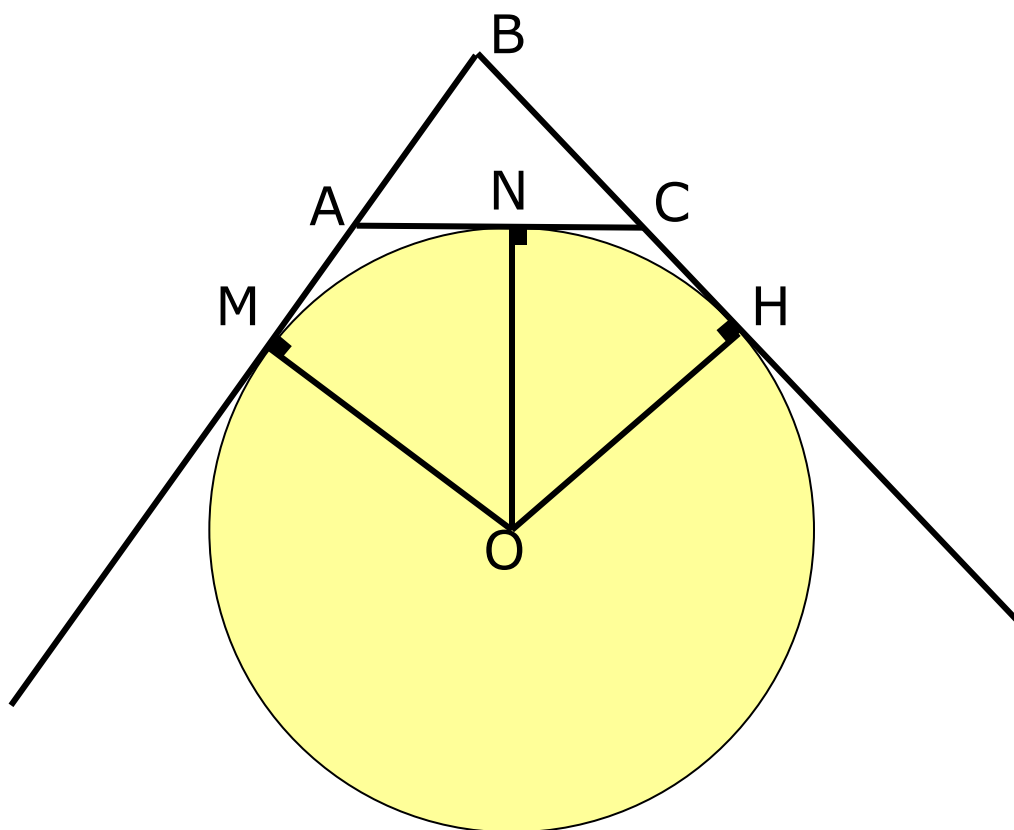


«Вневписанная окружность»

Содержание

- **Глава 1. Определение вневписанной окружности.**
 - Центр вневписанной окружности.**
 - Касательная к вневписанной окружности.**
- Глава 2. Формулы для вычисления радиусов вневписанных окружностей.**
 - § 1. Соотношение между радиусом вневписанной окружности и периметром треугольника**
 - § 2. Соотношение между радиусом вневписанной окружности, площадью и периметром треугольника**
- Глава 3. Некоторые соотношения с радиусами вневписанных окружностей.**
 - § 1. Выражение суммы радиусов вневписанных окружностей через радиус вписанной окружности и радиус описанной окружности**
 - § 2. Выражение суммы величин, обратных радиусам вневписанных окружностей, через величину обратную радиусу вписанных окружностей.**
 - § 3. Выражение суммы всех попарных произведений радиусов вневписанных окружностей через квадрат полупериметра треугольника.**
 - § 4. Выражение произведения радиусов вневписанных окружностей через произведение радиуса вписанной окружности и квадрат полупериметра треугольника.**
 - § 5. Выражение высоты треугольника через радиусы вневписанных окружностей.**

Глава 1. Окружность называется **вневписанной** в треугольник, если она касается одной из сторон треугольника и продолжений двух других сторон



Центр вневписанной окружности в треугольник есть точка пересечения биссектрисы внутреннего угла треугольника, противоположного той стороне треугольника, которой окружность касается, и биссектрис двух внешних углов треугольника (1)

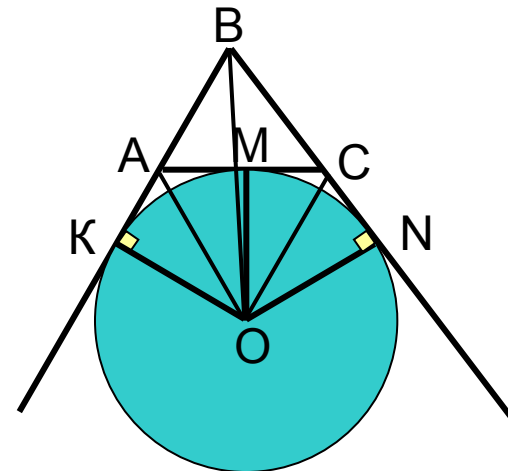
Дано:

$\triangle ABC$

Окр. $(O; r)$

M, N, K – точки касания

Доказать (1)



Решение:

Т. к. окружность касается сторон угла CAK , то центр окружности O равноудален от сторон этого угла, следовательно, он лежит на биссектрисе угла CAK . Аналогично, точка O лежит на биссектрисе угла ACN . Т. к. окружность касается прямых BA и BC , то она вписана в угол ABC , а значит её центр лежит на биссектрисе угла ABC . Ч.т. д.

Расстояние от вершины угла треугольника до точек касания невписанной окружности со сторонами этого угла равны полупериметру данного треугольника

$$AB_1 = AC_1 = p$$

Дано:

$\triangle ABC$

Невписанная окр. $(O_a; r_a)$

Доказать, что

$$AB_1 = AC_1 = p$$

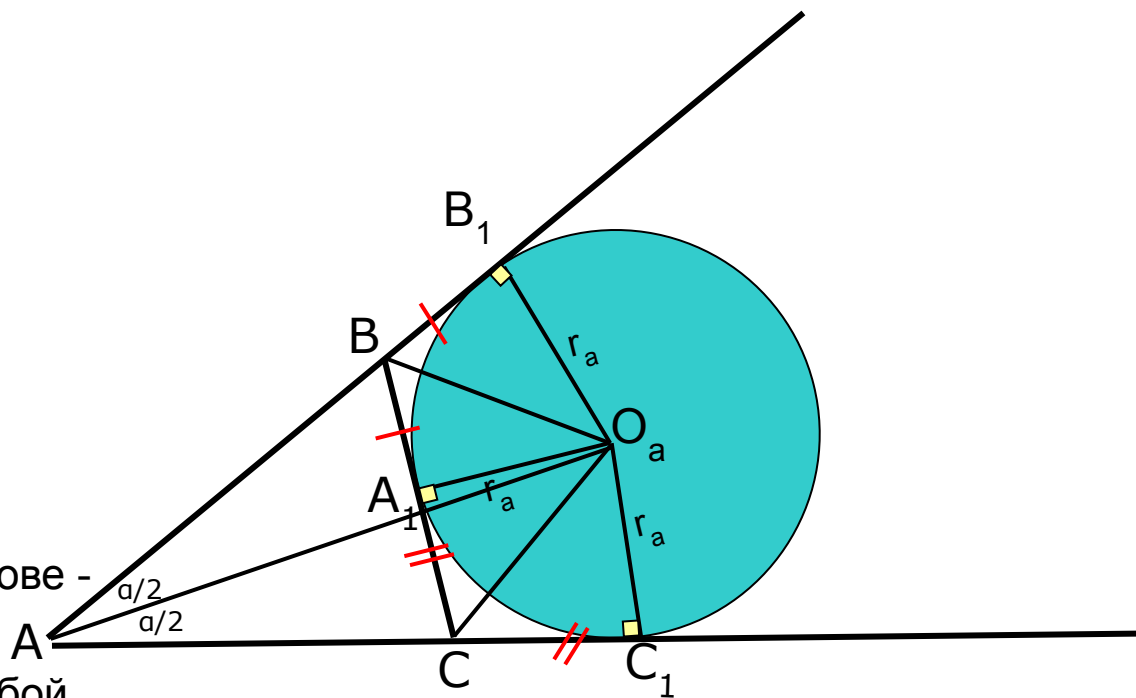
Доказательство:

Т.к. O_a - центр невписанной окружности. Касательные, проведенные к окружности из одной точки, равны между собой, поэтому $BB_1 = BA_1$, $CA_1 = CC_1$, $AB_1 = AC_1$.

Значит,

$$2p = (AC + CA_1) + (AB + BA_1) = (AC + CC_1) + (AB + BB_1) = AC_1 + AB_1 = 2AC_1 = 2AB_1$$

т.е. $AB_1 = AC_1 = p$.



Глава 2. § 1. Радиус невписанной окружности. Касающейся сторон данного внутреннего угла треугольника, равен произведению полупериметра треугольника на тангенс половины этого угла, т. е.

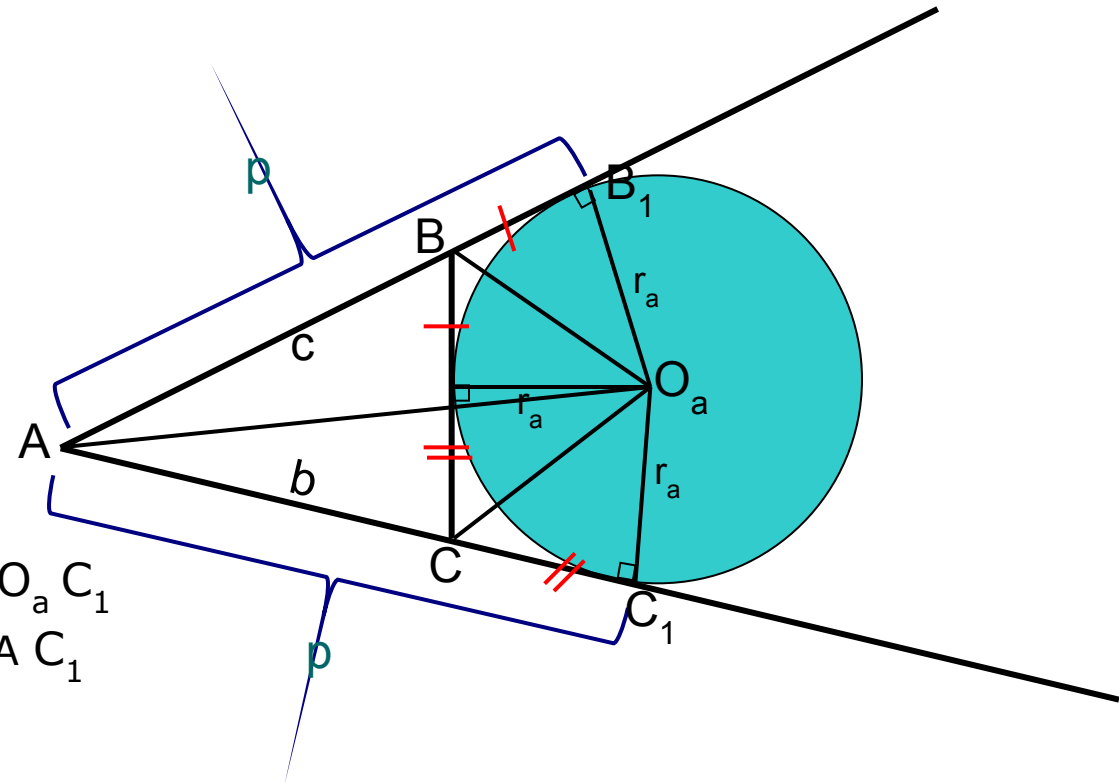
$$r_a = \text{ptg} \frac{\alpha}{2}, r_b = \text{ptg} \frac{\beta}{2}, r_c = \text{ptg} \frac{\gamma}{2} \quad (2)$$

Дано:

$\triangle ABC$

Невписанная окр. $(O_a; r_a)$

Доказать (2)



Решение:

В прямоугольном треугольнике $A O_a C_1$

r_a и p – длины катетов, угол $O_a A C_1$ равен $\frac{\alpha}{2}$, поэтому $r_a = \text{ptg} \frac{\alpha}{2}$.

§ 2. Радиус вневписанной окружности, касающейся данной стороны треугольника, равен отношению площади треугольника к разности полупериметра и этой стороны. т.е.

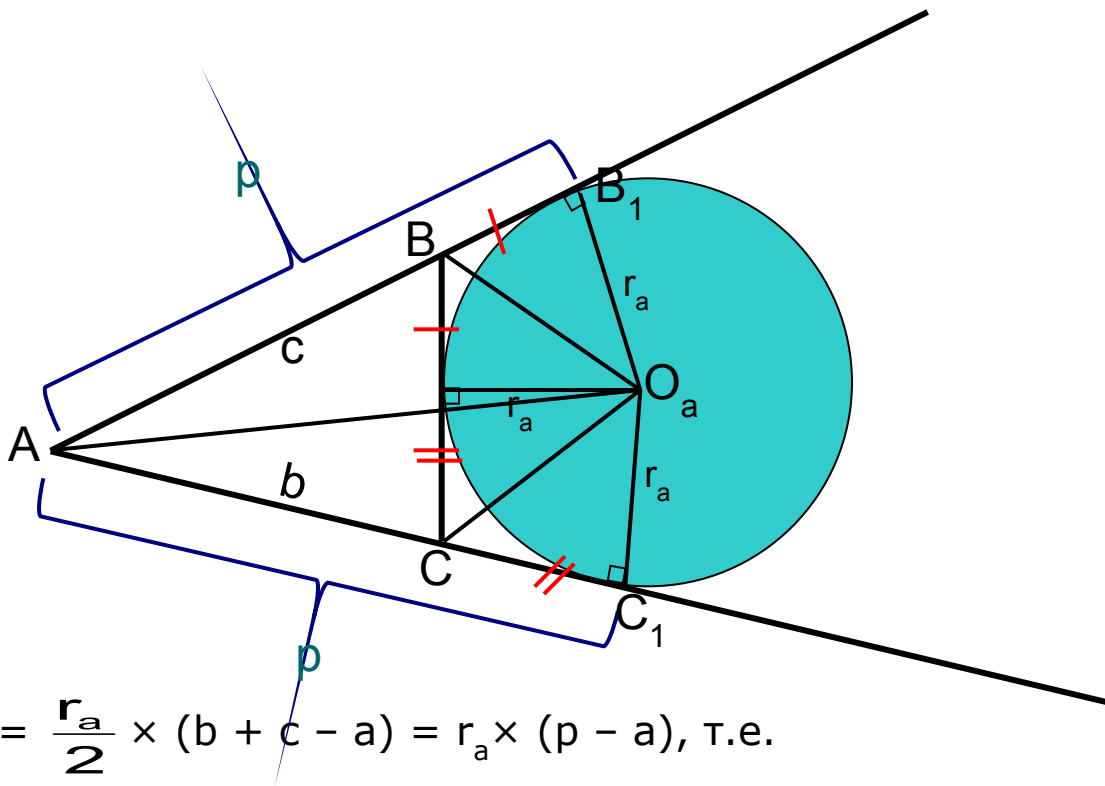
$$r_a = \frac{S}{p-a}, \quad r_b = \frac{S}{p-b}, \quad r_c = \frac{S}{p-c} \quad (3)$$

Дано:

$\triangle ABC$

Вневписанная окр. $(O_a; r_a)$

Доказать (3)



Решение:

Имеем

$$S = S_{ABC} = S_{AO_aC} + S_{BO_aC} - S_{BO_aC_1} = \frac{r_a}{2} \times (b + c - a) = r_a \times (p - a), \text{ т.е.}$$

$$r_a = \frac{S}{p-a}$$

Глава 3. § 1 Сумма радиусов вневписанных окружностей равна сумме радиуса вписанной окружности и удвоенного диаметра описанной окружности, т. е.

$$r_a + r_b + r_c = r + 4R$$

Доказательство:

Выразим все радиусы через стороны, площадь и полупериметр треугольника:

$$r = \frac{S}{p}, \quad R = \frac{abc}{4S}, \quad r_a = \frac{S}{p-a}, \quad r_b = \frac{S}{p-b}, \quad r_c = \frac{S}{p-c}$$

Значит,

$$\begin{aligned} r_a + r_b + r_c - r &= \frac{S}{p-a} + \frac{S}{p-b} + \frac{S}{p-c} - \frac{S}{p} = \\ &= S \frac{p(p-b)(p-c) + p(p-a)(p-c) + p(p-a)(p-b) - (p-a)(p-b)(p-c)}{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \\ &= S \frac{abc}{S^2} = \frac{abc}{S} = 4R \end{aligned}$$

§ 2. Сумма величин, обратных радиусам невписанных окружностей, равна величине, обратной радиусу вписанной окружности, т. е.

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$$

Доказательство:

Используем выражения радиусов через стороны и площадь треугольника:

$$r = \frac{S}{p}, \quad R = \frac{abc}{4S}, \quad r_a = \frac{S}{p-a}, \quad r_b = \frac{S}{p-b}, \quad r_c = \frac{S}{p-c}$$

Значит,

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{p-a}{S} + \frac{p-b}{S} + \frac{p-c}{S} = \frac{3p-2p}{S} = \frac{p}{S} = \frac{1}{r}$$

§ 3. Сумма всех попарных произведений радиусов вневписанных окружностей равна квадрату полупериметра треугольника, т. е.

$$r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a = p^2$$

Доказательство:

Воспользуемся формулами ранее доказанных радиусов через стороны и площадь треугольника:

$$r = \frac{S}{p}, \quad r_a = \frac{S}{p-a}, \quad r_b = \frac{S}{p-b}, \quad r_c = \frac{S}{p-c}$$

Подставим

$$\begin{aligned} r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a &= \frac{S^2}{(p-a)(p-b)} + \frac{S^2}{(p-b)(p-c)} + \frac{S^2}{(p-c)(p-a)} = \\ &= S^2 \frac{(p-c) + (p-a) + (p-b)}{(p-a)(p-b)(p-c)} = S^2 \frac{3p-2p}{(p-a)(p-b)(p-c)} = S^2 \frac{p}{(p-a)(p-b)(p-c)} \end{aligned}$$

Из формулы Герона следует

$$(p-a)(p-b)(p-c) = \frac{S^2}{p}, \text{ поэтому}$$

$$r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a = S^2 \frac{p}{S^2} = p^2$$

§ 4. Произведение всех трех радиусов вневписанных окружностей равно произведению радиуса вписанной окружности на квадрат полупериметра треугольника, т.е.

$$r_a r_b r_c = rp^2$$

Доказательство:

Из ранее доказанных формул для радиусов и формулы Герона

$$r_a = \frac{S}{p-a}, \quad r_b = \frac{S}{p-b}, \quad r_c = \frac{S}{p-c}, \quad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Тогда

$$r_a r_b r_c = \frac{S^3}{(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{S^3 p}{S^2} = Sp = pr \times p = rp^2$$

Следствие 1. Площадь треугольника равна отношению произведения всех трех радиусов вневписанных окружностей к полупериметру треугольника, т.е.

$$S = \frac{r_a r_b r_c}{p}$$

Доказательство:

$$\text{Из } r_a r_b r_c = rp^2 = rp \times p = Sp.$$

$$\text{Следовательно } S = \frac{r_a r_b r_c}{p}$$

Следствие 2. Площадь треугольника равна квадратному корню из произведения всех трех радиусов внеписанных окружностей и радиуса вписанной окружности, т.е.

$$S = \sqrt{r_a r_b r_c r}$$

Доказательство:

Из следствия 1, что $S = \frac{r_a r_b r_c}{p}$ и равенства $S = pr$,

получаем, перемножая их почленно,

$$S^2 = \frac{r_a r_b r_c}{p} \times pr = r_a r_b r_c r \quad . \text{ Значит } S = \sqrt{r_a r_b r_c r}$$

§ 5. Величина, обратная высоте треугольника, опущенной на его данную сторону, равна полусумме величин, обратных радиусам вневписанных окружностей, касающихся двух других сторон треугольника, т.е.

$$\frac{1}{h_a} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} \right), \quad \frac{1}{h_b} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_c} + \frac{1}{r_a} \right), \quad \frac{1}{h_c} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} \right)$$

Доказательство:

Воспользуемся формулами

$$r_b = \frac{S}{p - b}, \quad r_c = \frac{S}{p - c}$$

Значит,

$$\frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{p - b}{S} + \frac{p - c}{S} = \frac{2p - b - c}{S} = \frac{a + b + c - b - c}{S} =$$

$$= \frac{a}{S} = \frac{a}{\frac{1}{2} a h_a} = \frac{2}{h_a}, \quad \frac{1}{h_a} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} \right)$$

3. Заключение.

Рассмотренные свойства позволили установить связь между радиусами вписанной и невписанной окружностями, между радиусами невписанной окружности и площадью треугольника, между радиусами невписанных окружностей и периметром треугольника. Данный материал выходит за рамки школьной программы и будет полезен учащимся увлеченным математикой.