Математика ППИ.

НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Лекция № 12 (продолжение).

Метод интегрирования по частям в неопределенном интеграле. Интегрирование тригонометрических функций.

Цели и задачи:

Изучить основные методы интегрирования: интегрирование рациональных дробей, интегрирование некоторых классов тригонометрических и иррациональных функций.

ВОПРОСЫ ЛЕКЦИИ №12

- 1. Метод интегрирования по частям.
- 2. Интегрирование некоторых классов тригонометрических функций.

Литература

- [1] Н.С. Пискунов. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т 1. Москва: Интеграл-Пресс, 2004, с. 340-375.
- [3] Б.П. Демидович, В.А. Кудрявцев. Краткий курс высшей математики. Москва: Издательство АСТ, 2004, с. 229-250.

УЧЕБНЫЙ ВОПРОС .

Интегрирование некоторых классов тригонометрических функций

- Рассмотрим интеграл вида

$$\int \sin^m x \cdot \cos^n x,$$

а) **m и n - неотрицательные и по крайней мере одно из них является нечётным. Пусть n – нечётное, т.е. n=2p+1. Тогда**

$$\int \sin^m x \cdot \cos^n x\, dx = \int \sin^m x \cdot \cos^{2p} x \cdot \cos x dx =$$

$$= \int \sin^m x \left(1 - \sin^2 x\right)^p \cos x dx \begin{bmatrix} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{bmatrix} = \int t^m \left(1 - t^2\right)^p \cdot dt.$$

б) m и n - неотрицательные чётные, т.е. n=2p, m=2q. Тогда

$$\int \sin^{2p} x \cdot \cos^{2q} x dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2} \right)^{p} \cdot \left(\frac{1+\cos 2x}{2} \right)^{q} dx$$

Возведя в степень и раскрыв скобки, получим слагаемые, содержащие cos 2x в чётных и нечётных степенях. Члены с нечётными степенями интегрируются, как указано в случае а), чётные показатели снова понижаются по тем же формулам.

Вторая разновидность интегралов имеет вид:

$$\int R(\sin x)\cos x\,dx \left[\begin{array}{l} \sin x = t, \\ \cos x\,dx = dt \end{array}\right] = \int R(t)\,dt.$$

или

$$\int R(Cos\,x)Sin\,x\,dx \left[\begin{array}{l} Cos\,x = t, \\ Sin\,x\,dx = -dt \end{array}\right] = -\int R(t)dt.$$

Третья разновидность интегралов

$$\int R(tg\,x)dx \left[\begin{array}{l} tg\,x = t, \\ x = arctgt, dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \end{array}\right] = \int R(t)\frac{dt}{1+t^2}.$$

Четвёртая разновидность интегралов

$\int R(sin^m x, cos^n x)dx$, где m и n – четные.

$$\left[\begin{array}{l} tg\, x = t, \quad \mathrm{Cos}^2\, x = \dfrac{1}{1+tg^2 x} = \dfrac{1}{1+t^2} \\ \mathrm{Sin}^2\, x = \dfrac{tg^2 x}{1+tg^2 x} = \dfrac{t^2}{1+t^2}, \quad dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \end{array}\right] =$$

$$= \int R\left(\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)^{\frac{m}{2}}, \left(\frac{1}{1+t^2}\right)^{\frac{n}{2}}\right)\frac{dt}{1+t^2}.$$

Пример.

$$\int \frac{dx}{2 - Sin^2 x} \left[\begin{array}{ll} tgx = t, & dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \\ Sin^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2} & \end{array} \right] = \int \frac{dt}{\left(1+t^2\right)\left(2 - \dfrac{t^2}{1+t^2}\right)} = \int \frac{dt}{\left(1+t^2\right)\dfrac{2+2t^2 -}{1+t^2}}$$

$$= \int \frac{dt}{2+t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} arctg \frac{t}{\sqrt{2}} + c = \frac{1}{\sqrt{2}} arctg \frac{tgx}{\sqrt{2}} + C.$$

Универсальная тригонометрическая подстановка

Всякий интеграл от рациональной функции вида

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx$$

может быть сведён к интегралу от рациональной функции.

Для этого используется подстановка

$$\boxed{tg\frac{x}{2} = t}$$

называемая универсальной тригонометрической подстановкой.

$$t = tg\frac{x}{2}; \quad \operatorname{Sin} x = \frac{2tg\,\frac{x}{2}}{1+tg^2\,\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \operatorname{Cos} x = \frac{1-tg^2\,\frac{x}{2}}{1+tg^2\,\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2};$$

$$\frac{x}{2} = arc\,tg\,t,\ x = 2arc\,tg\,t, \quad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$$

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \begin{bmatrix} tg\frac{x}{2} = t,\ \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}, \\ \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2},\ dx = \dfrac{2dt}{1+t^2} \end{bmatrix} =$$

$$= \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}.$$

- **Пример.**

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \left[\begin{array}{l} tg\,\dfrac{x}{2} = t,\ dx = \dfrac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2} \end{array} \right] = \int \frac{2dt}{\left(1+t^2\right)\cdot \dfrac{2t}{1+t^2}} =$$

$$= \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln\left|tg\,\frac{x}{2}\right| + C.$$

- **Рассмотрим интегралы вида** $\int Cos\, mx \cdot Cos\, n\, xdx$

$$\int Cos\, mx \cdot Sin\, n\, xdx$$

$$\int Sin\, mx \cdot Sin\, n\, xdx$$

- **Для их вычисления используют тригонометрические формулы**

$$Cos\, m\, x \cdot Cos\, n\, x = \frac{1}{2}\left(Cos(m-n)x + Cos(m+n)x\right),$$

$$Sin\, m\, x \cdot Sin\, n\, x = \frac{1}{2}\left(Cos(m-n)x - Cos(m+n)x\right),$$

$$Cos\, m\, x \cdot Sin\, n\, x = \frac{1}{2}\left(Sin\,(m-n)x + Sin\,(m+n)x\right).$$

- **Пример.**

$$\int Cos\,3x\,Cos\,2x\,dx = \frac{1}{2}\int \left(Cos x + Cos\,5x\right)dx = \frac{1}{2}Sin x + \frac{1}{10}Sin\,5x + C.$$

Задание на самостоятельную работу

- [1] Н.С. Пискунов. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т 1. Москва: Интеграл-Пресс, 2004, с. 340-375.
- [3] Б.П. Демидович, В.А. Кудрявцев. Краткий курс высшей математики. Москва: Издательство АСТ, 2004, с. 229-250.
- **Выучить таблицу основных интегралов.**

Математика ППИ.

НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Лекция № 13.

Интегрирование дробно-рациональных функций, иррациональных функций. Тригонометрические подстановки.

ВОПРОСЫ ЛЕКЦИИ №13

- 1. Интегрирование рациональных дробей.
- 2.Интегрирование некоторых классов иррациональных функций

<u>УЧЕБНЫЙ ВОПРОС.</u>

Интегрирование рациональных дробей

- **Определение.** Дробно- рациональной функцией или просто рациональной дробью называется функция, равная частному от деления двух многочленов

$$R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

здесь $P_n(x)$ - многочлен степени n,

$Q_m(x)$ - многочлен степени m.

- **Четвёртая разновидность интегралов**

$$\int R(sin^m x, cos^n x)dx \quad , \quad \text{где m и n – четные.}$$

- **Четвёртая разновидность интегралов**

$$\int R(sin^m x, cos^n x)dx$$, где m и n – четные.

$$
\begin{array}{r|l}
x^5 + x^4 - 8 & x^3 - 4x \\ \cline{2-2}
-\; x^5 - 4x^3 & x^2 + x + 4 \\ \cline{1-1}
x^4 + 4x^3 & \\
-\; x^4 - 4x^2 & \\ \cline{1-1}
4x^3 + 4x^2 & \\
-\; 4x^3 - 16x & \\ \cline{1-1}
4x^2 + 16x - 8 &
\end{array}
$$

целая часть

Четвёртая разновидность интегралов

$\int R(sin^{m}x, cos^{n}x)dx$,   где m и n – четные.

Четвёртая разновидность интегралов

$\int R(sin^{m}x, cos^{n}x)dx$,   где m и n – четные.

Интегрирование простейших рациональных дробей

- Различают четыре типа простейших рациональных дробей:

1. $\dfrac{A}{x-a}$ 2. $\dfrac{A}{(x-a)^n}$ $(n=2,3,\ldots)$

3. $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$; 4. $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$ $(n=2,3,\ldots)$

При этом **A**, *a*, **M**,**N**, **p**, **q** – действительные числа, многочлен x^2+px+q не имеет вещественных корней.

- **Интегрирование простейших дробей I и II типов:**

- I. $$\int \frac{Adx}{x-a} = A\int \frac{d\left(x-a\right)}{x-a} = A\ln\left|x-a\right| + C$$

- II.

$$\int \frac{A\,dx}{\left(x-a\right)^n} = A\int \left(x-a\right)^{-n} d\left(x-a\right) = \frac{A}{\left(1-n\right)\left(x-a\right)^{n-1}} + C$$

Интегрирование простейшей дроби III типа

- **Пример.** Найти интеграл $\int \frac{5x+3}{x^2-2x-5}dx.$

Решение. $d(x^2-2x-5)=(2x-2)dx$

$$\int \frac{5x-5+8}{x^2-2x-5}dx=\int \frac{\frac{5}{2}(2x-2)+8}{x^2-2x-5}dx=\frac{5}{2}\int \frac{(2x-2)dx}{x^2-2x-5}+$$

$$+8\int \frac{dx}{x^2-2x-5}=\frac{5}{2}\int \frac{d\left(x^2-2x-5\right)}{x^2-2x-5}+8\int \frac{dx}{(x^2-2x+1)-6}=\frac{5}{2}\ln\left|x^2-2x-5\right|+$$

$$+8\int \frac{d(x-1)}{(x-1)^2-\left(\sqrt{6}\right)^2}=\frac{5}{2}\ln\left|x^2-2x-5\right|+\frac{8}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{x-1-\sqrt{6}}{x-1+\sqrt{6}}\right|+C.$$

- **Теорема.** Правильную рациональную дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $Q(x)=(x-a)^k(x-b)^{\ell}\ldots(x^2+px+q)^s$

можно единственным образом разложить в сумму простейших дробей:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_k}{(x-a)^k}+\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\ldots+\frac{B_{\ell}}{(x-b)^{\ell}}+$$

$$\ldots+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\frac{M_sx+N_s}{(x^2+px+q)^s}$$

- где $A_i, B_i, M_{i,} N_i$ – действительные числа .

Метод неопределённых коэффициентов.

- Рассмотрим случай, когда корни знаменателя действительные и различные, т.е. рассмотрим правильную дробь: $$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{P_n(x)}{(x-a)(x-b)\ldots(x-d)}$$
- Данную дробь можно разложить на простейшие дроби I типа следующим образом $$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \ldots + \frac{D}{x-d},$$
- Отметим, что неизвестные коэффициенты $A, B, \ldots, D$ простейших дробей можно найти и методом сравнения коэффициентов, который состоит в следующем:

- 1. Дроби справа приводят к общему знаменателю.
- 2. Приравнивают числители дробей слева и справа, раскрывают скобки и записывают многочлен в правой части по убывающим степеням .
- 3. Приравнивая друг другу коэффициенты многочленов левой и правой части при одинаковых степенях , получим систему уравнений для определения коэффициентов.

- **Пример**. Разложить дробь $\dfrac{x^2+3}{x^3+x^2-6x}$

на простейшие и проинтегрировать.

$$\frac{x^2+3}{x^3+x^2-6x}=\frac{x^2+3}{x\left(x^2+x-6\right)}=\frac{x^2+3}{x(x-2)(x+3)}$$

$$\frac{x^2+3}{x(x-2)(x+3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+3}$$

$$\frac{x^2+3}{x(x-2)(x+3)}=\frac{A(x-2)(x+3)+Bx(x+3)+Cx(x-2)}{x(x-2)(x-3)}$$

$$x^2+3=x^2(A+B+C)+x\left(A+3B-2C\right)+(-6A)$$

$$x^0: \qquad 3=-6A, \qquad A=-0{,}5;$$

$$x^1: \qquad 0=A+3B-2C, \qquad B=0{,}8;$$

$$x^2: \qquad 1=A+B+C, \qquad C=0{,}7$$

$$\frac{x^2+3}{x^3+x^2-6x}=-\frac{0{,}5}{x}+\frac{0{,}8}{x-2}+\frac{0{,}7}{x+3}$$

- **Итак,** $\displaystyle\int\frac{x^2+3}{x^3+x^2-6x}dx=-0{,}5\int\frac{dx}{x}+0{,}8\int\frac{dx}{x-2}+0{,}7\int\frac{dx}{x+3}=$

$$=-0{,}5\ln|x|+0{,}8\ln|x-2|+0{,}7\ln|x+3|+C$$

<u>УЧЕБНЫЙ ВОПРОС.</u>

Интегрирование некоторых классов иррациональных функций

Интегрирование некоторых классов иррациональных функций

- С помощью тригонометрических подстановок интегралы от некоторых иррациональных функций приводятся к интегралам от функций, рационально зависящих от тригонометрических функций

$$\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right)dx \quad \left[\begin{array}{l} x = a\,Sin\,t \\ \left(x = a\,Cos\,t\right) \end{array}\right].$$

$$\int R\left(x, \sqrt{a^2 + x^2}\right)dx \quad \left[\begin{array}{l} x = a\,tg\,t \\ \left(x = a\,ctg\,t\right) \end{array}\right].$$

$$\int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right)dx \quad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{a}{\cos x} \\ \left(x = \dfrac{a}{\sin x}\right) \end{array}\right].$$

- **Пример**. Найти

$$\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}dx$$

-

$$\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}dx \left[\begin{array}{ll} x = tgt, & dx = \dfrac{1}{Cos^2 t}dt \\ t = arctgx & \end{array}\right] = \int \frac{\sqrt{1+tg^2 t}}{tg^4 t} \cdot \frac{dt}{Cos^2 t} = \int \frac{\frac{1}{Cos\,t} \cdot dt}{tg^4 t \cdot Cos^2 t} =$$

$$= \int \frac{Cos^4 t}{Sin^4 t \cdot Cos^3 t}dt = \int \frac{Cos\,t\;dt}{Sin^4 t} = \int Sin^{-4} t \cdot d\left(Sin\,t\right) = \frac{Sin^{-3} t}{-3} + C =$$

$$= -\frac{1}{3Sin^3 t} + C = \frac{1}{3\,Sin^3\left(arctgx\right)} + C.$$

Интеграл

Четвёртая разновидность интегралов

$\int R(sin^m x, cos^n x)dx$,   где m и n – четные.

- Четвёртая разновидность интегралов

  $\int R(sin^m x, cos^n x)dx$,   где m и n – четн

Интеграл более общего вида

- Четвёртая разновидность интегралов

$\int R(sin^m x, cos^n x)dx$, где m и n – четные.

Пример.

$$\int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx.$$

Решение.

$$\int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx = \int \frac{1}{x^2}\left(\frac{1+x}{x}\right)^{\frac{1}{2}} dx = \left| \begin{array}{ll} \dfrac{1+x}{x} = t^2, & dx = -\dfrac{2tdt}{\left(t^2-1\right)^2} \\ x = \dfrac{1}{t^2-1}, & \end{array} \right| =$$

$$= \int \left(t^2-1\right)^2 \cdot t \cdot \left(-\frac{2tdt}{\left(t^2-1\right)^2}\right) = -2\int t^2 dt = -2\cdot\frac{t^3}{3} + C = C - \frac{2}{3}\sqrt{\left(\frac{1+x}{x}\right)^3}.$$

Интегрирование дифференциального бинома

- **Четвёртая разновидность интегралов**

$\int R(sin^m x, cos^n x)dx$, где m и n – четные.

Четвёртая разновидность интегралов

$\int R(sin^m x, cos^n x)dx$, где m и n – четные.

дробное

Четвёртая разновидность интегралов

$$\int R(sin^m x, cos^n x)dx$$, где m и n – четные.

Пример.

$$\int \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt[3]{\left(1+x^3\right)^5}}.$$

Решение. Перепишем интеграл в виде $\int x^{-2}\left(1+x^3\right)^{-\frac{5}{3}} dx$, здесь

$m=-2,\ \ n=3,\ \ p=-\frac{5}{3}$, а $\frac{m+1}{n}+p=-2$ – целое число, что соответствует третьему случаю. Поэтому

$$\int x^{-2}\left(1+x^3\right)^{-\frac{5}{3}}dx=\left|\begin{array}{c}\dfrac{1+x^3}{x^3}=t^3\\ x=\left(t^3-1\right)^{-\frac{1}{3}}\\ dx=-t^2\left(t^3-1\right)^{-\frac{4}{3}}dt\end{array}\right|=-\int\left[\left(t^3-1\right)^{-\frac{1}{3}}\right]^{-2}\cdot\left(\frac{t^3}{t^3-1}\right)^{-\frac{5}{3}}\cdot t^2\left(t^3-1\right)^{-\frac{4}{3}}dt=$$

$$=-\int t^{-3}\cdot\left(t^3-1\right)dt=\int\frac{1-t^3}{t^3}dt=\int\left(t^{-3}-1\right)dt=\frac{t^{-2}}{-2}-t+C=C-\frac{1+2t^3}{2t^2}=C-\frac{2+3x^3}{2x\sqrt[3]{\left(1+x^3\right)^2}}.$$

Тригонометрические подстановки

С помощью тригонометрических подстановок интегралы от некоторых иррациональных функций приводятся к интегралам от функций, рационально зависящих от тригонометрических функций:

- А $\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx.$ $\left[\begin{array}{l} x=a\,\mathrm{Sin}\,t \\ \left(x=a\,\mathrm{Cos}\,t\right)\end{array}\right].$

- Б $\int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx$ $\left[\begin{array}{l} x=a\,tg\,t \\ \left(x=a\,ctg\,t\right)\end{array}\right].$

- В

$$\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx \qquad \left[\begin{matrix} x=\dfrac{a}{\cos t} \\[2ex] x=\dfrac{a}{\sin t} \end{matrix}\right].$$

Пример.

$$\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}dx \left[\begin{array}{ll} x = tgt, & dx = \dfrac{1}{\mathrm{Cos}^2 t}dt \\ t = arctgx & \end{array} \right] =$$

$$= \int \frac{\sqrt{1+tg^2 t}}{tg^4 t} \cdot \frac{dt}{\mathrm{Cos}^2 t} = \int \frac{\frac{1}{\mathrm{Cos}\, t} \cdot dt}{tg^4 t \cdot \mathrm{Cos}^2 t} =$$

Далее (потерян минус в последнем слагаемом):

$$= \int \frac{\cos^4 t}{\sin^4 t \cdot \cos^3 t} dt = \int \frac{\cos t \, dt}{\sin^4 t}$$

$$= \int \sin^{-4} t \cdot d(\sin t) = \frac{\sin^{-3} t}{-3} + C =$$

$$= -\frac{1}{3\sin^3 t} + C = \frac{1}{3\sin^3(\operatorname{arctg} x)} + C.$$

Пример.

$$\int \sqrt{x^2+1}\,dx$$

Можно проинтегрировать по частям:

$$\left| \begin{array}{l} u = \sqrt{x^2+1}, \;\; du = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx \\ \\ dv = dx, \;\; v = x \end{array} \right|$$

Пример.

$$\int \sqrt{x^2+1}\,dx = x\sqrt{x^2+1} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\,dx =$$

$$= x\sqrt{x^2+1} - \int \frac{x^2+1-1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx =$$

$$= x\sqrt{x^2+1} - \int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx + \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx =$$

$$= x\sqrt{x^2+1} - \int \sqrt{x^2+1}\,dx + \ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|$$

$$\int \sqrt{x^2+1}\,dx = x\sqrt{x^2+1} - \int \sqrt{x^2+1}\,dx + \ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|$$

$$2\int \sqrt{x^2+1}\,dx = x\sqrt{x^2+1} + \ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right| +$$

$$\int \sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right| +$$

Четвертая разновидность интегралов

$\int R(sin^m x, cos^n x)dx$, где m и n – четные.

Найти интеграл $\int \frac{(x-3)dx}{\sqrt{8-2x-x^2}}$.

Решение.

Выделяем полный квадрат из подкоренного выражения.

$$8-2x-x^2 = -\left(x^2+2x-8\right) = -(x^2+2x+1-9) =$$

$$= -\left[(x+1)^2-9\right] = 9-(x+1)^2.$$

Теперь сделаем замену переменной $x+1=t$. $dx = dt$.

$$\int \frac{(x-3)dx}{\sqrt{8-2x-x^2}} = \int \frac{t-1-3}{\sqrt{9-t^2}}dt = \int \frac{t-4}{\sqrt{9-t^2}}dt =$$

$$= \int \frac{tdt}{\sqrt{9-t^2}} - 4\int \frac{dt}{\sqrt{9-t^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{d\left(9-t^2\right)}{\sqrt{9-t^2}} - 4\int \frac{dt}{\sqrt{9-t^2}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{9-t^2} - 4\arcsin\frac{t}{3} + C.$$

Возвращаясь к старой переменной и учитывая, что $9-t^2=8-2x-x^2$, получим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{8-2x-x^2}} = -\sqrt{8-2x-x^2} - 4\arcsin\frac{x+1}{3} + C.$$

- **Понятие об интегралах, не берущихся в элементарных функциях**

  Как мы видим, в дифференциальном исчислении, производная от любой элементарной функции есть функция элементарная. Другое дело операция, обратная дифференцированию, - интегрирование. Можно привести многочисленные примеры таких элементарных функций, первообразные от которых хотя и существуют, но не являются элементарными функциями.

Так, например, хотя по теореме существования для функций

$$e^{-x^2}; \quad \frac{\operatorname{Sin} x}{x}; \quad \frac{\operatorname{Cos} x}{x}; \quad \frac{1}{\ln x}; \quad \int \sqrt{1-k^2 \operatorname{Sin}^2 x}\, dx$$

существуют первообразные, но они не выражаются в элементарных функциях. Несмотря на это, все эти первообразные хорошо изучены и для них составлены подробные таблицы, помогающие практически использовать эти функции. В дальнейшем мы познакомимся с методами вычисления значений таких функций

- ## Заключение.

В заключение отметим, что рассмотренные методы и приёмы интегрирования не исчерпывают всех классов аналитически интегрируемых элементарных функций. В то же время из всего изложенного следует, что техника интегрирования сложнее по сравнению с дифференцированием. Необходимы навыки и изобретательность, которые приобретаются на практике в результате решения большого числа примеров

Контрольные вопросы:

- 1. В чем заключается метод интегрирования рациональных дробей?
- 2. Универсальная тригонометрическая подстановка.

Задание на самостоятельную работу

- [1] Н.С. Пискунов. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т 1. Москва: Интеграл-Пресс, 2004, с. 340-375.
- [3] Б.П. Демидович, В.А. Кудрявцев. Краткий курс высшей математики. Москва: Издательство АСТ, 2004, с. 229-250.
- **Выучить таблицу основных интегралов.**