vec{W} = \vec{U} + (\vec{V} + \vec{W}) + (\vec{U} + \vec{V})$$

پ) عمل جمع دارای عضو خنثی است یعنی

بردار $\vec{0} = (0, \dots, 0, 0)$ بردار صفر n مؤلفه ای وجود دارد به

طوری که

$$\vec{U} + \vec{0} = \vec{U}$$

$$U + 0 = U$$

ت) برای هر \vec{U} بردار قرینه $-\vec{U}$ وجود دارد به طوری که

$$\vec{U} + (-\vec{U}) = \vec{0}$$

$$c(\vec{U} + \vec{V}) = c\vec{U} + c\vec{V} \quad \text{ث)}$$

$$\vec{U} = c(k\vec{U}) \quad \text{ج)}$$

$$\vec{U} = \vec{c}U + kU \quad \text{ح)}$$

خ) وجود همانی نسبت به ضرب اسکالر، یعنی

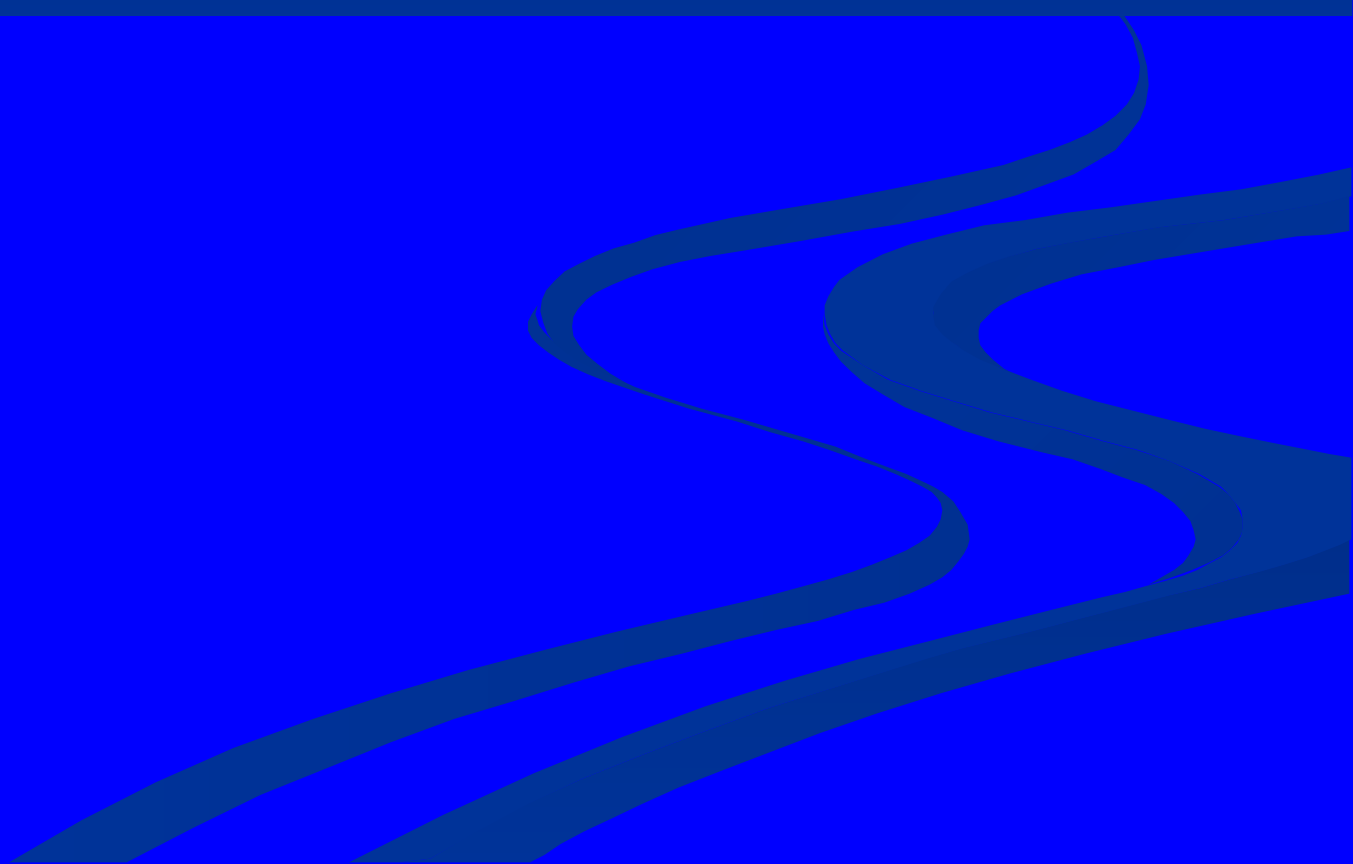
$$1\vec{U} = \vec{U}$$

تعریف 1.5.5

طول بردار $U=(a_1,a_2,\dots,a_n)$ برابر است با

$$|u| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$$

فصل دوم: ماتریس و دترمینان



در این فصل با معرفی ماتریس مفهوم بردار را تعمیم می دهیم.
همچنین انواع ماتریس، ماتریسهای خاص و اعمال جبری
روی ماتریس ها، دترمینان و وارون ماتریس را مورد
مطالعه قرار می دهیم.

ماتریس 2.1

تعريف 2.1.1

هر جدولی از اعداد را که شامل m سطر و n ستون باشد، یک ماتریس m در n می نامیم و به شکل زیر نشان می دهیم.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

یا

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

هر يك از اعداد a_{ij} را يك عنصر يا درايه ماتريس مي ناميم. در
اينجا i اندیس سطر و j اندیس ستون است، به بیان دیگر
، عنصر a_{ij} در محل تلاقی سطر i ام و ستون j ام ماتريس
قرار دارد.

تعريف 2.1.2

الف) هر گاه ماتریس $A=(a_{ij})_{mn}$ تنها دارای یک سطر باشد، یعنی $m=1$ ، این ماتریس را یک ماتریس سطری (بردار سطری) می نامیم.

ماتریس $[1 و 4 و -3]$ یک ماتریس سطری است.

اگر ماتریس $A=(a_{ij})_{mn}$ تنها دارای یک ستون باشد یعنی $n=1$ ، این ماتریس را یک ماتریس ستونی (بردار ستونی) می

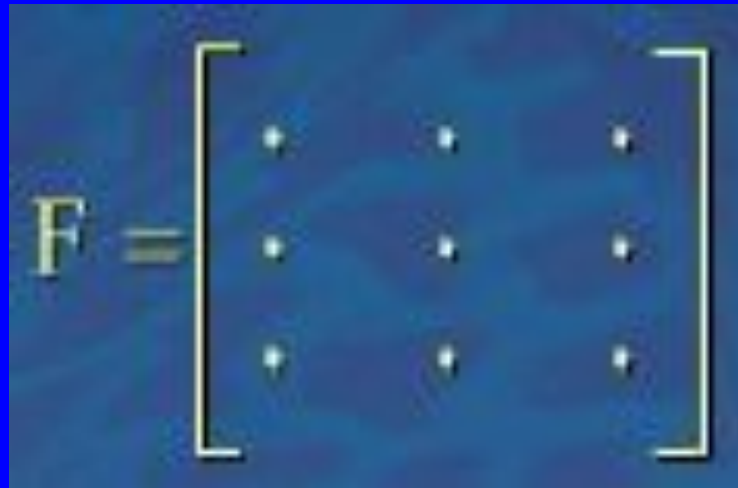
نامیم.

یک ماتریس ستونی است.



ماتریس

پ) اگر تمام عناصر ماتریس $A=(a_{ij})_{mn}$ صفر باشند آن را
ماتریس صفر می نامیم و به صورت $A=0_{mn}$ یا
 $A=0$ نشان می دهیم. مانند:

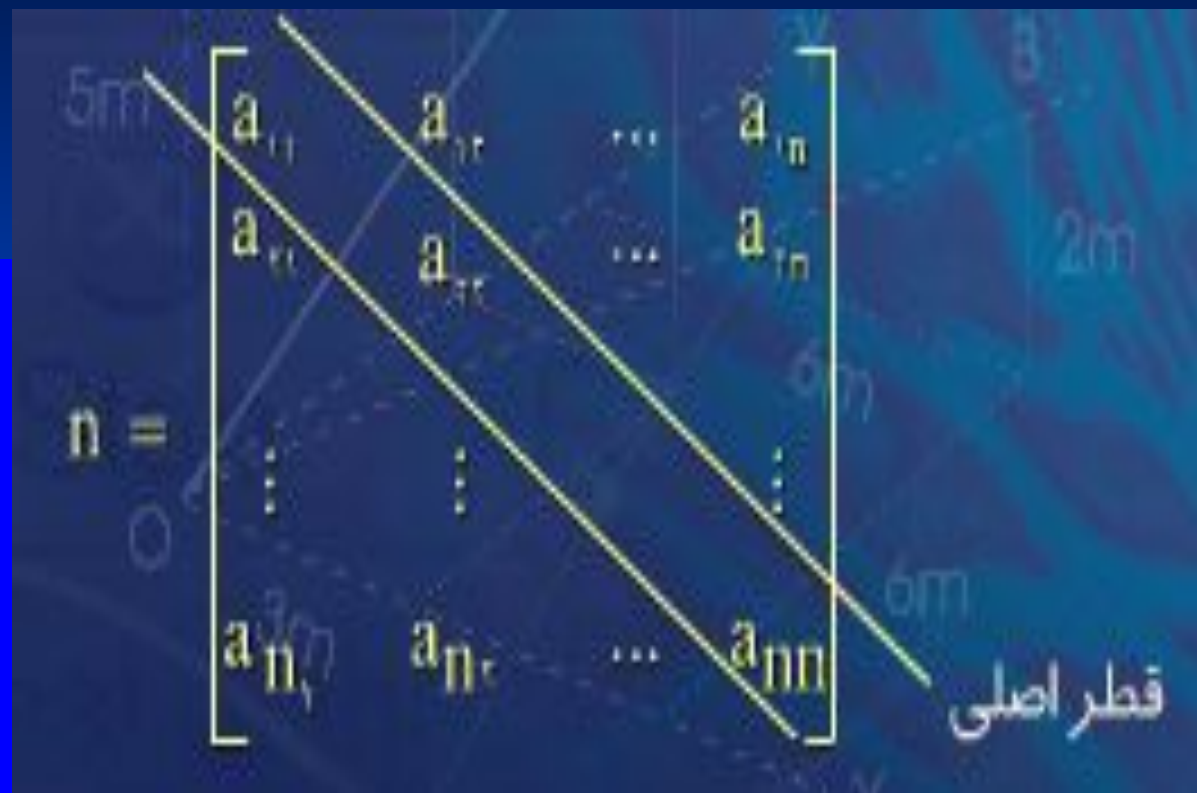

$$F = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

F یک ماتریس صفر 3×2 است.

تعريف 2.1.3

ماتريسي را كه تعداد سطرها و تعداد ستونهايش برابر باشد، يك
ماتريس مربع مي ناميم. به بيان ديگر $A=(a_{ij})_{mn}$ يك
ماتريس مربع است اگر و تنها اگر $m=n$

در ماتریس مربع $A=(a_{ij})_{mn}$ ، قطری را که شامل عناصر
 $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ قطر اصلی و این عناصر را عناصر
قطر اصلی می نامیم.



تعريف 2.1.4

ماتريس مربع $A=(a_{ij})_{mn}$ را يك ماتريس هماني يا واحد $n \times n$ مي ناميم اگر هر يك از عناصر قطر اصلي برابر 1 و همه ي عناصر ديگر آن صفر باشند.

ماتریس واحد $n \times n$ را با I نشان می دهیم. مانند:

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

تعريف تساوي دو ماتريس 2.1.5

دو ماتريس $A=(a_{ij})_{mn}$ و $B=(b_{ij})_{pq}$ را برابر مي گوييم
اگر $n=q$ و $m=p$ و براي هر i و j
که $i=1,2,\dots,m$ و $j=1,2,\dots,n$ داشته باشيم $a_{ij}=b_{ij}$

برای مثال:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \# \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

تعريف 2.1.7

فرض مي كنيم $A=(a_{ij})_{m \times n}$ و $B=(b_{ij})_{m \times n}$ دو ماتريس
عددي حقيقي باشد.

الف) حاصل جمع این دو ماتریس را با $A+B$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$$

ب) حاصل ضرب عدد حقيقي k در A ماتريس را با kA نشان داده و به صورت زير تعريف مي كنيم:

$$kA = (ka_{ij})_{m \times n}$$

توجه کنید که $A+B$ و kA ماتریسهای $m*n$ هستند. توجه داشته باشید که جمع دو ماتریس که دارای تعداد سطرهای متفاوت یا تعداد ستونهای متفاوت باشند تعریف نشده است.

تعريف 2.1.9

اگر $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ماتریس (-1) را قرینه ی ماتریس A می نامیم و با $A = (-a_{ij})_{m \times n}$ نشان می دهیم.

اگر $A = (a_{ij})_{m \times n}$ و $B = (b_{ij})_{m \times n}$ بنابر تعریف داریم:

$$A - B = A + (-B)$$

قضیه 2.1.11

اگر A و B و C سه ماتریس $m \times n$ و k و h دو عدد حقیقی باشند
آنگاه:

$$A + B = B + A \quad (\text{الف})$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C \quad (\text{ب})$$

$$k(A + B) = kA + kB \quad (\text{پ})$$

$$(k + h)A = kA + hA \quad (\text{ت})$$

تعريف 2.1.13

ماتریسهای $A=(a_{ij})_{m \times p}$ و $B=(b_{ij})_{p \times n}$ را در نظر می
گیریم. منظور از حاصل ضرب A در B ماتریس $m \times n$ ای
چون c به طوری که

$$\begin{aligned} C &= (c_{ij})_{m \times n} \\ c_{ij} &= a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{ip} b_{pj} \\ &= \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} \end{aligned}$$

حاصل ضرب A در B یعنی c را با AB نشان می دهیم.

قضيه 2.1.15

اگر $A=(a_{ij})_{mn}$ يك ماتريس مربعي $n*n$ باشد آنگاه:

$$AI_n = A = I_n A$$

قضیه 2.1.16

اگر $A=(a_{ij})_{mp}$ و $B=(b_{ij})_{pq}$ و $C=(c_{ij})_{qn}$ آنگاه
$$A(BC)=(AB)C$$

قضیه 2.1.19

اگر $A=(a_{ij})_{pn}$ و $B=(b_{ij})_{pn}$ و $C=(c_{ij})_{mp}$

$$C(A+B)=CA+CB$$

تعريف 2.1.20

اگر در ماتریس $A=(a_{ij})_{mn}$ جای سطرها و ستونها را با یکدیگر عوض کنیم، ماتریس حاصل را ترانهاده (Transpose) ماتریس A می نامیم و آن را با A^T نشان می دهیم. به بیان دیگر $A^T=(b_{ij})_{nm}$ که در آن برای i و j داریم:

$$b_{ij}=a_{ji}$$

قضیه 2.1.21

اگر A و B دو ماتریس $n \times m$ و $m \times n$ عددی حقیقی باشد آنگاه:
الف) $A^T(A) = (AA^T)$ یعنی ترانهاده ، ترانهاده ماتریس با ماتریس برابر است.

ب) $k(A^T) = (kA)^T$ یعنی ترانهاده مضربی از یک ماتریس با همان مضرب ترانهاده ماتریس برابر است.

پ) $A + B = (A^T + B^T)^T$ ، یعنی ترانهاده مجموع دو ماتریس با مجموع ترانهاده های دو ماتریس برابر است.

ت) اگر A و B دو ماتریس مربع باشند، آنگاه $BA^T = (AB^T)^T$ ، یعنی ترانهاده ی حاصلضرب دو ماتریس با حاصلضرب ترانهاده ماتریس دومی در ترانهاده ماتریس اولی برابر است.

تعريف 2.1.23

الف) ماتريس مربع A را متقارن مي ناميم اگر $A = A^T$.
براي مثال ماتريس زير متقارن است. توجه كنيد كه در ماتريس
متقارن عناصر ماتريس نسبت به قطر اصلي متقارن هستند.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

(ب) ماتریس A مربع را شبه متقارن می نامیم اگر $A=A^T$. اگر
یک ماتریس شبه متقارن باشد باید برای هر i و j داشته باشیم
 $a_{ij}=-a_{ji}$ اما از $a_{ii}=-a_{ii}$ نتیجه می شود $a_{ii}=0$. پس عناصر
قطر اصلی در ماتریس شبه متقارن همگی برابر صفرند.

پ) ماتریس A مربع را قطري مي ناميم اگر همه ي عناصر غير واقع بر قطر اصلي آن صفر باشند. مانند:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ت) ماتريس قطري S را يك ماتريس اسكالر مي ناميم، اگر عناصر قطر اصلي آن برابر عدد ثابت K باشد، يعني

$$S = \begin{bmatrix} k & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & k & \dots & \cdot \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \cdot & \cdot & \dots & k \end{bmatrix}$$

ث) ماتريس $n \times n$ و c را متعامد مي گوييم اگر :

$$CC^T = C^T C = I_n$$

برای مثال:

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad C^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$CC^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = C^T C = I_2$$

آنگاه

پس C ماتریسی متعامد است.

ج) ماتریس مربع U را ماتریس مثلثی بالایی نامیم، اگر تمام عناصر زیر قطر اصلی آن صفر باشد. مانند:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

چ) ماتریس مربع L را ماتریس مثلثی پایین می نامیم، اگر تمام عناصر بالای قطر اصلی آن صفر باشد. مانند:

$$L = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

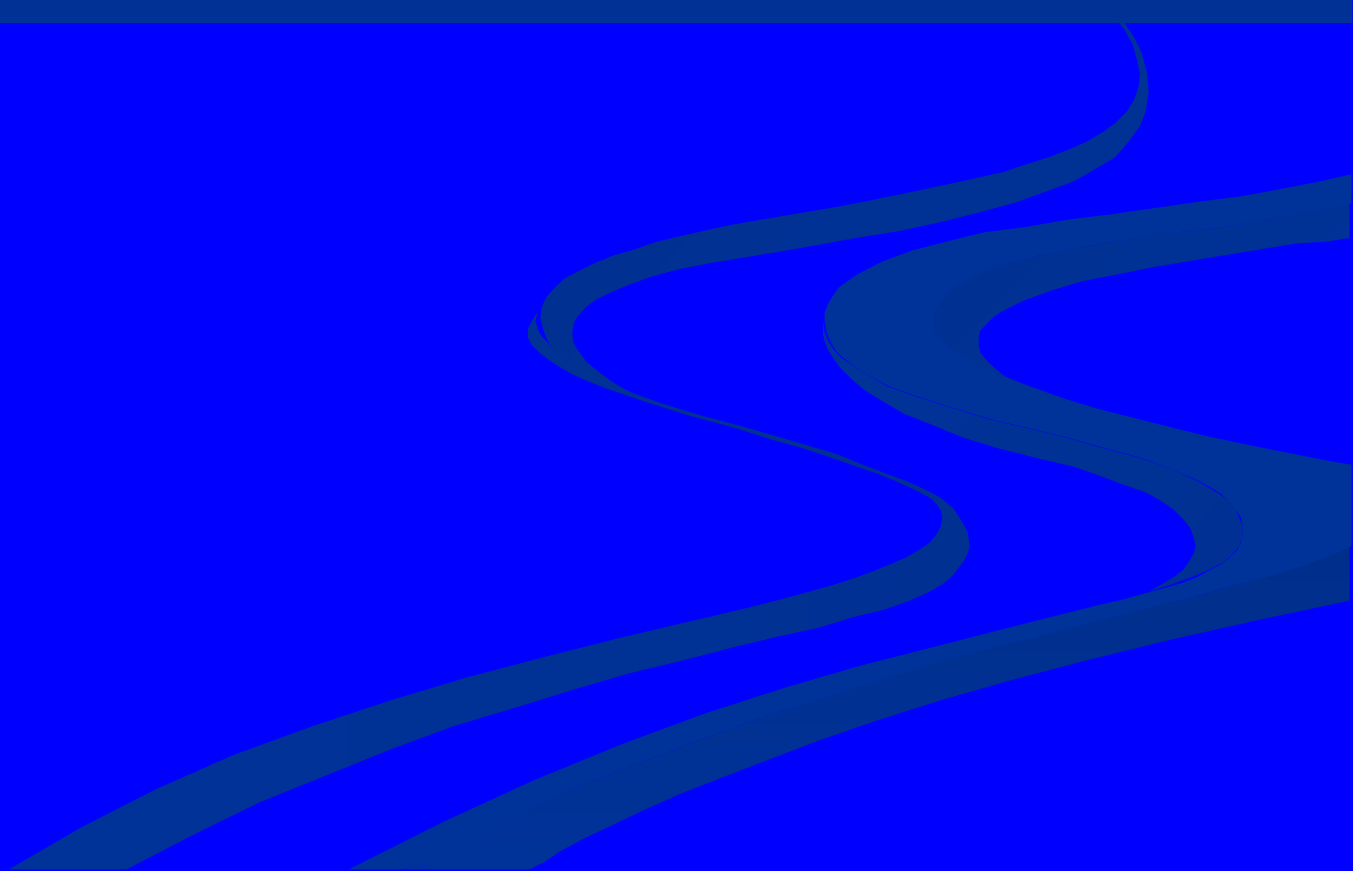
تعريف 2.1.25

در ماتریس مربع $A=(a_{ij})_{n \times n}$ مجموع تمام قطر اصلی را اثر A می نامیم و با $\text{tr}(A)$ نشان می دهیم. پس:

$$\begin{aligned} \text{tr}(A) &= a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ii} \end{aligned}$$

2.2 دتر مینان

دترمینان ماتریس A را با $\det A$ یا $|A|$ نشان می دهیم.



تعريف 2.2.1

(1) ماتريس 1×1 تنها داراي يك عنصر a_{11} است، دترمینان این ماتريس را برابر با عدد a_{11} تعريف مي كنيم.

(2) دترمینان ماتریس 2*2

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

به صورت زیر تعریف می شود

$$\text{Det } A = A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

تعريف 2.2.2

ماتريس $A=(a_{ij})_{n \times n}$ را در نظر مي گيريم. فرض كنيد M_{ij} ماتريسي $(n-1) \times (n-1)$ باشد كه از حذف سطر i ام و ستون j ام ماتريس A به دست آمده است. دترمينان ماتريس M_{ij} ، يعني M_{ij} را مينور عنصر در ماتريس مي ناميم.

تعریف 2.2.3

همسازه عنصر a_{ij} در ماتریس $A=(a_{ij})_{n \times n}$ را با A_{ij} نشان می دهیم و برابر با عدد زیر است:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$$

تعريف 2.2.4

دترمینان ماتریس $A=(a_{ij})_{n \times n}$ را به صورت

$$\det A = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{in} A_{in}$$
$$= \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}$$

تعريف مي كنيم. مي گوييم دترمینان A بر حسب سطر i ام بسط داده شده است.

بنابر این تعریف برای محاسبه y دترمینان y ماتریس، y سطر یا y ستون را انتخاب می کنیم. این سطر یا ستون را در همسازه اش ضرب، سپس مقادیر حاصل را با هم جمع می کنیم.

اگر دترمینان را بر حسب سطر یا ستونی که بیشترین تعداد صفر را دارد محاسبه می‌کنیم، محاسبات کوتاه‌تر می‌شود، زیرا نیازی به محاسبه‌ی همسازه‌های صفر نیست. چون حاصلضرب صفر در هر همسازه‌ای صفر است.

قضيه (خواص دترمینان) 2.2.7

1) دترمینان ماتریس مربع A و ترانهاده A برابر است یعنی:

$$A = A^T$$

2) اگر تمام عناصر يك سطر یا يك ستون ماتریس A صفر باشند، آنگاه

$$A = 0$$



(3) اگر تمام عناصر يك سطر يا يك ستون ماتريس A در عدد r ضرب مي كنيم آنگاه دترمينان ماتريس حاصل برابر با A است.

(4) دترمينان ماتريس حاصل از تعويض دو سطر يا دو ستون ماتريس A مساوي است با منهاي دترمينان A .

5) اگر دو سطر یا دو ستون ماتریسی برابر باشند، آنگاه مقدار دترمینان آن برابر با صفر است.

6) دترمینان حاصل از جمع مضرب اسکالری از یک سطر (یا ستون) با سطری (یا ستونی) دیگر از ماتریس A مساوی است با دترمینان A .

(7) دترمینان حاصلضرب دو ماتریس برابر با حاصلضرب دترمینانهای آنها است یعنی

$$|AB| = |A| |B|$$

(8) دترمینان یک ماتریس قطری برابر است با حاصلضرب عناصر روی قطر اصلی آن.

(9) دترمینان ماتریس واحد برابر یک است، یعنی

$$|I_n| = 1$$

تعريف 2.2.15

اگر دترمینان ماتریس $A=(a_{ij})_{nn}$ برابر صفر باشد ، ماتریس A را منفرد می نامیم. در غیر این صورت ماتریس را غیر منفرد می نامیم.
ماتریس زیر منفرد است.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -3 \\ 7 & 4 & -6 \end{bmatrix}$$

وارون ماتریس 2.3

تعريف 2.3.1

ماتريس $A=(a_{ij})_{nn}$ را وارون پذير مي ناميم ، اگر ماتريسي مانند $B=(b_{ij})_{nn}$ وجود داشته باشد به طوري که

$$AB=BA=I_n$$

اگر A ماتريسي وارون پذير باشد، آنگاه وارون آن منحصر به فرد است و آن را با A^{-1} نشان مي دهيم.

اعمال سطري مقدماتي 2.3.5

ماتريس $A=(a_{ij})_{nn}$ را در نظر مي گيريم. هر يك از اعمال زير را كه بر روي سطر هاي ماتريس A انجام مي پذيرد، يك عمل سطري مقدماتي مي ناميم.

- (1) تعويض دو سطر ماتريس A .
- (2) ضرب يك سطر ماتريس A در يك عدد نا صفر.
- (3) افزودن مضربي از يك سطر ماتريس A به سطري ديگر.

برای اختصار در نوشتن اعمال سطری مقدماتی ، از حرف R ،
اول کلمه ی Row به معنای سطر به صورت زیر استفاده
می کنیم.

الف) $R_i \rightleftharpoons R_j$ به معنای تعویض سطر i ام و سطر j ام

ب) kR_1 به معنای ضرب سطر i ام ماتریس در عدد ناصفر k

پ) $R_j + kR_i$ به معنای افزودن برابر سطر i ام به سطر j ام

قضيه 2.3.8

اگر ماتریس وارون پذیر A به وسیله Y یک سلسله اعمال
مقدماتی تبدیل به ماتریس واحد شود، آنگاه با انجام همین
سلسله اعمال سطری مقدماتی بر روی ماتریس واحد ،
وارون ماتریس A به دست می آید.

برای به دست آوردن وارون ماتریس A معمولاً اعمال سطری
مقدماتی را به طور هم زمان بر روی ماتریس A و ماتریس
واحد انجام می دهند. لذا ماتریس مرکب $[A \ I]$ را در نظر
گرفته و با انجام یک سلسله اعمال مقدماتی سطری آن را
تبدیل به $[I \ B]$ می کنیم. بنا بر قضیه ی بالا، برابر وارون
ماتریس است.

تعريف 2.3.11

ترانهاده ماتريس همسازه هاي ماتريس مربع A را ماتريس الحاقى A مي ناميم و با نشان مي دهيم ، پس:

$$\text{adj}A = (A_{ij})^T$$

قضيه 2.3.13

اگر A يك ماتريس $n \times n$ باشد آنگاه :

$$A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = (\text{adj } A)I_n$$

قضیه 2.3.13

اگر $\det A \neq 0$ ، آنگاه وارون وجود دارد و برابر است با

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj } A$$

عکس این نتیجه نیز درست است یعنی اگر A وارون پذیر باشد
، آنگاه

$$\det A \neq 0$$

قضیه 2.3.17

اگر A و B دو ماتریس مربع $n \times n$ و وارون پذیر باشند آنگاه الف) ماتریس حاصل ضرب وارون پذیر است و

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

ب) ماتریس ترانزپوز A وارون پذیر است و

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

پ) وارون ماتریس وارون A برابر A است ، یعنی

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

ت) دترمینان وارون ماتریس A برابر با معکوس دترمینان A است یعنی

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$$

فصل سوم: دستگاه معادلات خطي و توابع خطي

در این فصل با استفاده از مفهوم ماتریس و دترمینان روشی
برای حل و بحث در وجود جوابهای دستگاه معادلات خطی
ارائه دهیم. سپس استقلال و وابستگی خطی یک مجموعه از
بردارها را مورد بررسی قرار دهیم. در خاتمه ی فصل با
توابع خطی آشنا می شویم.

دستگاه معادلات خطي 3.1

معادله اي به صورت $a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_nx_n=0$ با مجهول x_1, x_2, \dots, x_n را يك معادله ي n مجهولي خطي مي ناميم.
 n تايي (x_1, x_2, \dots, x_n) از اعداد حقيقي را كه در اين معادله صدق كنند يك جواب آن مي ناميم.

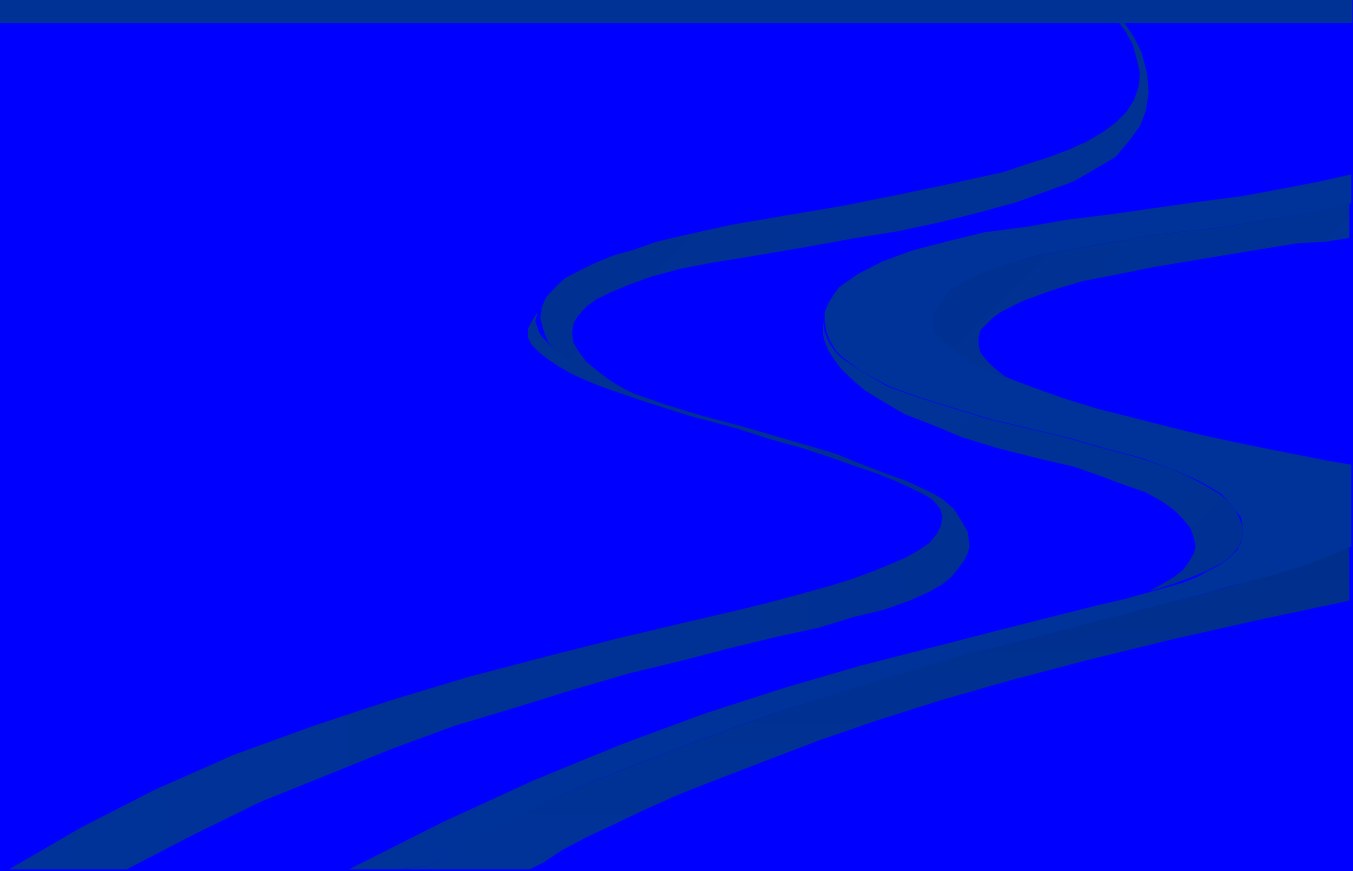
تعريف 3.1.1

مجموعه اي از معادلات خطي

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

را يك دستگاہ m معادله ي خطي n مجهولي مي ناميم.

تایي از اعداد حقيقي را در تمام معادله هاي دستگاه صدق کند
يك جواب اين دستگاه مي ناميم.



این دستگاه را میتوان به صورت معادله ی ماتریسی زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

با فرض

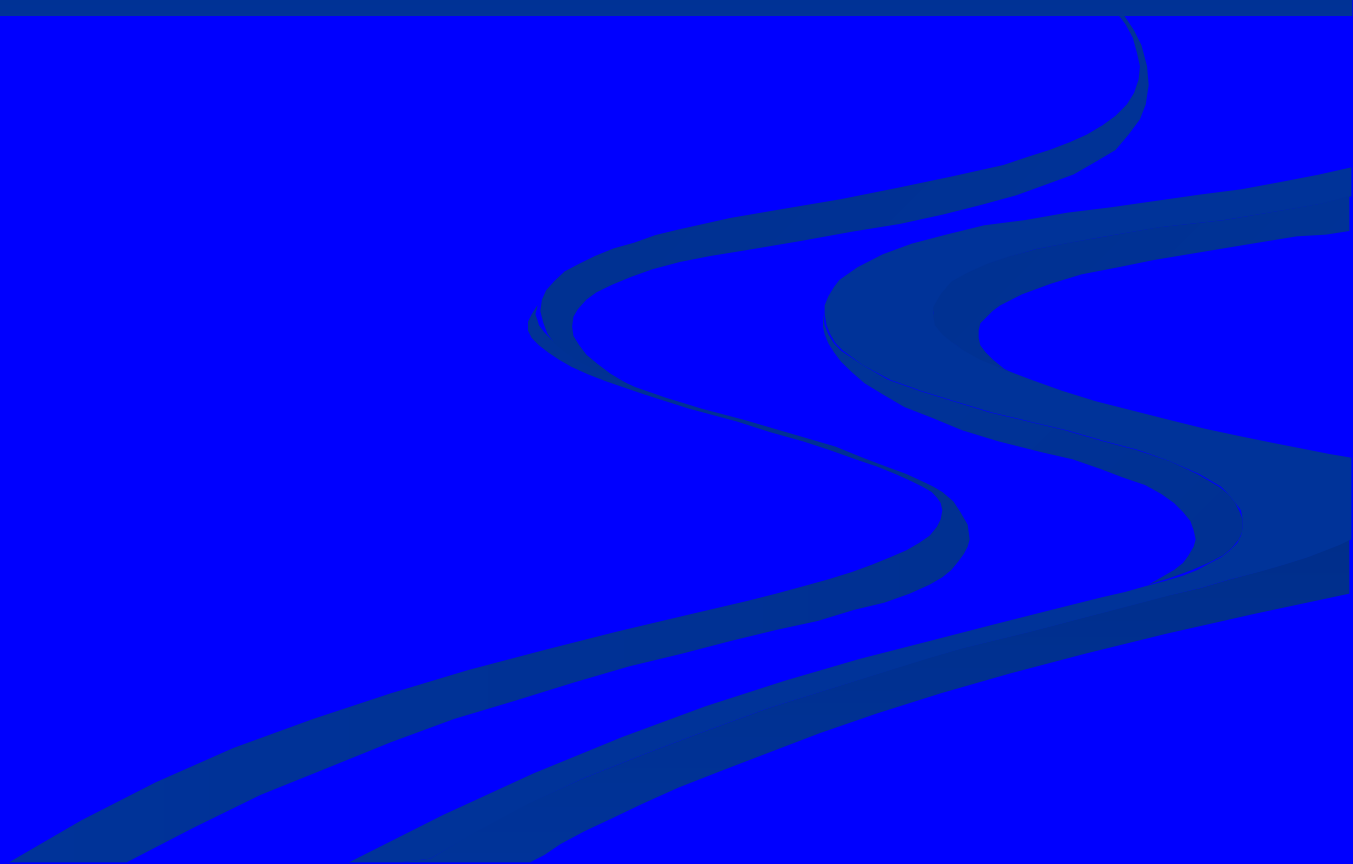
$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad A = (a_{ij})_{m \times n}$$

معادله ي ماتريسي اخير به صورت خلاصه ي زير در مي آيد.

$$AX=B$$

A را ماتريس ضرايب X را ماتريس مجهولها و B را ماتريس طرف دوم دستگاه معادلات خطي مي ناميم.

توجه کنید يك دستگاه معادلات خطي ممكن است داراي يك
جواب منحصر به فرد يا بينهایت جواب باشد ويا اصلا
جوابي نداشته باشد.



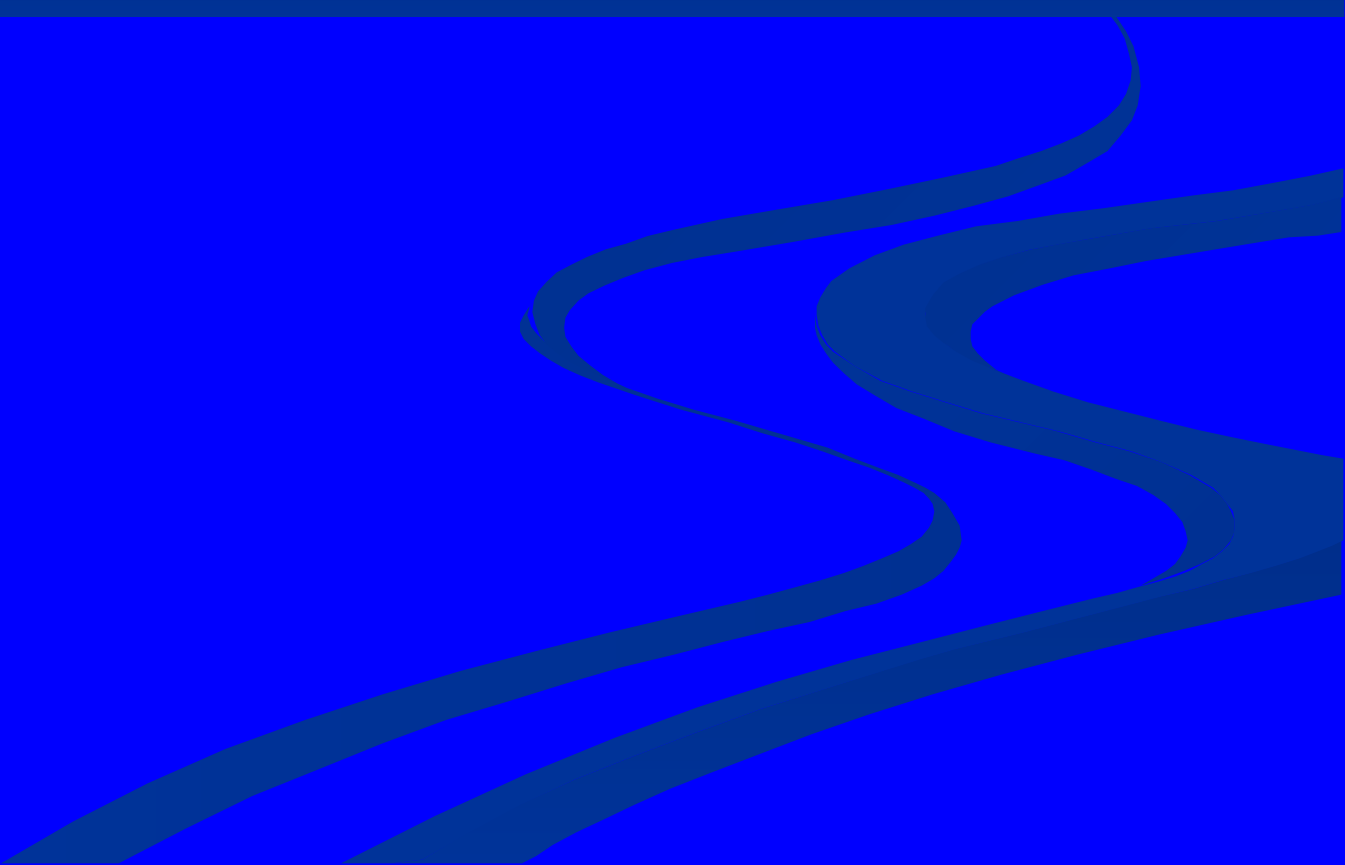
اينك به معرفي روشهائي براي حل يك دستگاہ معادلات خطي
مي پردازيم.

1- روش حذف گوسي

2- دستور كرامر

روش حذف گوسی 3.1.2

میتوان نشان داد دو دستگاه معادلات خطی که یکی از آنها به وسیله ی انجام اعمال زیر روی معادلات دستگاه دیگری به دست آمده باشد دارای جواب یا جوابهای یکسان هستند:

- (1) ضرب يك معادله ي دستگاه در عددي غير صفر.
 - (2) تعويض محل دو معادله ي دستگاه و
 - (3) افزودن مضربي از يك معادله به معادله ي ديگر دستگاه.
- 

پس براي حل دستگاه $AX=B$ بايد تا جايي كه ممكن است به
وسيله ي اعمال سطري مقدماتي ماتريس $[A \ B]$ را به
ماتريس ساده تري تبديل كنيم تا جوابها به آساني به دست
آيند.

قضيه 3.1.6

اگر تعداد مجهولها با تعداد معادله ها ي يك دستگاہ معادلات خطي برابر باشد (دستگاہ n معادلات n مجهولي) و ماتريس ضرایب دستگاہ وارون پذیر باشد آنگاه دستگاہ همواره دارای يك جواب منحصر به فرد است.

دستور کرامر 3.1.8

اگر ضرایب يك دستگاه n معادلات n مجهولي وارون پذیر باشد آنگاه جواب دستگاه برابر است با

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A} \quad i=1,2,\dots,n \quad (*)$$

که در آن A_i ماتریس حاصل از جایگزین کردن ماتریس ستونی در ستون i ام ماتریس A است.

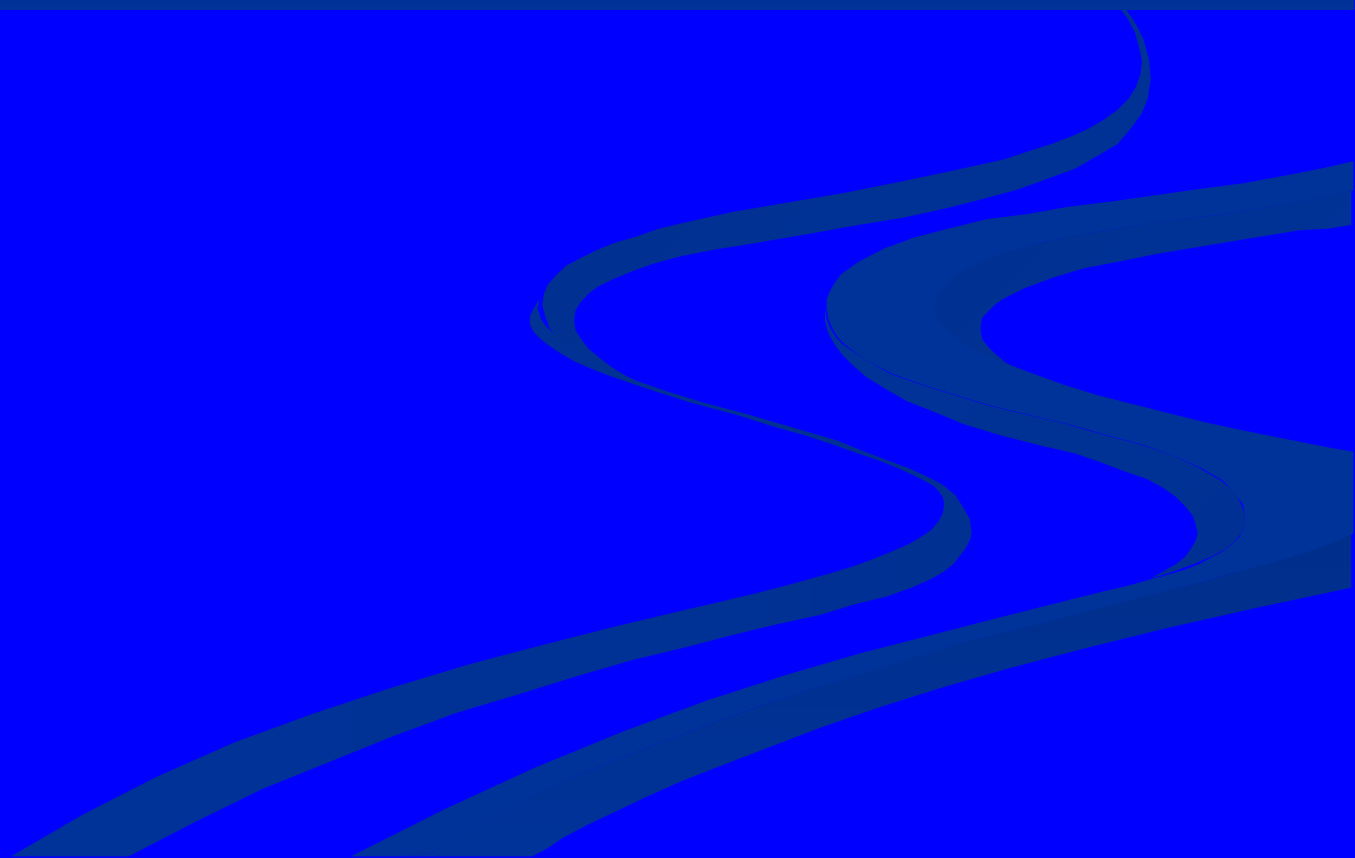
$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

فرمول $*$ را دستور کرامر می نامیم.

تعريف 3.1.10

اگر در دستگاه m معادله n خطي مجهولي طرف دوم تمام معادلات صفر باشند دستگاه را همگن مي ناميم. در غير اين صورت دستگاه را غير همگن مي ناميم.

روشن است که در دستگاه همگن همواره $x_1=x_2=\dots=x_n=0$ یک جواب دستگاه موسوم است.
این جواب به جواب بدیهی دستگاه



قضيه 3.1.11

دستگاه n معادله ي خطي n مجهولي همگن داراي يك جواب غير بديهي (غير صفر) است. اگر و تنها اگر دترمینان ضرایب دستگاه صفر باشد.

نتیجه 3.1.13

یک دستگاه m معادله n خطی مجهول همگن همواره دارای یک جواب غیر بدهی (غیر صفر) است اگر

$$m < n$$

قضیه 3.1.15

اگر X_1 و X_2 دو جواب دستگاه غیر همگن $AX=B$ باشند
آنگاه $X_2 - X_1$ جوابی برای دستگاه همگن $AX=0$ است.

نتیجه 3.1.13

دستگاه غیر همگن $AX=B$ دارای يك جواب منحصر به فرد است اگر و تنها اگر جواب $AX=0$ منحصر به فرد باشد.

استقلال و وابستگی خطی 3.2

تعريف 3.2.1

مجموعه m بردار $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ از عناصر فضاي برداري R را مستقل خطي مي ناميم اگر هيچ مجموعه اي از اعداد حقيقي c_1, c_2, \dots, c_n به جز $c_1 = c_2 = \dots = c_m = 0$ وجود نداشته باشد به طوري كه

$$c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2 + \dots + c_m \vec{v}_m = \vec{0}$$

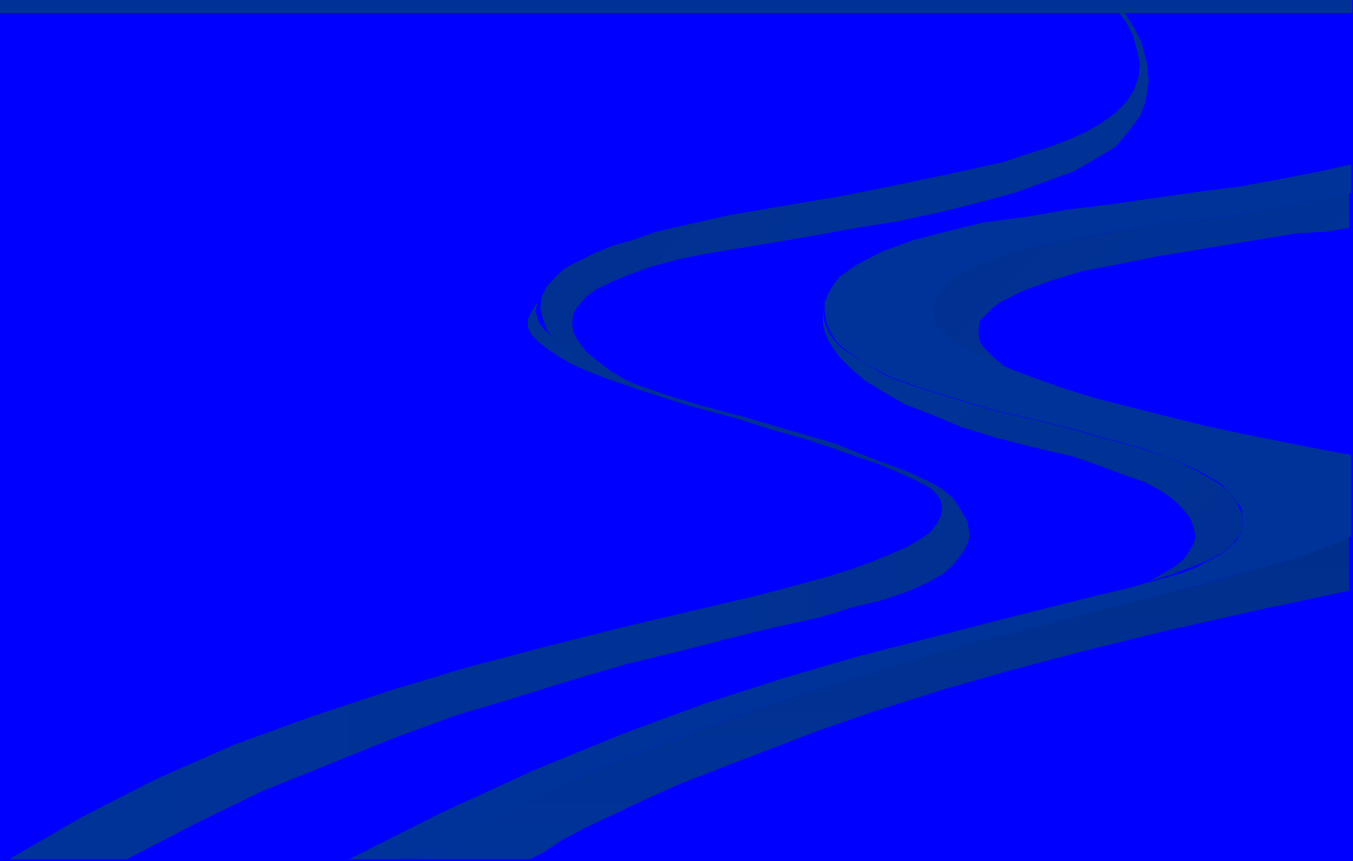
به بیان دیگر مجموعه m بردار $\{\vec{V}_1, \vec{V}_2, \dots, \vec{V}_n\}$ مستقل خطی است تنها جواب معادله ی

$$c_1 \vec{V}_1 + c_2 \vec{V}_2 + \dots + c_m \vec{V}_m = \vec{0}$$

برابر با $c_1 = c_2 = \dots = c_m = 0$ باشد. در غیر این صورت این مجموعه را وابسته ی خطی می نامیم.

رتبه ي يك ماتريس 3.3

در این بخش به هر ماتریس عدد صحیح و مثبتی به نام رتبه ی
ماتریس را نسبت می دهیم. با استفاده از این عدد در مورد
جوابهای دستگاههای معادلات خطی را بررسی می کنیم.



تعريف 3.3.1

فرض کنیم A ماتریسی $m \times n$ باشد. حداکثر تعداد سطرهای مستقل خطی ماتریس A را رتبه ی ماتریس A می نامیم و با نشان $r(A)$ می دهیم.

به عبارت دیگر اگر R_1, R_2, \dots, R_m سطرهای ماتریس A باشند رتبه a برابر با حداکثر تعداد بردارهای مستقل خطی در مجموعه $\{R_1, R_2, \dots, R_m\}$ است.

يك روش تعيين رتبه ي ماتريس A اين است كه بزرگترين زير
ماتريس مربع A را كه دترمينانش مخالف صفر باشد به
دست آوريم ، تعداد سطرهاي اين ماتريس برابر رتبه ي
ماتريس A است.

خواص رتبه ي ماتريس 3.3.6

الف) رتبه ي ماتريس واحد I_n برابر با n است، يعني:

$$r(I_n) = n$$

ب) رتبه ي ماتريس A با رتبه ي ترانواده ي A برابر است ،
يعني:

$$r(A) = r(A^T)$$

پ) اگر A ماتریس $n \times n$ باشد آنگاه $r(A) = n$ اگر و تنها اگر $\det A \neq 0$ به بیان دیگر $r(A) < n$ اگر و تنها اگر $\det A = 0$.

ت) رتبه ی حاصلضرب دو ماتریس همواره نابیشتر از کوچکترین رتبه دو ماتریس است ، یعنی:

$$r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$$

نتیجه 3.3.7

اینک با استفاده از مفهوم رتبه ی ماتریس به طور خلاصه به بررسی جوابهای دستگاه معادلات خطی $AX=B$ در حالتهاي مختلف مي پردازيم.

فرض مي كنيم ماتریس ضرایب A ، باشد m برابر با تعداد معادلات و n مساوي با تعداد مجهولهاي دستگاه است. رتبه ی ماتریس مرکب $[A \ B]$ را با $r(A \ B)$ نشان مي دهيم.

الف) اگر $r(A|B)=r(A)$ آنگاه دستگاه داراي حداقل يك جواب است.

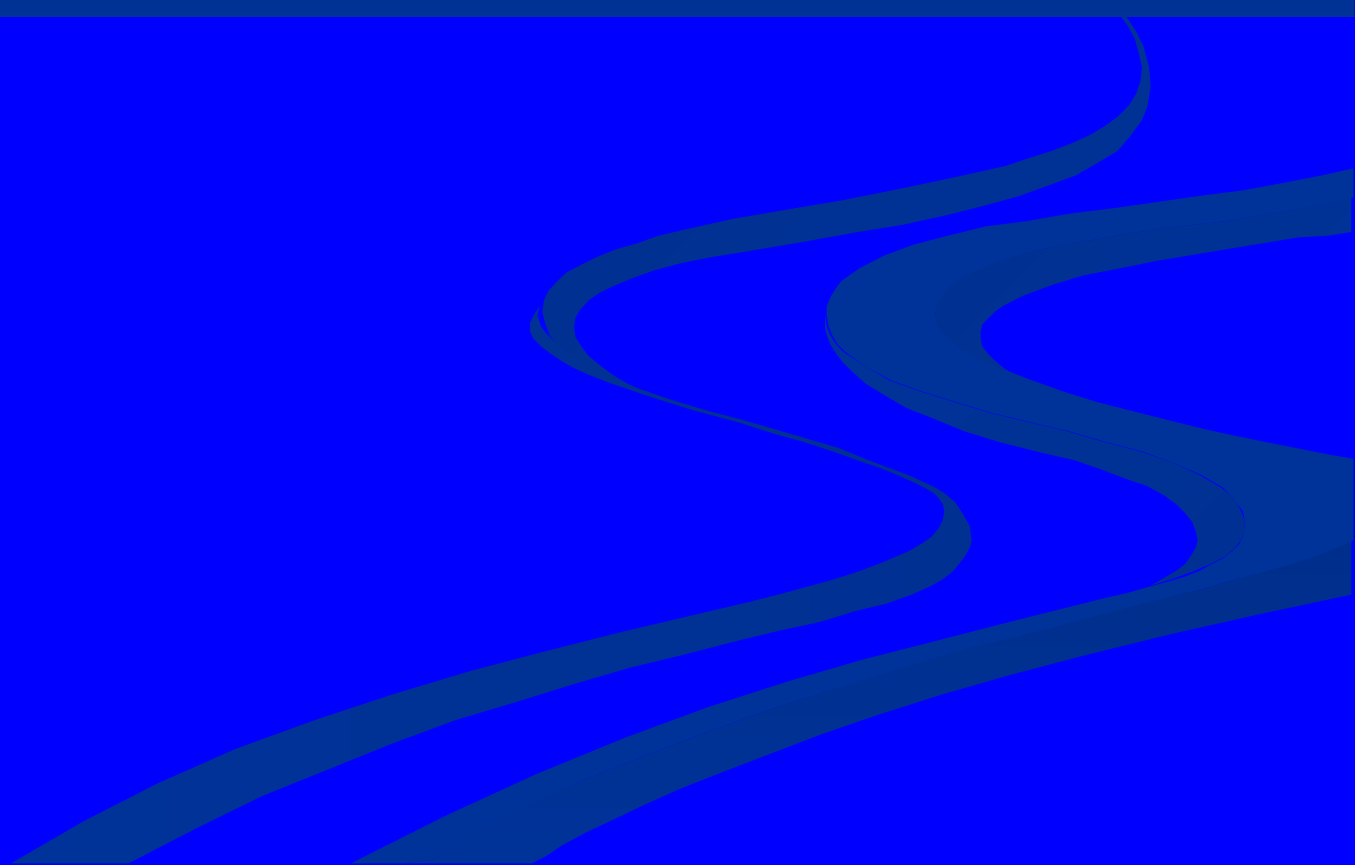
ب) اگر $r(A|B)=r(A)=n$ آنگاه دستگاه داراي يك جواب منحصر به فرد است.

پ) اگر $r(A|B)=r(A)>n$ آنگاه دستگاه داراي بي نهايت جواب و مجموعه سطر هاي ماتريس A وابسته ي خطي است.

ت) اگر $r(A|B)\neq r(A)$ آنگاه دستگاه جواب ندارد.

توابع خطي 3.4

در این بخش به مطالعه ی توابع خطی که توابعی از یک فضای برداری به فضای برداری دیگری هستند می پردازیم.



تعريف 3.4.1

تابع n متغيره f از فضای برداري R^n به فضای برداري R^m را که به ازاي هر عدد حقيقي r و هر دو n تايي

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

از R^n در دو شرط زیر صدق می کند، یک تابع خطی می نامیم.

$$f(X + Y) = f(x) + f(Y) \quad (1)$$

$$f(rx) = r f(x) \quad (2)$$

قضیه 3.4.3

تابع $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ خطی است. اگر و تنها اگر هر مؤلفه مقدار تابع

به صورت یک ترکیب خطی از اعداد

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ در } f$$

x_1, x_2, \dots, x_n باشد.

از این قضیه نتیجه می شود که اگر $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ تابع خطی باشد
آنگاه اعداد حقیقی

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array}$$

وجود دارند به طوری که

$$f(x) = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

بنا بر این $A=(a_{ij})m*n$ قرار دادن مقدار تابع خطی f را میتوان به ازای هر $x \rightarrow R^n$ به صورت ماتریسی

$$F(x) = Ax$$

نوشت. ماتریس A را یک ماتریس نمایشگر تابع خطی F مینامیم.

تعريف 3.4.6

تابع $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ را که برای هر به صورت زیر تعریف می شود، تابع صفر می نامیم.

$$f \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

تعریف میشود. تابع هماني می ناميم.

تعريف 3.4.7

تابع $I: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ را که برای هر $X \in \mathbb{R}^n$ به صورت

$$I \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

تعريف 3.4.8

توابع خطي $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ و $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ را در نظر مي گيريم:
(1) مجموع f و g را با $f+g$ نشان مي دهيم و به صورت زير تعريف مي كنيم:

$$f(x) + g(x) = (x)(f+g)$$

(2) فرض مي كنيم k عددي حقيقي باشد. حاصل ضرب عدد حقيقي k در f را با نشان kf مي دهيم و به صورت زير مي نويسيم.

$$k f(x) = (x)(kf)$$

فصل چهارم: توابع چند متغیره



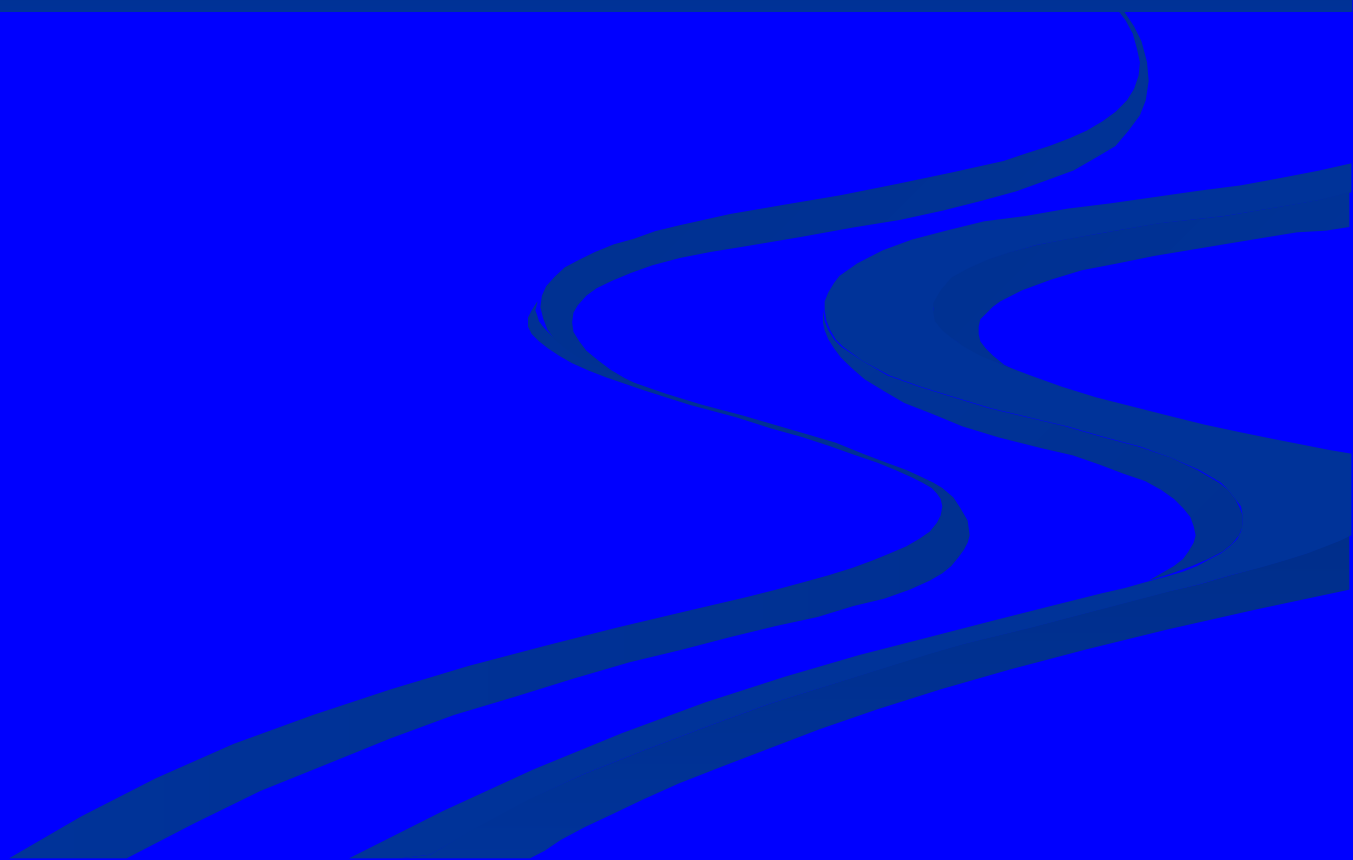
در فصل هاي قبل با توابعي سر و كار داشتيم كه تنها وابسته به يك متغير بودند. اين نوع توابع را يك متغيره مي ناميم. ولي اكثر توابع در اقتصاد و مديريت به پيش از يك متغير وابسته اند.

فرض کنید هزینه ی ماهانه ی خانواده ای بستگی به مقدار مصرف آنها از مواد غذایی، پوشاک، خدمات مسکونی و خدمات بهداشتی و درمانی دارد. پس مس توان گفت تابع هزینه ی این خانواده يك تابع 4 متغیره است.

توابع چند متغیره 4.1

تابع f که قلمرو آن زیر مجموعه ای از \mathbb{R}^n و برد آن زیر
مجموعه ای از اعداد حقیقی باشد. یک تابع n متغیره می
نامیم.

اگر f يك تابع n متغيره باشد هر عنصر قلمرو آن n ، تايي
 (x_1, x_2, \dots, x_n) است ، مقدار تابع به ازاي اين عنصر قلمرو
را با $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ نشان مي دهيم.



تعريف 4.1.3

اگر f, g دو تابع n متغیره باشند آنگاه برای هر x از \mathbb{R}^n و هر عدد حقیقی k ، اعمال جبری زیر تعریف می شود.

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(kf)(x) = kf(x)$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

حد و پیوستگی توابع چند متغیره 4.2

تعريف 4.2.1

فرض مي كنيم f يك تابع دو متغيره باشد مي گوييم حد تابع f در نقطه (a,b) برابر با L است . هنگامي كه نقطه (x,y) به نقطه (a,b) نزديك و نزديكتر مي شود مقدار $f(x,y)$ به عدد حقيقي L نزديك و نزديكتر شود .

می توان نشان داد که عدد حقیقی L در صورت وجود منحصر
به فرد است و لذا L را با نماد زیر نشان می دهیم.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$$

حد توابع سه متغیره و به طور کلی n متغیره نیز به همین صورت تعریف می شود. تمام مطالبی که در این بخش برای توابع دو متغیره عنوان می شود برای توابع n متغیره نیز درست است.

قضیه 4.2.2

اگر $f(x,y)=x$ ، $g(x,y)=y$ آنگاه
(الف)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = a$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x,y) = b$$

ب) اگر $k(x,y)=k$ تابعی ثابت باشد آنگاه

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} k(x,y) = k$$

→

که در آن k عددی ثابت است.

قضیه 4.2.3

اگر حد تابع دو متغیره f در نقطه (a,b) برابر L باشد آنگاه

$$\lim_{(a,y) \rightarrow (a,b)} f(a,y) = L$$

$$\lim_{(x,b) \rightarrow (a,b)} f(x,b) = L$$

این قضیه بیان می کند که اگر $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$ آنگاه حد تابع f وقتی که نقطه (x,y) در مسیرهای $y=b$ یا $x=a$ به نقطه (a,b) میل کند برابر با L است.

قضيه 4.2.5

اگر حد تابع f هنگامی (x,y) که بر روی دو منحنی متمایز به نقطه (a,b) نزدیک می شود متفاوت باشد آنگاه حد تابع f در این نقطه وجود ندارد.

نتیجه 4.2.6

$$\lim_{x \rightarrow a} [\lim_{y \rightarrow b} f(x, y)] \neq \lim_{y \rightarrow b} [\lim_{x \rightarrow a} f(x, y)]$$

اگر

آنگاه تابع f در نقطه (a, b) حد ندارد.

توجه کنید در $\lim_{x \rightarrow a} [\lim_{y \rightarrow b} f(x, y)]$ را ثابت
فرض کرده $\lim_{y \rightarrow b} f(x, y)$ را در صورت وجود
محاسبه می کنیم. سپس حد عبارت به دست آمده را که تابعی
از x است وقتی که $a \rightarrow x$ پیدا می کنیم.

قضيه 4.2.8

اگر حد توابع دو متغيره f و g در نقطه (a,b) اگر حد توابع دو متغيره f و g در نقطه (a,b) وجود داشته باشد آنگاه (1) حد مجموع دو تابع برابر با مجموع حدهاي آنها است، يعني:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} (f + g)(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) + \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x,y)$$

(2) برای هر عدد ثابت k

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} (kf)(x,y) = k \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y)$$

3) حد تفاضل دو تابع برابر با حدهای آنهاست یعنی:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} (f-g)(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) - \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y)$$

4) حد حاصلضرب دو تابع برابر با حاصلضرب حدهای آنهاست یعنی:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} (fg)(x,y) = \left[\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) \right] \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x,y)$$

(5) حد خارج قسمت دو تابع برابر با خارج قسمت حد‌های آنهاست مشروط بر اینکه حد تابع مخرج مخالف صفر باشد، یعنی:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \left(\frac{f}{g} \right)(x,y) = \frac{\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y)}{\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x,y)}, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x,y) \neq 0$$

قضیه 4.2.10

اگر $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$ تابع يك متغیره g در L پیوسته

باشد آنگاه:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g \circ f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(f(x,y)) = g(L)$$

تعريف 4.2.12

تابع دو متغیره f را در نقطه (a,b) پیوسته می نامیم اگر شرایط زیر برقرار باشد.

(1) تابع f در نقطه (a,b) تعریف شده باشد یعنی $f(a,b)$ معین باشد.

(2) وجود داشته باشد $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y)$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

(3)

در صورتی که یکی از این شرایط برقرار نباشد تابع f را در نقطه (a,b) ناپیوسته می‌نامیم.

قضيه 4.2.14

اگر توابع دو متغيره f و g در نقطه (a,b) پیوسته باشند

آنگاه توابع $kf, f - g, f + g$ (عددي حقيقي k) و $\frac{f}{g}$ و fg

(با شرط $g(a,b) \neq 0$) نیز در نقطه (a,b) پیوسته اند.

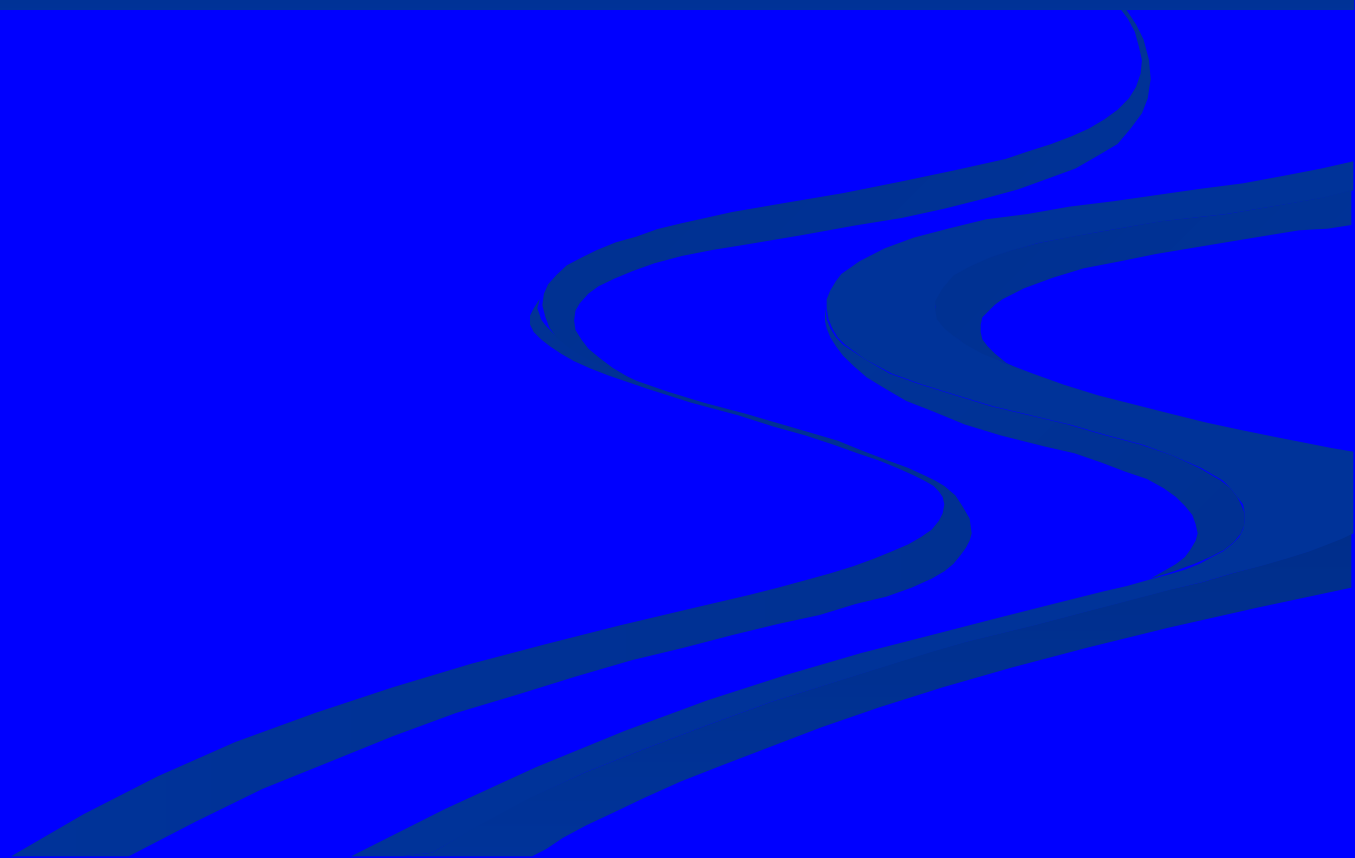
قضیه 4.2.16

اگر تابع دو متغیره f در نقطه (a,b) و تابع يك متغیره g در $f(a,b)$ پیوسته باشند آنگاه تابع مرکب $g \circ f$ در نقطه (a,b) پیوسته است.

مشتقهاي جزئي 4.3



در این بخش مفهومی نزدیک به مفهوم مشتق توابع يك متغیره را در مورد توابع چند متغیره ارائه می دهیم. از این مفهوم برای شناخت بهتر توابع چند متغیره استفاده می کنیم.



تعريف 4.3.1

فرض مي كنيم f تابعي از دو متغير x و y باشد. اگر

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

وجود داشته باشد مقدار اين حد را مشتق جزئي f نسبت به

متغير x در نقطه (x, y) ميناميم. و آن را با نمادهاي $f_x(x, y)$

يا $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ (بخوانيد روند $f(x, y)$ به روند x)

(نشان مي دهيم).

به همین ترتیب مشتق جزئی تابع f نسبت به متغیر y در نقطه (x, y) به صورت

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = f_y(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

تعریف می شود. مشروط بر اینکه این حد وجود داشته باشد.

اگر $f(x,y)$ وجود داشته باشد f_x تابعی از دو متغیر x و y است
این تابع را به صورت خلاصه $\frac{\partial f}{\partial x}$ نشان می‌دهیم.
تابع $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$ نیز به همین ترتیب تعریف می‌شود.
توابع f_x و f_y را مشتق‌های جزئی مرتبه ی اول f می‌نامیم.

در اینجا نماد ∂ را به جای d برتی تمایز مشتقهای جزئی از مشتق معمولی به کار می‌بریم.

برای محاسبه $f_x(x,y)$ در تابع $f(x,y)$ متغیر y را ثابت تلقی می‌کنیم. و از f نسبت به متغیر x مانند یک تابع یک متغیره مشتق می‌گیریم.

به همین ترتیب در محاسبه $f_x(x,y)$ متغیر x را در تابع $f(x,y)$ ثابت در نظر گرفته و از f نسبت به متغیر x مانند یک تابع یک متغیره مشتق می‌گیریم.

مشتق‌های جزئی مرتبه های بالاتر 4.3.4

نظیر مفهوم مشتق‌های مرتبه های بالاتر برای توابع يك متغیره می توان مشتق‌های جزئی مرتبه های بالاتر را برای توابع n متغیره تعریف کرد. اگر f تابعی از دو متغیر x و y باشد آنگاه f_x و f_y نیز توابعی از متغیرهای x و y هستند پس می توان مشتق‌های جزئی توابع f_x و f_y را تعریف کرد.

این مشتقها را مشتقهای جزئی مرتبه دوم تابع f می نامیم.
مشتقهای جزئی مرتبه دوم تابع f عبارتند از:

$$F_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

$$F_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

$$F_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

$$F_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

لازم به تذکر است که ترتیب نوشتن متغیرهای x و y در f_{xy} بر

خلاف ترتیب آنها در نماد $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ است.

قضيه 4.3.6

فرض مي كنيم f تابعي با متغير هاي x و y باشد. اگر توابع f و f_{xy} در نقطه (a,b) پیوسته باشد آنگاه:

$$F_{xy}(a, b) = F_{yx}(a, b)$$

ديفرانسل كل و مشتقگيري ضمنى 4.4

تعريف 4.4.1

فرض مي كنيم f تابعي با متغير هاي x و y باشد. اگر مشتقهاي جزئي مرتبه اول f وجود داشته باشد ديفرانسيل كل تابع f را با نشان df ميدهيم و به صورت زير تعريف مي كنيم كه در آن dx و dy به ترتيب ديفرانسيل متغير هاي x و y است.

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

دیفرانسیل کل تابع بیش از دو متغیره نیز به همین ترتیب تعریف می شود، اگر u تابعی از چهار متغیر x, y, z و t باشد آنگاه دیفرانسیل کل تابع برابر است با:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz + \frac{\partial u}{\partial t} dt$$

نکته 4.4.3

فرض می کنیم f تابعی با متغیر های x و y باشد. اگر متغیر های x و y نیز توابع یک متغیره ی مشتق پذیری از متغیر دیگری مانند t باشند آنگاه داریم:

$$dx = \frac{dx}{dt} dt$$

$$dy = \frac{dy}{dt} dt$$

تعریف 4.4.6

فرض می‌کنیم f تابعی با متغیرهای x و y باشد. اگر مشتق‌های جزئی مرتبه ی اول f بر روی ناحیه ای پیوسته باشد و متغیرهای x و y توابعی از متغیر دیگری مانند t باشند آنگاه مشتق تابع f نسبت به t را با df/dt نشان می‌دهیم و بنابراین تعریف برابر است با

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

توجه کنید که در واقع f تنها تابعی از متغیر t است.

قاعده زنجيري براي توابع چند متغيره 4.4.8

فرض مي كنيم f تابعي با متغير هاي x و y باشد. اگر متغير هاي x و y توابعي از دو متغير u و v باشند آنگاه مشتقهاي جزئي مرتبه ي اول f نسبت به متغير هاي u و v برابرند با:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$$
$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$$

قاعده زنجيري براي توابع بيش از دو متغير كاملا مشابه است.

مشتقگيري ضمنی 4.4.10

به کمک مفهوم مشتقهای جزئی می توان دستور ساده ای برای مشتقگيري از توابع ضمنی (غیر صریح) دو متغیره به دست آورد.

فرض مي کنيم معادله ي $f(x,y)=0$ ، متغير y را به صورت تابعي از x به طور ضمني تعريف کند، $\frac{\partial f}{\partial x}$ ، $\frac{\partial f}{\partial y}$ وجود داشته باشند و $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$ آنگاه به دست مي آوريم:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}$$

مشتقهاي جزئي توابع ضمنی 4.4.12

فرض مي كنيم تابع دو متغيره $z=f(x,y)$ در معادله ي $F(x,y,z)=0$ صدق كند. پس اگر $F_x \neq 0$ آنگاه:

$$\frac{\partial f / \partial x}{\partial f / \partial z} = - \frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)} = - \frac{\partial z}{\partial x}$$

به همین ترتیب به دست می آوریم

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial x}} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = - \frac{F_y(x, y, z)}{F_x(x, y, z)}$$

مشروط بر اینکه $F/\partial x = \rho \partial$

ماکسیمم و مینیمم توابع دو متغیر 4.5

همینطور که از مشتقهای اول و دوم یک تابع یک متغیره برای تعیین ماکسیمم و مینیمم آن استفاده می کردیم از مشتقهای جزئی مرتبه ی اول و دوم می توان برای یافتن ماکسیمم و مینیمم توابع چند متغیره استفاده کنیم.

تعريف 4.5.1

فرض مي كنيم f تابعي با متغير هاي x و y باشد. در اين صورت:

الف) $f(a,b)$ مقدار ماكسيمم (مطلق) f مي ناميم. اگر براي هر (x,y) از قلمرو f داشته باشيم:

$$F(x,y) \leq f(a,b)$$

ب) $f(a,b)$ مقدار مینیمم (مطلق) f می نامیم. اگر برای هر (x,y) از قلمرو f داشته باشیم:

$$F(x,y) \geq f(a,b)$$

تعريف 4.5.2

فرض مي كنيم f تابعي با متغير هاي x و y باشد. در اين صورت:

الف) مي گوييم f تابع در (a,b) داراي يك ماكسيم نسبي است. اگر دايره به مركز (a,b) در قلمرو f وجود داشته باشد به طوري كه به ازاي هر (x,y) در درون اين دايره داشته باشيم:

$$f(x,y) \leq f(a,b)$$

ب) می‌گوییم f تابع در (a,b) دارای یک مینیمم نسبی است. اگر دایره به مرکز (a,b) در قلمرو f وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر (x,y) در درون این دایره داشته باشیم:

$$f(x,y) \geq f(a,b)$$

قضيه 4.5.4

فرض مي كنيم تابع دو متغيره f در (a,b) يك ماكسيمم يا مينيمم نسبي دارد. اگر مشتقهاي جزئي مرتبه ي اول f در (a,b) موجود باشند آنگاه:

$$F_x(a,b)=0$$

$$F_y(a,b)=0$$

از این قضیه نتیجه می شود که اگر تابع f در (a,b) یک ماکسیمم یا مینیمم نسبی داشته باشد آنگاه (a,b) یک جواب دستگاه دو مجهولی زیر است:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 0$$

هر جواب اين دستگاہ را (نظير توابع يك متغيره) يك نقطه ي
بحراني تابع f ميناميم. توجه كنيد كه نقطه ي (c,d) ممكن
است يك نقطه ي بحراني f باشد ولي تابع f در اين نقطه
ماكسيم و مينيم نسبي داشته باشد.

اگر $F_x(a,b) = F_y(a,b)$ ولي تابع F در (a,b) ماکسیمم یا مینیمم نسبی نداشته باشد می گوییم تابع F در (a,b) دارای یک نقطه ی زین اسبی است.

معمولاً با استفاده از تعریف تشخیص اینکه يك نقطه ي بحراني تابع دو دو متغیره ي F ماكسيم است يا مينيم مشكل است .
اما به كمك مشتقهاي جزئي مرتبه ي دوم توابع يك يك متغیره قادر به اين امر هستيم.

آزمون مشتق دوم 4.5.8

فرض می‌کنیم f تابعی با متغیرهای x و y باشد و $F_y(a,b)=0$
 $=F_x(a,b)$ همچنین فرض می‌کنیم مشتقهای جزئی F درون
دایره‌ای به مرکز (a,b) پیوسته باشند و

$$\Delta(x, y) = F_{xx}(x, y)F_{yy}(x, y) - [F_{xy}(x, y)]^2$$

در این صورت

الف) اگر $(a,b) \in \Delta$ و $F_{xx}(a,b) < 0$ آنگاه F در (a,b) ماکسیمم نسبی دارد.

ب) اگر $(a,b) \in \Delta$ و $F_{xx}(a,b) > 0$ آنگاه F در (a,b) مینیمم نسبی دارد.

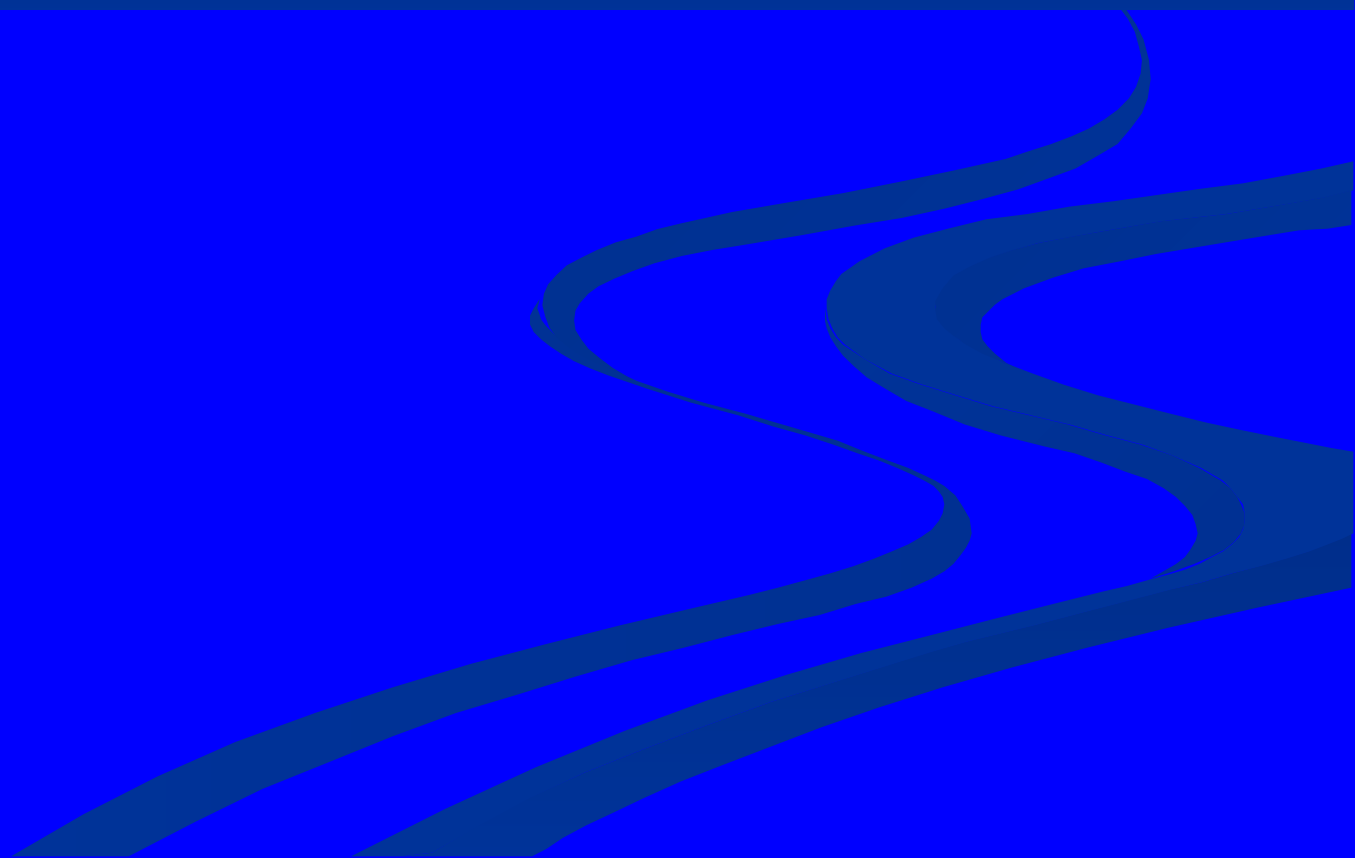
پ) اگر $\Delta 0 < (a,b)$ آنگاه F در (a,b) يك نقطه ي زين اسبي دارد .
به عبارت ديگر ماكسيم و مينيم ندارد.

ت) اگر $\Delta 0 = (a,b)$ از اين آزمون نتيجه اي به دست نمي آيد.

دقت کنید که اگر $(a,b) < 0 \Delta$ آنگاه حاصلضرب
 $f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)$ مثبت است پس $f_{xx}(a,b)$ و $f_{yy}(a,b)$ هم
علامت می باشند. در نتیجه در بندهای الف و ب آزمون
مشتق دوم میتوان $f_{yy}(a,b)$ را جایگزین $f_{xx}(a,b)$ نمود.

ماکسیمم و مینیمم توابع نسبت به 4.6 شرایط داده شده

در اکثر مسائل مدیریت و اقتصاد تعیین ماکسیمم و مینیمم يك
تابع چند متغیره با توجه به يك يا چند شرط صورت مي
گیرد.



برای مثال فرض کنید هدف يك مصرف کننده به حداکثر رسانیدن مطلوب در مصرف دو کالای 1 و 2 است. فرض کنید قیمت این دو کالا به ترتیب برابر با p_1 و p_2 میزان مصرف او از این دو کالا به ترتیب برابر با x_1 و x_2 باشد. اما این مصرف کننده محدودیتهایی نیز دارد.

یکی از محدودیتها میزان درآمد او است. پس مطلوب است این مصرف کننده تابعی از میزان استفاده او از این دو کالا بوده و میزان مخارج مصرفی او از این دو کالا باید با میزان درآمد او نیز برابر باشد. به بیان دیگر میتوان گفت که این مصرف کننده میخواهد مطلوبیت خود را با توجه به محدودیت درآمد به حد اکثر برساند.

پس باید ماکسیم تابع

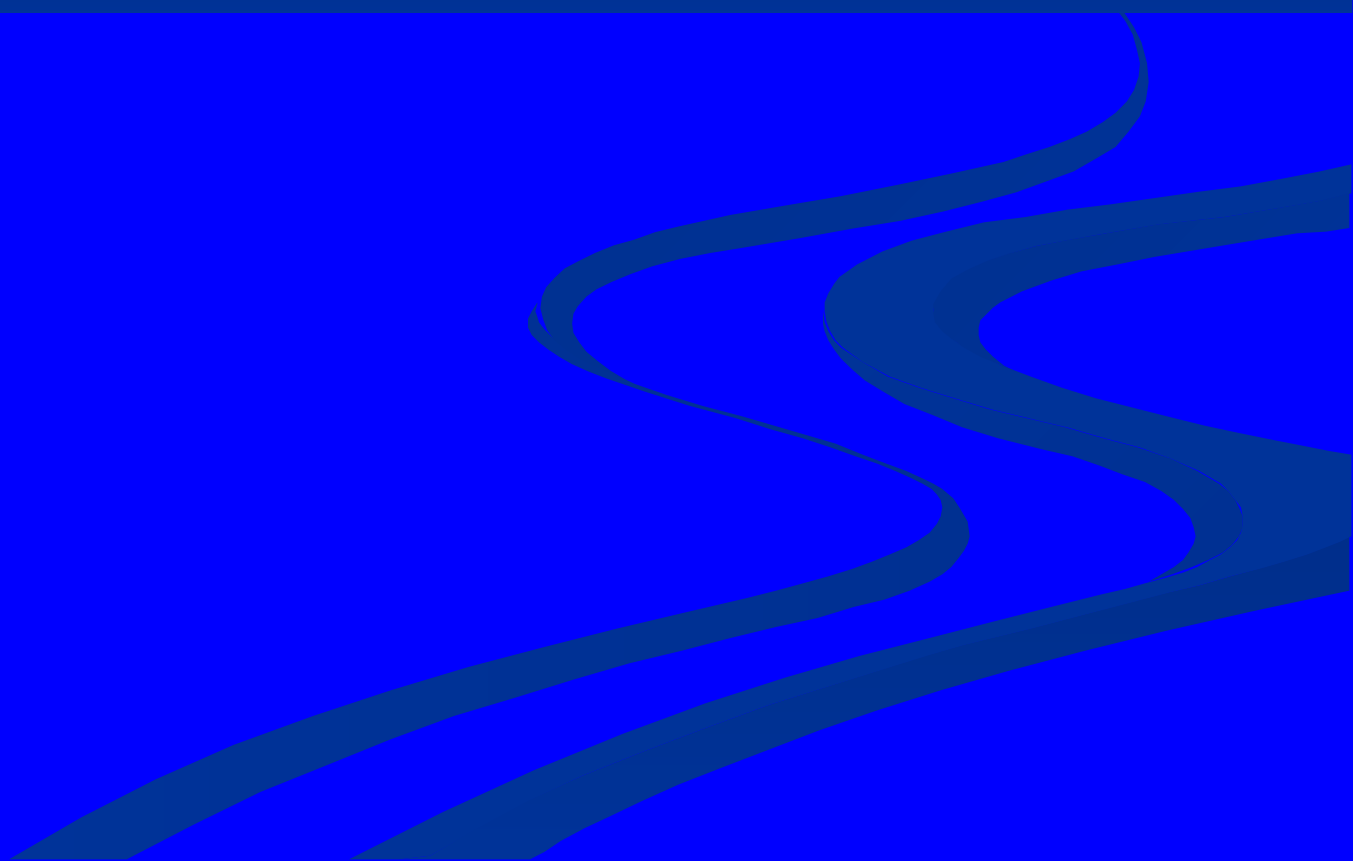
$$U=f(x_1,x_2)$$

را نسبت به شرط (محدودیت)

$$P_1x_1+p_2x_2=y$$

پیدا کنیم که در آن $U=f(x_1,x_2)$ تابع مطلوب است.

به دو روش مي توان اين كار را انجام داد. يكي به روش
جايگزيني و ديگري به روش لاگرانژ. اين دو روش را در
زير معرفي مي كنيم.



روش جایگزینی 4.6.1

یکی از روشهای به دست آوردن ماکسیمم و مینیمم توابع نسبت به شرایط داده شده از طریق جایگزین کردن تابع محدودیت (شرایط داده شده) در تابع هدف است. بدین ترتیب مسئله تبدیل به مسئله ی ماکسیمم یا مینیمم کردن یک تابع بدون محدودیت میشود.

روش لاگرانژ 4.6.3

میخواهیم ماکسیم یا مینیم تابع دو متغیره $f(x,y)$ را با محدودیت $g(x,y)=0$ بیابیم. متغیر جدید λ موسوم به ضریب لاگرانژ را در نظر می گیریم با استفاده از متغیر λ تابع جدیدی به نام تابع لاگرانژ را به صورت زیر تعریف میکنیم.

$$F(x,y, \lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$$

پس اگر f در (a,b) ماکسیمم یا مینیمم داشته باشیم آنگاه $\lambda = 0$
 وجود دارد به طوری که (a,b, λ) يك جواب دستگاه سه
 معادله سه مجهولي زیر است.

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = g(x, y) = 0 \end{cases}$$

شرط كافي براي وجود ماكسيم و مينيم 4.6.5 توابع نسبت به شرايط داده شده

فرض مي كنيم تابع دو متغيره $f(x,y)$ تحت
محدوديت $g(x,y)=0$ داده شده باشد و $F(x,y)$ تابع
لاگرانژ متناظر باشد. ثابت ميشود كه شرط كافي براي
وجود

الف) ماکسیمم این است که

$$\begin{vmatrix} 0 & \sigma_x & \sigma_y \\ \sigma_x & F_{xx} & F_{xy} \\ \sigma_y & F_{yx} & F_{yy} \end{vmatrix} > 0$$

ب) مینیمم این است که

$$\begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & F_{xx} & F_{xy} \\ g_y & F_{yx} & F_{yy} \end{vmatrix} < 0$$

نکته 4.6.6

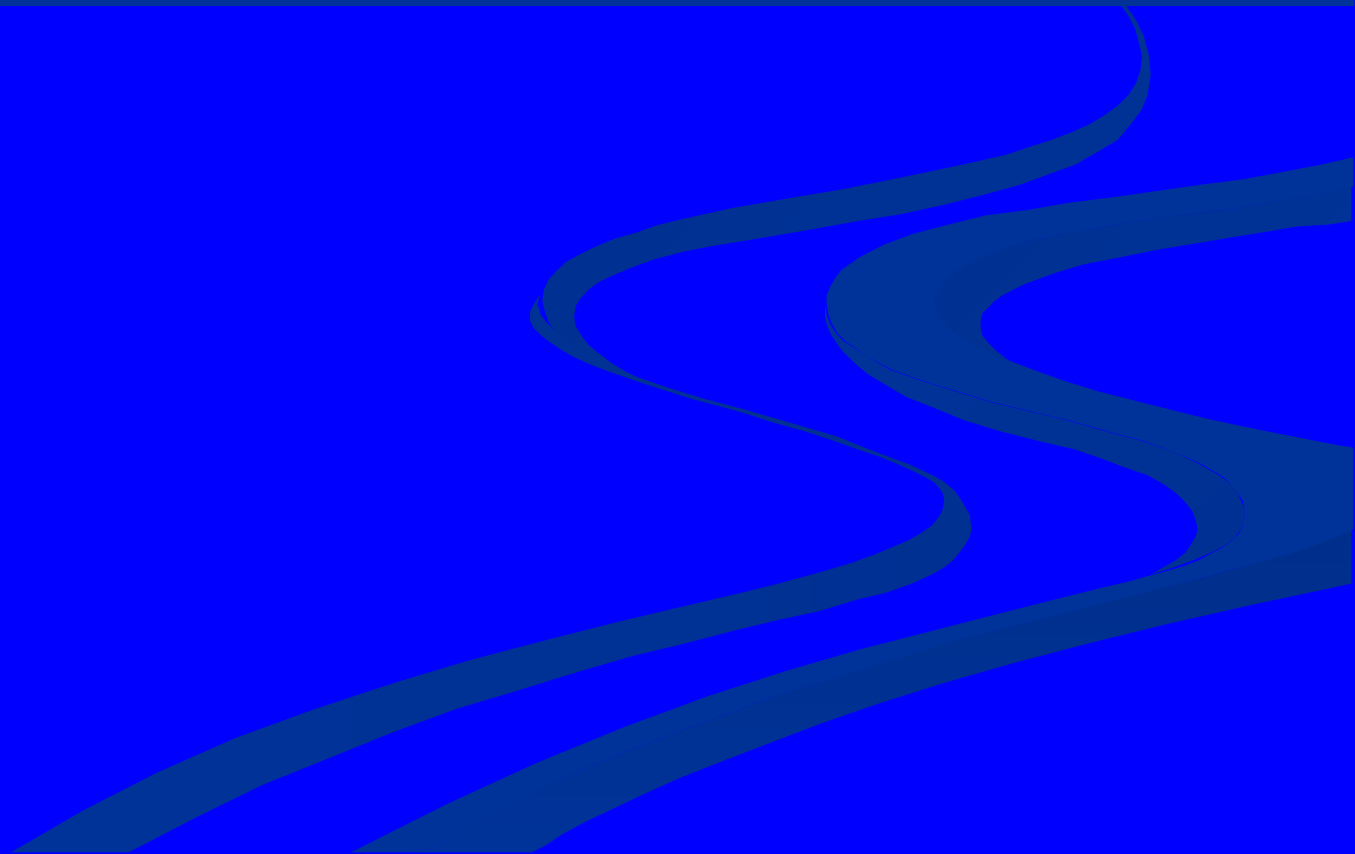
روش لاگرانژ را میتوان برای تابع n متغیره $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ با تابع محدودیت $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ $i=1, 2, \dots, n$ که در آن تعمیم داد.

در این صورت تابع لاگرانژ عبارتند از

$$F(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k) = F(x_1, \dots, x_n) - \sum_{i=1}^k \lambda_i g_i(x_1, \dots, x_n)$$

از مساوی صفر قرار دادن مشتقهای جزئی تابع لاگرانژ
دستگاهی شامل $n+k$ معادله ی $n+k$ مجهولی به دست می
آید.

فصل پنجم: معادلات دیفرانسیل



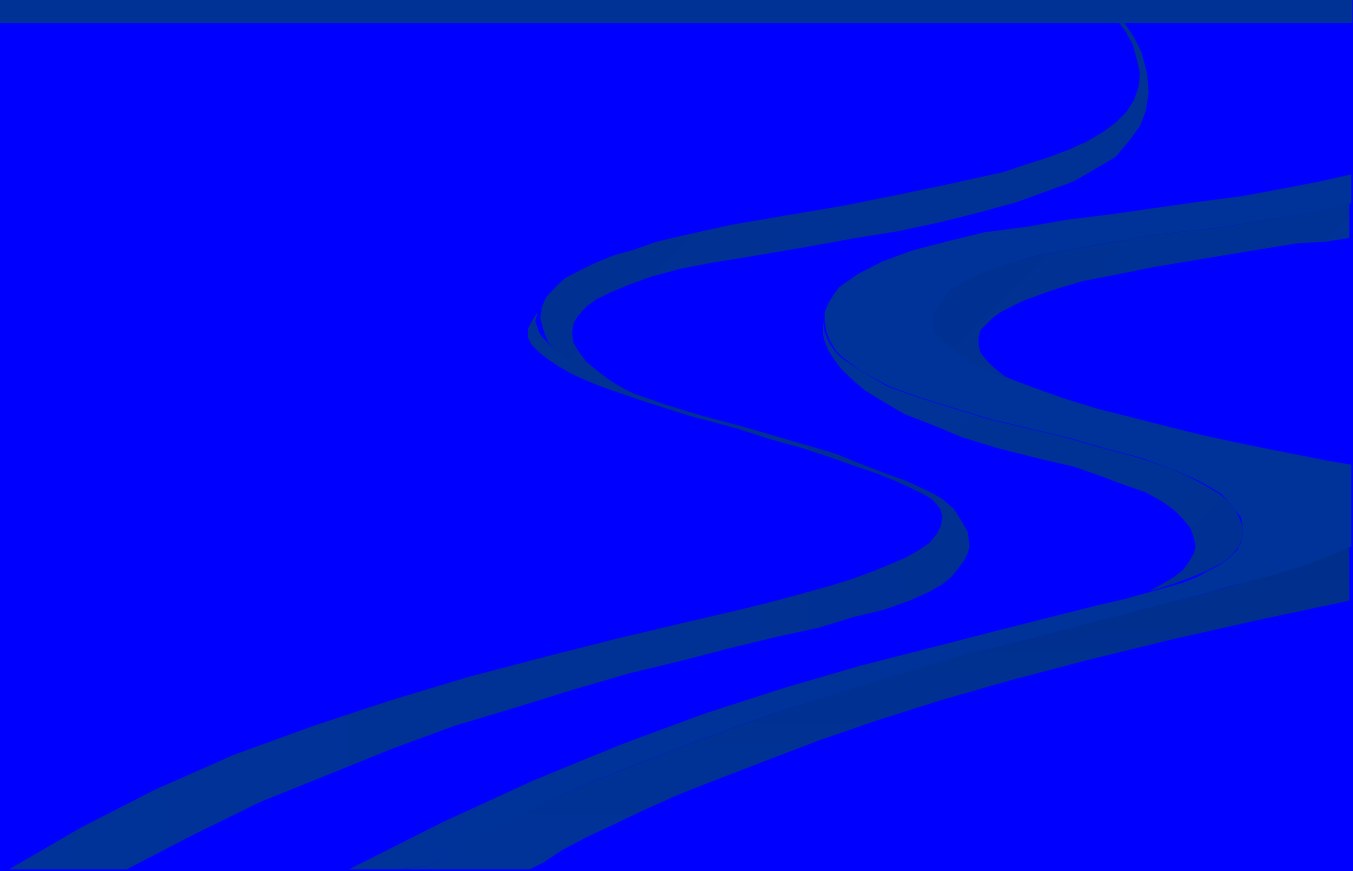
حل برخي از مسایل در مدیریت ی اقتصاد منجر به بررسی
معادله ای بین يك تابع مجهول و مشتقهای آن می شود. چنین
معادله ای را يك معادله ی دیفرانسیل می نامیم. در این فصل
با معرفی چند نوع معادله ی دیفرانسیل ساده روش حل آنها
را مطالعه می کنیم.

آشنایی با معادلات دیفرانسیل 5.1

تعريف 5.1.1

فرض کنید y تابعی از x باشد هر معادله ای به صورت $F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$ را که F در آن تابعی از $n+2$ متغیر y ، x و n مشتق اول y نسبت به x باشد یک معادله ی دیفرانسیل معمولی مرتبه ی n ام می نامیم.

توجه کنید منظور $y^{(n)}$ از مشتق n ام y نسبت به x است و مرتبه
ي يك معادله ي ديفرانسیل برابر با مرتبه ي بالاترين مشتق
موجود در معادله است.



تعريف 5.1.2

تابع $y=f(x)$ را يك جواب معادله ي ديفرانسيل
$$F(x,y,y',\dots,y^{(n)})=0$$

در فاصله ي I مي ناميم. در صورتي كه به ازاي هر x متعلق به I
تابع $y=f(x)$ و مشتق هاي آن در معادله صدق كنند.

مجموعه ي تمام جوابهاي معادله را جواب عمومي معادله مي
ناميم.

منظور از حل يك معادله ي ديفرانسيل به دست آوردن جواب
عمومي آن است.



تعريف 5.1.4

معادله ي ديفرانسيل مرتبه ي ام

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

با شرايط اوليه

$$\begin{aligned}y(x_0) &= k_0 \\y'(x_0) &= k_1 \\y''(x_0) &= k_2 \\&\vdots \\y^{(n-1)}(x_0) &= k_{n-1}\end{aligned}$$

را که در آن ها اعداد معيني هستند يك مسئله با مقادير اوليه مي ناميم.

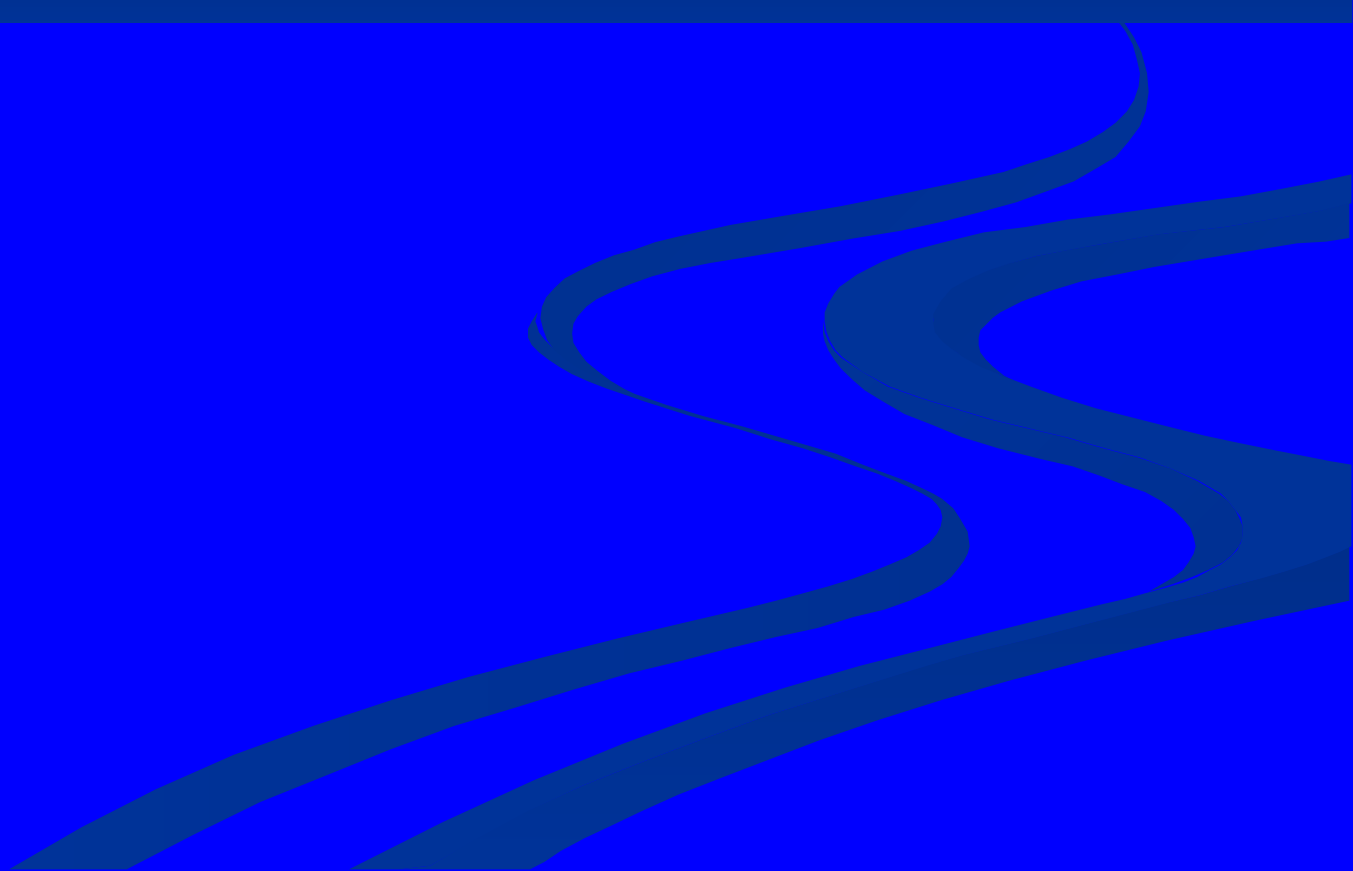
توجه کنید که برای معادله ی دیفرانسیل مرتبه ی n نام n شرط اولیه وجود دارد. این شرایط مقادیر تابع مجهول و $(n-1)$ مشتق اول آن را در نقطه ی x_0 معین می کنند. می توان نشان داد که با وضع محدودیتهایی بر F یک مسئله با مقادیر اولیه دارای یک جواب منحصر به فرد است. این جواب را جواب خصوصی مسئله می نامیم.

تعريف 5.1.7

يك معادله ي ديفرانسيل با مشتقات جزئي معادله ايست كه شانل يك تابع مجهول چند متغيره (بیش از يك متغير) همراهم با مشتقات جزئي آن باشد.

معادلات دیفرانسیل جدایی پذیر 5.2

در این بخش روش حل معادلات دیفرانسیلی را بررسی می
کنیم که می توان متغیرهای آنها را از یکدیگر جدا کرد.



تعريف 5.2.1

معادله ي ديفرانسيل مرتبه ي اول $p(x)dx+q(y)dy=0$ را كه در آن p و q دو تابع حقيقي به ترتيب در فاصله هاي I_1 و I_2 پيوسته اند يك معادله ي ديفرانسيل جدايي پذير مي ناميم.

با انتگرالگیری مستقیم از این معادله جواب عمومی آن به صورت زیر به دست می آید.

$$p(x)dx + \int q(y)dy = c$$