

**Интересные задачи по
математике.**

**Геометрия древесного
ствола.**

Как определить объем бревна?

Рассмотрим задачу о вычислении объема ствола срубленного дерева или его части в виде бревна (имеющих, заметим довольно сложную форму), причем средствами элементарной геометрии, без использования интегралов. Результат в таком случае получится, конечно, не столь точным, но на практике вполне достаточно приближенная оценка объёма дерева.

Можно считать, что древесный ствол имеет форму, близкую к прямому круговому конусу (либо усеченному конусу), а небольшая часть ствола в идеале представляет собой цилиндр. Объём каждого из названных тел нетрудно вычислить по известным формулам, сделав предварительно необходимые замеры. Однако нет необходимости запоминать сразу три формулы, если имеется одна универсальная, частными случаями которой все они являются. Это формула Симпсона:

$$V = h/6 * (S1 + 4S2 + S3),$$

где h - высота тела, $S1$ и $S3$ - площади нижнего и верхнего оснований соответственно, а $S2$ - площадь сечения тела плоскостью, проходящей через середину его высоты параллельно плоскостям оснований.

Убедиться в том, что формула верна и для цилиндра, и для конуса, можно, применив ее к каждой фигуре. Например, для полного конуса получим (рис.1):

$$S1 := \pi R^2$$

$$S2 := \frac{1}{4} S1 = \frac{1}{4} \pi R^2$$

$$S3 = 0$$

$$V = \frac{h}{6} \cdot \left(\pi R^2 + 4 \cdot \frac{1}{4} \pi R^2 + 0 \right) = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

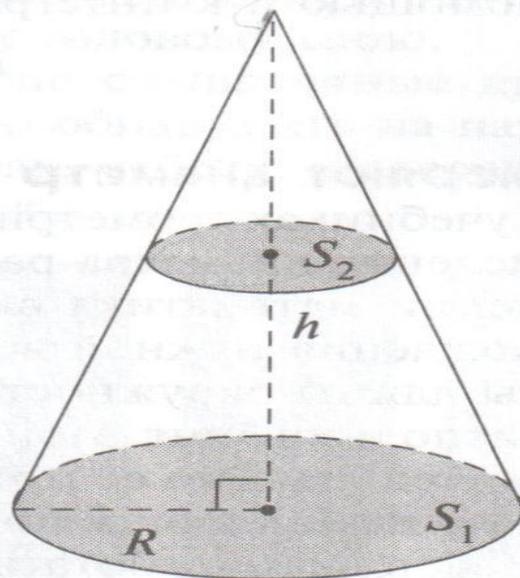


Рис. 1

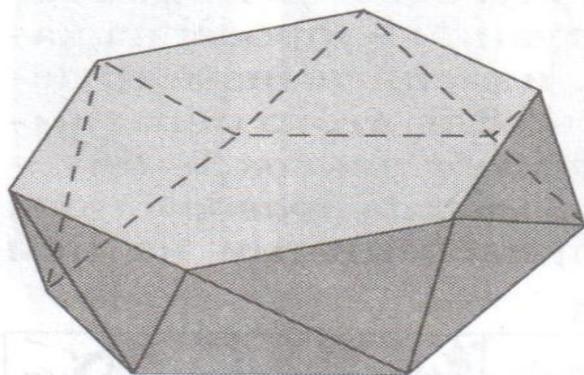


Рис. 2

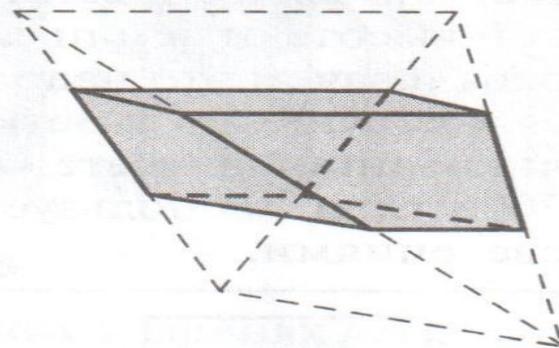


Рис. 3

■ Благодаря формуле Симпсона не нужно даже выяснять, какова форма ствола срубленного дерева.

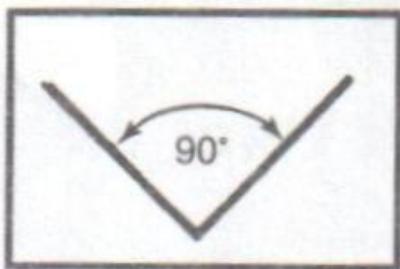
■ На практике решение задачи сводится к четырем измерениям, три из которых (длины ствола и диаметров двух срубов) можно сделать непосредственно, а измерив длину окружности ствола на уровне середины его длины, легко вычислить диаметр соответствующего сечения. Остается только произвести расчет объема ствола. Формула Симпсона «работает» и в более сложных ситуациях. Например, когда надо определить объем антипризмы (рис.2) или многогранника, отсекаемого от тетраэдра двумя плоскостями, параллельными двум его ребрам (рис.3).

Зачем измеряют диаметр дерева?

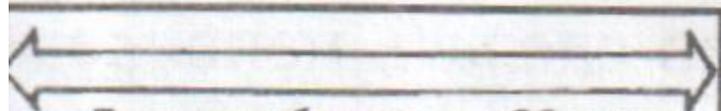
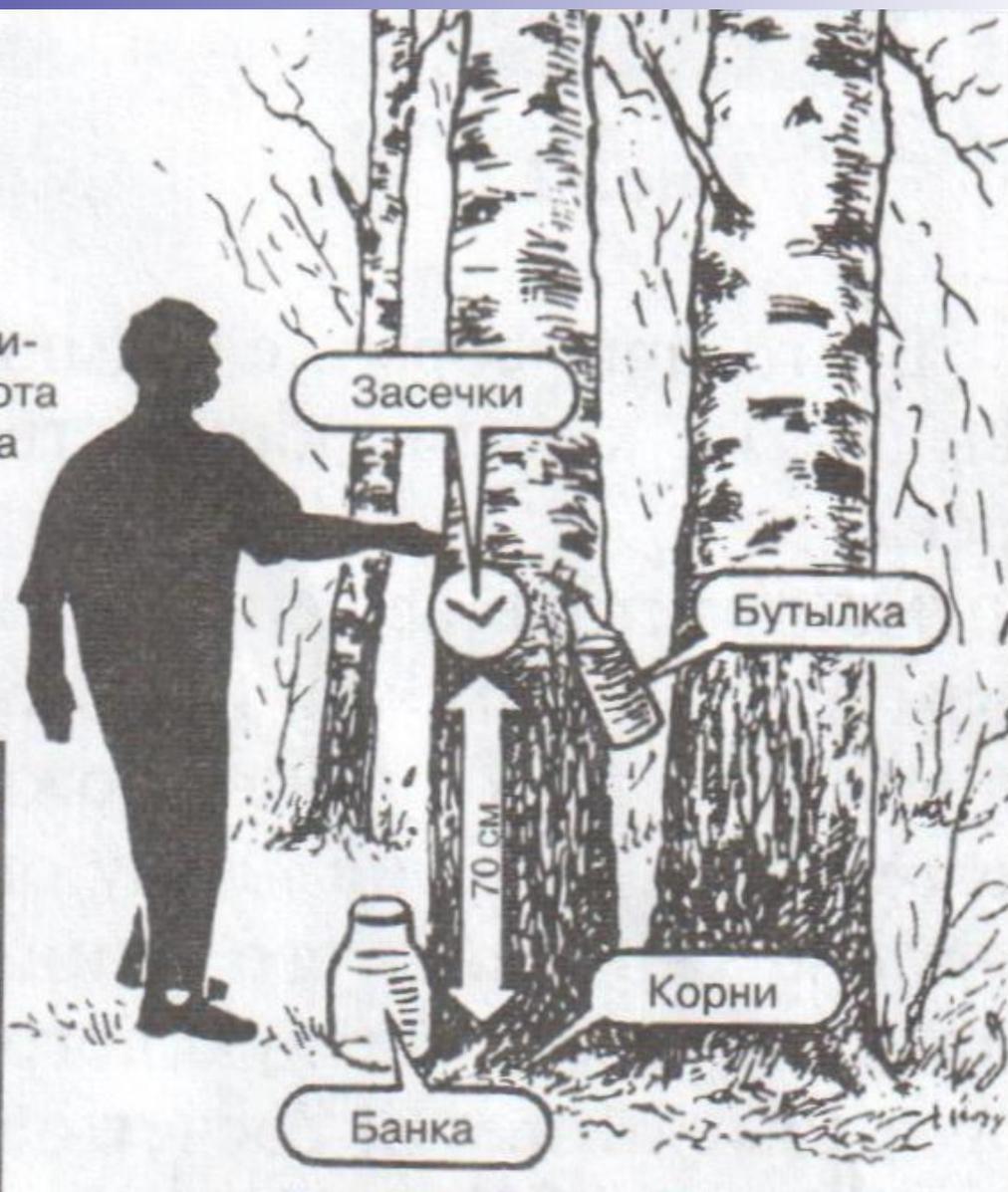
В школьных учебниках геометрии встречается задача на определение диаметра растущего дерева. При ее решении математика служит инструментом для нахождения нужной величины с помощью формулы длины окружности. Основная цель использования этой задачи в обучении- образовательная, но ее можно достичь и с помощью задач, не имеющих прикладного характера. Как же заставить «работать» прикладную составляющую данной задачи?

Попробуем изменить фабулу, ответив на два естественных в описанной ситуации вопроса: на какой высоте от земли следует измерять диаметр дерева и зачем это надо делать? Для этого обратимся к задаче «Как собрать березовый сок?».

-Задача. Березовый сок - полезный и вкусный напиток. Обычно его собирают за 4-7 дней до набухания почек. Для этого на стволе березы острым ножом делают две линии- засечки под углом 90° и вставляют желобок, по которому будет течь сок. Засечки нужно делать на высоте 70 см от того места, где начинаются корни. Однако собирать сок можно только с деревьев, у которых диаметр ствола в месте засечек составляет не менее 30 см, иначе после сбора сока дерево может погибнуть



Острым ножом делаем две линии-засечки под прямым углом. Высота над тем местом, откуда от ствола начинаются корни, — около 70 см. Обратите внимание: не от земли, а от ответвления корней.



Диаметр березы — 30 см



Годовые слои

Задача. Распилив бревно под каким-либо углом к его оси, мы увидим рисунок годовых слоев древесины. Что это за кривые с точки зрения геометрии?

Казалось бы, задача как задача, ничего особенного... Между тем, трудно придумать более подходящий, живой и наглядный пример, чтобы показать ученикам, какие кривые могут получиться в сечении конуса различными плоскостями. Часто школьникам приводят иной, куда более абстрактный и требующий от них напряжения воображения пример из астрономии: конические сечения описывают возможные траектории небесных тел (в частности, планеты, вращающиеся вокруг солнца по эллиптическим орбитам). Всё бы ничего, вот только сам конус в эту картину не вписывается. Другое дело, когда приходится разглядывать брёвнышко или вырезанную из него дощечку.

Поскольку форма бревна близка к форме усеченного конуса, то на спилах ствола, сделанных под разными углами, мы обнаружим кривые, внешне очень похожие на эллипс, окружность, параболу, или же гиперболу. А точнее, семейства кривых: годовые кольца говорят математику о том, что бревно можно рассматривать как систему «вложенных» усеченных конусов с общей осью.

Итак, в сечении, перпендикулярном оси, получатся *концентрические окружности* (рис.1), в поперечном сечении, не перпендикулярном ей, - *эллипсы* (рис. 2). На продольном срезе будут видны *гиперболы* (рис. 3), а если плоскость распила параллельна одной из образующих конуса, - *параболы* (рис.4).



Рис. 1

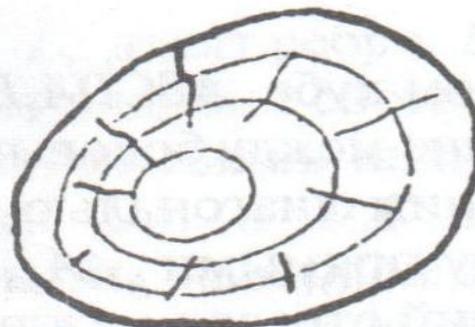


Рис. 2

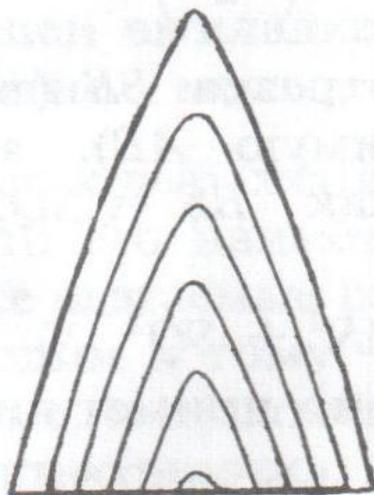


Рис. 3

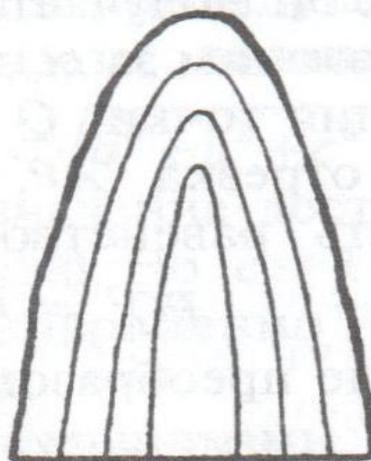


Рис. 4

Наконец, для полноты картины полезно рассмотреть осевое сечение.

- Как видим, «геометрия бревна» не так проста, как казалось на первый взгляд! Используются ли эти знания на практике? Это как посмотреть. Придя в магазин, разборчивый покупатель изделий из дерева обратит внимание не только на качество обработки материала, но и на красоту и необычность текстуры - естественного рисунка, образованного волокнами и слоями древесины. А для того чтобы на срезе появился характерный рисунок какого-то из упомянутых семейств линий, мастер должен сделать распил определённым образом, правильно выбрав то или иное его направление. К примеру, параллельные прямые видны при продольном разрезе, проходящем через сердцевину ствола, а параболы получаются, когда плоскость разреза проходит на некотором расстоянии от сердцевины ствола по касательной к годовому слою.
- Эти и другие симпатичные древесные узоры (рис.5) можно обнаружить на паркетах, стенных панелях, дверях, мебели, разделочных досках, рамках картин и т.д.

Примечательно то, что в одних изделиях легко сочетаются разные рисунки, а в других преобладает какой - то один. Зачастую это связано с назначением и предпочтительными физическими свойствами изделия. Однако, как это нередко бывает, выигрывая в качестве, проигрываем в красоте: простота текстуры - залог хороших свойств древесины (устойчивости к внешним воздействиям, высокой износостойкости, неподверженности деформации и др.), но как отделочный материал последняя ценится меньше, чем уступающая ей в тех же показателях древесина с более сложным и оригинальным рисунком.

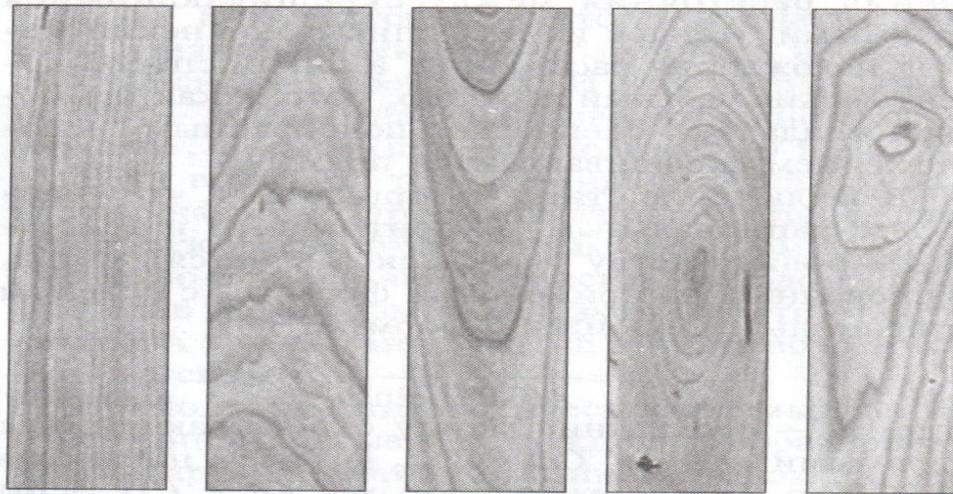


Рис. 5