Решение задач
линейного программирования
симплекс-методом.
Двойственность ЗЛП.

1. Основы симплексного метода

2. Пример решения ЗЛП симплексным методом

3. Основы теории двойственности ЗЛП

4. Примеры построения двойственных задач

1. Основы симплексного метода

В общем виде задача ЛП сводится к нахождению некоторой совокупности значений переменных $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, доставляющих линейной функции цели экстремальное значение и удовлетворяющих системе ограничений в виде равенств или неравенств.

Математическая модель задачи ЛП формулируется следующим образом: найти план $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, который доставляет экстремум функции

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max\ (\min) \tag{1.13}$$

при системе ограничений:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1, m_1}; \tag{1.14}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = \overline{m_1 + 1, m_2}; \tag{1.15}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i, \quad i = \overline{m_2 + 1, m}; \tag{1.16}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, r}, \quad r \le n\ . \tag{1.17}$$

Линейная функция (1.13) называется ***целевой функцией***; множество планов X, удовлетворяющих системе ограничений (1.14)–(1.17), называется ***множеством допустимых решений*** Ω, $X \in \Omega$. Допустимый план $X \in \Omega$, доставляющий целевой функции (1.13) экстремальное значение, называется ***оптимальным***.

Если целевая функция подлежит максимизации, а все ограничения задачи имеют вид равенств и на все переменные величины наложено условие неотрицательности $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,n}$, то говорят, что задача представлена в ***канонической форме записи***:

$$\begin{gathered} z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max; \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = \overline{1, m}; \\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1, n}. \end{gathered} \tag{1.18}$$

Любую задачу линейного программирования можно свести к задаче линейного программирования в канонической форме записи.

Правило приведения задачи линейного программирования к канонической форме записи состоит в следующем:

1) если в исходной задаче требуется минимизировать целевую функцию $z(X)$, то необходимо перейти от задачи на минимум к задаче на максимум. Очевидно, что максимизация целевой функции $z(X)$ на области допустимых решений $X \in \Omega$ эквивалентна задаче минимизации функции $-z(X)$ на той же области:

$$\max_{X\in\Omega} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \text{[redacted]} \min_{X\in\Omega}(-\sum_{j=1}^{n} c_j x_j); \tag{1.19}$$

2) если среди ограничений есть неравенства, то необходимо перейти от ограничений в виде неравенств к ограничениям в виде равенств. Для этого вводят неотрицательные ***дополнительные переменные*** $x_{n+i} \geq 0$, $i = \overline{m_1 + 1, m}$, которые прибавляются к левым частям ограничений (1.15) и вычитаются из левых частей ограничений (1.16). В целевую функцию (1.13) дополнительные переменные вводятся с коэффициентами, равными нулю;

3) если в исходной задаче на некоторые переменные x_j ($j = \overline{1, n}$) не наложено условие неотрицательности, то их представляют в виде разности неотрицательных переменных:

$$x_j = x_j' - x_j'', \quad j > r, \ x_j' \geq 0, \quad x_j'' \geq 0. \tag{1.20}$$

Рассмотренный выше графический способ решения задач линейного программирования применим к весьма узкому классу задач ЛП: эффективно им можно решать задачи, содержащие не более двух переменных. Одним из универсальных методов является ***симплексный (симплекс-метод)***, называемый также методом последовательного улучшения плана.

Рассмотрим задачу линейного программирования, представленную в следующем виде:

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max; \tag{1.23}$$

$$\begin{gathered} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \ i = \overline{1, m}; \\ x_j \ge 0, \ j = \overline{1, n}. \end{gathered} \tag{1.24}$$

Решение задачи (1.23)–(1.24) складывается из двух этапов: на первом находят какой-либо начальный базисный план, на втором – по специальным правилам переходят от начального плана к другому, более близкому к оптимальному базисному плану, затем к следующему и так до тех пор, пока задача не будет решена.

1 Построение начального базисного плана. Переменные, которые входят в левую часть одного из ограничений с коэффициентом, равным единице, а во все остальные ограничения с коэффициентами, равными нулю (при неотрицательности правых частей), называются ***базисными***. Переменные, не являющиеся базисными, называются ***свободными***. Если каждое из ограничений системы имеет базисную переменную, то легко найти базисный план задачи. Все переменные, кроме базисных, нужно приравнять к нулю. Тогда последние примут значения, равные правым частям. Приравнивание базисных переменных к правым частям дает базисный план, т. е. угловую точку многогранника решений.

Представим задачу (1.23)–(1.24) в канонической форме записи.

Добавим к левым частям системы ограничений (1.24) дополнительные переменные $x_{n+i} \geq 0,\ i = \overline{1,m}$:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i, \quad i = \overline{1,m}. \tag{1.25}$$

Дополнительные переменные $x_{n+i} \geq 0$ ($i = \overline{1,m}$) будут являться базисными переменными. Следовательно, ***начальный базисный план*** задачи будет иметь следующий вид:

$$X^0 = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0,}_{n}\ \underbrace{b_1, b_2, \ldots, b_m}_{m}). \tag{1.26}$$

В целевую функцию дополнительные переменные вводятся с коэффициентами, равными нулю: $c_{n+i} = 0,\ i = \overline{1, m}$.

2 Признак оптимальности базисного плана. Симплексные таблицы. Введем обозначения:

$$\Delta_0 = c_1 b_1 + c_2 b_2 + \ldots + c_m b_m = C_Б A_0, \tag{1.27}$$

где $C_Б = (c_1, c_2, \ldots c_m)$ – вектор коэффициентов целевой функции, стоящих у базисных переменных;

$A_0 = (b_1, b_2, \ldots b_m)^T$ – вектор свободных членов у системы ограничений, представленных в канонической форме записи.

Значения Δ_j называются ***оценками свободных переменных***:

$$\Delta_j = C_Б A_0 - c_j, \quad j = \overline{1, n}. \tag{1.28}$$

Базисный план X_0 является ***оптимальным*** (доставляет целевой функции максимальное значение $z = z(X_0) = \Delta_0$), если все оценки свободных переменных неотрицательны.

Для решения задачи (1.23)–(1.24) обычно условие заносят в таблицу, которую называют ***симплексной*** (таблица 1.2).

Таблица 1.2 – **Симплексная таблица**

БП	$C_Б$	x_1	x_2	…	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	…	x_{n+m}	Решение
x_{n+1}	c_{n+1}	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	1	0	…	0	b_1
x_{n+2}	c_{n+2}	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	0	1	…	0	b_2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
x_{n+m}	c_{n+m}	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	0	0	…	1	b_m
z-строка		Δ_1	Δ_2	…	Δ_n	0	0	…	0	Δ_0

В первом столбце симплексной таблицы находится список базисных переменных для каждого из ограничений-равенств, в столбце $C_Б$ содержатся соответствующие им коэффициенты целевой функции. Столбец «решение» – столбец свободных членов системы ограничений, в котором находятся значения базисных переменных (решение задачи). В столбцах $x_1, x_2, ..., x_{n+m}$ – коэффициенты a_{ij} системы ограничений. В z-строке или индексной строке расположены коэффициенты Δ_0 (значение целевой функции) и Δ_j, которые рассчитываются по формулам (1.27)–(1.28).

3 Переход к нехудшему базисному плану. Симплексные преобразования. Пусть существуют отрицательные оценки свободных переменных $\Delta_j < 0$. Среди значений $\Delta_j < 0$ находим наибольшее по абсолютной величине и соответствующий ему ***столбец*** j_0 выбираем в качестве ***ведущего***. Соответствующую переменную x_{j_0} введем в базис. Чтобы перейти к новому базисному плану, из базиса нужно вывести одну из переменных. Возможны два случая.

Первый случай (признак неограниченного возрастания целевой функции). Если в ведущем столбце нет ни одного положительного элемента, т. е. все элементы $a_{ij} \le 0$ для всех $i = \overline{1, n}$, то целевая функция на множестве допустимых планов неограничена сверху.

Второй случай. Если среди элементов ведущего столбца имеются положительные, то для каждого элемента $a_{ij_0} > 0$ ведущего столбца находим отношение b_i / a_{ij_0}, выбираем из них наименьшее

$$\min \left\{ \frac{b_i}{a_{i j_0}} \right\} = \frac{b_{i_0}}{a_{i_0 j_0}} = \theta \qquad (1.29)$$

и называем соответствующую ***строку*** i_0 ***ведущей***. Элемент $a_{i_0 j_0}$ (на пересечении ведущего столбца и ведущей строки) будет ***ведущим элементом***.

Выполним переход к «новой» симплексной таблице по следующим формальным правилам, которые называются ***симплексными преобразованиями:***

1 Элементы ведущей строки новой таблицы $a'_{i_0 j}$ и b'_{i_0} равны соответствующим элементам старой таблицы $a_{i_0 j}$ и b_{i_0}, разделенным на ведущий элемент $a_{i_0 j_0}$:

$$a'_{i_0 j} = \frac{a_{i_0 j}}{a_{i_0 j_0}}; \quad b'_{i_0} = \frac{b_{i_0}}{a_{i_0 j_0}}; \quad j = \overline{1, n}. \tag{1.30}$$

2 Элементы ведущего столбца новой таблицы $a'_{i j_0}$ равны нулю, за исключением ведущего элемента, равного единице:

$$a'_{i j_0} = 0 \quad (i \neq i_0) \quad a'_{i_0 j_0} = 1. \tag{1.31}$$

3 Чтобы найти любой другой элемент новой симплексной таблицы $a'_{i j}$ и b'_i, воспользуемся правилом прямоугольника (рисунок 1.5). Элементы новой симлексной таблицы находим по формулам:

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{ij_0} a_{i_0 j}}{a_{i_0 j_0}}; \quad b'_i = b_i - \frac{a_{ij_0} b_{i_0}}{a_{i_0 j_0}}; \tag{1.32}$$
$$j = \overline{1,\ n}; \quad i = \overline{1,\ m}; \quad i \neq i_0,$$

где a_{ij}, b_i – элементы старой таблицы;

a_{ij_0} – элементы ведущего столбца;

$a_{i_0 j}$, b_{i_0} – элементы ведущей строки;

$a_{i_0 j_0}$ – ведущий элемент.

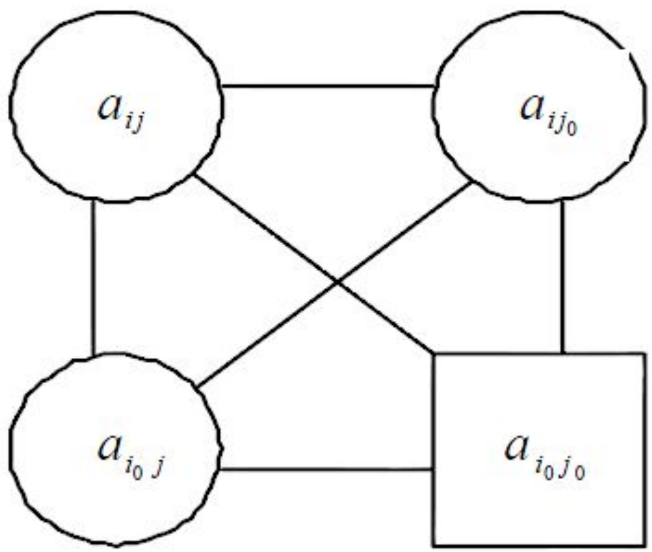

Рисунок 1.5 – Правило прямоугольника

Для этого в исходной таблице выделяем прямоугольник, вершинами которого служат нужные для вычисления элементы (см. рисунок 1.5). Диагональ, содержащую ведущий и искомый элементы новой таблицы, назовем главной, а другую – побочной. Из элемента a_{ij} вычитаем произведение элементов с побочной диагонали, деленной на ведущий элемент с основной диагонали.

4 По этому же правилу могут быть вычислены все элементы индексной строки:

$$\Delta'_j = \Delta_j - \frac{\Delta_{j_0} a_{i_0 j}}{a_{i_0 j_0}}; \qquad \Delta'_0 = \Delta_0 - \frac{\Delta_{j_0} b_{i_0}}{a_{i_0 j_0}}. \qquad (1.33)$$

Последовательность операций 1–4, позволяющая перейти от одного базисного плана к другому нехудшему, называется ***итерацией симплекс-метода***.

Алгоритм решения задачи ЛП симплексным методом:

Шаг 1 Представить математическую модель задачи в канонической форме записи.

Шаг 2 Построить начальный базисный план.

Шаг 3 Условие задачи записать в виде симплекс-таблицы.

Шаг 4 Проверить выполнение условия оптимальности. Просмотреть знаки коэффициентов z-строки. Если все $\Delta_j \geq 0$, то задача решена: допустимое базисное решение оптимально и $z^* = z\,(X^*)$. Если не все $\Delta_j \geq 0$, то перейти к *шагу 5*.

Шаг 5 Среди значений $\Delta_j < 0$ найти наибольшее по абсолютной величине и соответствующий ему столбец выбрать в качестве ведущего.

Шаг 6 Проверить выполнение условия неограниченности целевой функции. Если оно выполняется, то целевая функция неограничена ($\max z = \infty$), иначе перейти к *шагу 7*.

Шаг 7 Для элементов $a_{ij_0} > 0$ ведущего столбца найти по формуле (1.29) отношение θ и соответствующую строку выбрать в качестве ведущей. Элемент $a_{i_0 j_0}$ на пересечении ведущего столбца и ведущей строки использовать в качестве ведущего элемента.

Шаг 8 По правилам 1–4 (формулы (1.30)–(1.33)) выполнить переход к «новой» симплексной таблице и перейти к *шагу 4*.

2. Пример решения ЗЛП симплексным методом

Постановка задачи. Для добычи и производства балласта песчаного, песчано-гравийного и щебеночного используются следующие виды ресурсов: экскаваторы, бульдозеры и трудовые ресурсы. Объем имеющихся ресурсов, нормы расхода ресурсов для добычи и производства 1 тыс. $м^3$ балласта песчаного, песчано-гравийного и щебеночного, а также прибыль от его реализации приведены в таблице 1.3. Потребность в балласте песчано-гравийного не превышает 8 тыс. $м^3$, в балласте щебеночном – 5 тыс. $м^3$. Требуется определить объемы добычи и производства балласта песчаного, песчано-гравийного и щебеночного, обеспечивающие максимальную прибыль.

Таблица 1.3 – **Исходные данные задачи**

Ресурсы	Затраты ресурсов на 1 тыс. $м^3$ балласта			Объем ресурсов
	песчаного	песчано-гравийного	щебеночного	
Экскаваторы, маш.-ч	14	18	23	420
Бульдозеры, маш.-ч	8	5	6	100
Трудовые ресурсы, чел.-ч	32	45	54	720
Прибыль, тыс. ден. ед.	68	70	75	

Построим ***математическую модель*** задачи.

Обозначим через x_1 – объем добычи и производства балласта песчаного, x_2 – балласта песчано-гравийного, x_3 – балласта щебеночного.

Тогда целевая функция описывает прибыль

$$z = 68\,x_1 + 70\,x_2 + 75\,x_3 \rightarrow \max$$

при ограничениях

– на использование ресурсов:

- экскаваторов $14\,x_1 + 18\,x_2 + 23\,x_3 \leq 420;$
- бульдозеров $8\,x_1 + 5\,x_2 + 6\,x_3 \leq 100;$
- трудовых ресурсов $32\,x_1 + 45\,x_2 + 54\,x_3 \leq 720;$

– на объемы производства балласта:

- песчано-гравийного $x_2 \leq 8;$
- щебеночного $x_3 \leq 5;$

условие неотрицательности: $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0.$

Решим задачу ***симплексным методом***. Представим математическую модель задачи в канонической форме записи. Добавим к левым частям системы ограничений дополнительные переменные $x_{3+i} \geq 0$ ($i = \overline{1,5}$):

$$\begin{aligned}
&14x_1 + 18x_2 + 23x_3 + x_4 = 420,\\
&8x_1 + 5x_2 + 6x_3 + x_5 = 100,\\
&32x_1 + 45x_2 + 54x_3 + x_6 = 720,\\
&x_2 + x_7 = 8,\\
&x_3 + x_8 = 5,\\
&x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,8}.
\end{aligned}$$

В целевую функцию дополнительные переменные вводятся с коэффициентами, равными нулю:

$$z = 68x_1 + 70x_2 + 75x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8,$$

где x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 – базисные переменные;

x_1, x_2, x_3 – небазисные (свободные) переменные.

Построим начальный базисный план. Точку (0, 0, 0) используем как начальное допустимое решение, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$.

Тогда $x_4 = 420$, $x_5 = 100$, $x_6 = 720$, $x_7 = 8$, $x_8 = 5$.

$X^0 = (0, 0, 0, 420, 100, 720, 8, 5)$ – начальный базисный план.

При этом

$z(X^0) = 68 \cdot 0 + 70 \cdot 0 + 75 \cdot 0 + 0 \cdot 420 + 0 \cdot 100 + 0 \cdot 720 + 0 \cdot 8 + 0 \cdot 5 = 0.$

Заполним первую симплекс-таблицу (таблица 1.4).

Таблица 1.4 – **Симплекс-таблица начального допустимого решения**

БП	$C_Б$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	Решение	θ
x_4	0	14	18	23	1	0	0	0	0	420	18,3
x_5	0	8	5	6	0	1	0	0	0	100	16,7
x_6	0	32	45	54	0	0	1	0	0	720	13,3
x_7	0	0	1	0	0	0	0	1	0	8	
x_8	0	0	0	**1**	0	0	0	0	1	5	5
z-строка	1	– 68	– 70	– 75	0	0	0	0	0	0	

В z-строке среди оценок Δ_j есть отрицательные, следовательно, план X^0 не является оптимальным. Среди значений $\Delta_j < 0$ находим наибольшее по абсолютной величине (–75), столбец x_3 выбираем в качестве ведущего. Для положительных элементов ведущего столбца находим наименьшее из симплексных отношений $\theta = 5$, x_8 – ведущая строка. Элемент 1 на пересечении ведущего столбца и ведущей строки – ведущий элемент.

В соответствии с формулами (1.25)–(1.28) переходим к следующей симплексной таблице (таблица 1.5).

Таблица 1.5 – **Симплекс-таблица улучшенного решения**

БП	$C_Б$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	Решение	θ
x_4	0	14	18	0	1	0	0	0	– 23	305	17
x_5	0	8	5	0	0	1	0	0	– 6	70	14
x_6	0	32	45	0	0	0	1	0	– 54	450	10
x_7	0	0	**1**	0	0	0	0	1	0	8	8
x_3	75	0	0	1	0	0	0	0	1	5	
z-строка	1	– 68	– 70	0	0	0	0	0	75	375	

$$X^1 = (0, 0, 5, 305, 70, 450, 8, 0), \quad z(X^1) = 375.$$

В z-строке среди оценок Δ_j есть отрицательные, следовательно, план X^1 не является оптимальным. Среди значений $\Delta_j < 0$ находим наибольшее по абсолютной величине (–70), столбец x_2 выбираем в качестве ведущего. Для положительных элементов ведущего столбца находим наименьшее из симплексных отношений $\theta = 8$, x_7 – ведущая строка. Элемент 1 на пересечении ведущего столбца и ведущей строки – ведущий элемент.

В соответствии с формулами (1.25)–(1.28) переходим к следующей симплексной таблице (таблица 1.6).

Таблица 1.6 – **Симплекс-таблица улучшенного решения**

БП	$C_Б$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	Решение	θ
x_4	0	14	0	0	1	0	0	– 18	– 23	161	11,5
x_5	0	8	0	0	0	1	0	– 5	– 6	30	3,8
x_6	0	**32**	0	0	0	0	1	– 45	– 54	90	2,8
x_2	70	0	1	0	0	0	0	1	0	8	
x_3	75	0	0	1	0	0	0	0	1	5	
z-строка	1	– 68	0	0	0	0	0	70	75	935	

$$X^2 = (0, 8, 5, 161, 30, 90, 8, 5), \quad z(X^2) = 935.$$

В z-строке среди оценок Δ_j есть отрицательные, следовательно, план X^2 не является оптимальным.

В соответствии с формулами (1.25)–(1.28) переходим к следующей симплексной таблице (таблица 1.7).

Таблица 1.7 – **Симплекс-таблица улучшенного решения**

БП	$C_Б$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	Решение	θ
x_4	0	0	0	0	1	0	– 0,44	1,69	0,63	121,63	71,8
x_5	0	0	0	0	0	1	– 0,25	6,25	**7,5**	7,5	1,2
x_1	68	1	0	0	0	0	0,03	– 1,41	– 1,69	2,81	
x_2	70	0	1	0	0	0	0	1	0	8	8
x_3	75	0	0	1	0	0	0	0	1	5	
z-строка	1	0	0	0	0	0	2,13	– 25,63	– 39,75	1126,25	

$$X^3 = (2{,}81;\ 8;\ 5;\ 121{,}63;\ 7{,}5;\ 0,\ 0,\ 0), \quad z(X^3) = 1126{,}25.$$

В z-строке среди оценок Δ_j есть отрицательные, следовательно, план X^3 не является оптимальным.

В соответствии с формулами (1.25)–(1.28) переходим к следующей симплексной таблице (таблица 1.8).

Таблица 1.8 – **Симплекс-таблица улучшенного решения**

БП	$C_Б$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	Решение
x_4	0	0	0	0	1	– 0,08	– 0,42	1,17	0	121
x_8	0	0	0	0	0	0,13	– 0,03	0,83	1	1
x_1	68	1	0	0	0	0,23	– 0,03	0	0	4,5
x_2	70	0	1	0	0	0	0	1	0	8
x_3	75	0	0	1	0	– 0,13	0,03	– 0,83	0	4
z-строка	1	0	0	0	0	5,3	0,8	7,5	0	1166

$$X^4 = (4{,}5;\ 8;\ 4;\ 121;\ 0;\ 0;\ 0;\ 1), \quad z(X^4) = 1166.$$

В z-строке среди оценок Δ_j нет отрицательных, следовательно, план X^4 является оптимальным.

$$X^* = (4{,}5;\ 8;\ 4;\ 121;\ 0;\ 0;\ 0;\ 1), \quad z^* = z\,(X^*) = 1166.$$

Вывод. Для получения максимальной прибыли в размере 1166 денежных единиц необходимо добывать и производить балласта 4,5 тыс. м^3 песчаного, 8 тыс. м^3 песчано-гравийного и 4 тыс. м^3 щебеночного.

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЭТОЙ ЖЕ ЗАДАЧИ В ПАКЕТЕ MATHCAD

Решение

$$f(x1,x2,x3) := \begin{pmatrix} 68 \\ 70 \\ 75 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{pmatrix}$$

Определяем целевую функцию через скалярное произведение двух векторов (суммарная прибыль)

$x1 := 1 \qquad x2 := 1 \qquad x3 := 1$

Задаем начальные приближения - "наугад", но с учетом ограничений задачи (эти начальные приближения удовлетворяют всем ограничениям)

Given

Начало блока решения Mathcad

$$14 \cdot x1 + 18 \cdot x2 + 23 \cdot x3 \le 420$$

$$8 \cdot x1 + 5 \cdot x2 + 6 \cdot x3 \le 100$$

Ограничения задачи

$$32 \cdot x1 + 45 \cdot x2 + 54 \cdot x3 \le 720$$

$$x2 \le 8 \qquad x3 \le 5$$

$$x1 \ge 0 \qquad x2 \ge 0 \qquad x3 \ge 0$$

Физические ограничения

$$\mathrm{Maximize}(f, x1, x2, x3) = \begin{pmatrix} 4.5 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Полученное решение
(конец блока решения Mathcad)

Аргументами функции Minimize являются:
первый аргумент - имя оптимизируемой функции (f);
остальные аргументы (x1, x2, x3) - соответствуют аргументам оптимизируемой функции

$$X := \begin{pmatrix} 4.5 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Задаем вектор решений

$ORIGIN = 0$

$X_0 = 4.5$ x1

$X_1 = 8$ x2

$X_2 = 4$ x3

$f(X_0, X_1, X_2) = 1166$

Находим максимальную прибыль

$X_1 = 8$ **<= 8**

$X_2 = 4$ **<= 5**

Убеждаемся, что ограничения задачи выполняются

$14 \cdot X_0 + 18 \cdot X_1 + 23 \cdot X_2 = 299$ **<= 420**

$TOL = 1 \times 10^{-3}$

$8 \cdot X_0 + 5 \cdot X_1 + 6 \cdot X_2 = 100$ **<= 100**

$32 \cdot X_0 + 45 \cdot X_1 + 54 \cdot X_2 = 720$ **<= 720**

3. Основы теории двойственности ЗЛП

Двойственность – фундаментальное понятие, на основе которого в линейном программировании получены важные теоретические результаты в области анализа линейных моделей, а также разработаны эффективные вычислительные процедуры.

Установлено, что с каждой задачей линейного программирования связана некоторая другая задача, которая строится по вполне определенным правилам, причем связь эта настолько тесная, что решая одну из этих задач, можно автоматически получить решение другой задачи или убедиться в неразрешимости последней. Более того, если одна из задач имеет определенную экономическую интерпретацию, то другая задача также имеет вполне определенный содержательный смысл.

МОДЕЛИ ДВОЙСТВЕННЫХ ЗАДАЧ В ЛИНЕЙНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

Без потери общности возьмем в качестве исходной задачи задачу линейного программирования в канонической форме (эту задачу далее будем называть также прямой):

$$\begin{aligned}
&c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_jx_j + \ldots + c_nx_n \rightarrow max \\
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = a_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = a_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = a_i \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n = a_m \\
&x_j \geq 0, \ (j = \overline{1, n})
\end{aligned} \qquad (1.60)$$

или в матрично-векторной форме:

$$\begin{cases} < c, x > \rightarrow \max \\ AX = A_0 \\ x \geq 0. \end{cases} \qquad (1.61)$$

Задачей, <u>*двойственной*</u> к (1.60), назовем задачу:

$$a_1y_1 + a_2y_2 + \ldots + a_iy_i + \ldots + a_my_m \to min$$

$$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{i1}y_i + \ldots + a_{m1}y_m \geq c_1$$

$$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{i2}y_i + \ldots + a_{m2}y_m \geq c_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (1.62)$$

$$a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \ldots + a_{ij}y_i + \ldots + a_{mj}y_m \geq c_j$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{in}y_i + \ldots + a_{mn}y_m \geq c_n$$

y_i – не ограничены в знаке $(i=1, 2, \ldots, m)$

или в матрично-векторной форме:

$$\begin{cases} < A_0^T, y > \to \min \\ A^T Y \geq C, \end{cases} \qquad (1.63)$$

$y=(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ – вектор-строка переменных двойственной задачи;
$Y=(y_1, y_2, \ldots, y_m)^T$ – вектор-столбец переменных двойственной задачи;
A^T – транспонированная матрица коэффициентов левой части системы ограничений прямой задачи (1.60);
$C=(c_1, c_2, \ldots, c_m)^T$ – вектор-столбец, составленный из коэффициентов целевой функции прямой задачи (1.60).

Задачи (1.60) и (1.62) – взаимно-двойственные в том смысле, что, приняв в качестве прямой задачу (1.62), можно перейти к двойственной задаче, которая с точностью до обозначения переменных будет иметь вид задачи (1.60).

ПРИМЕР

Дана задача ЛП в канонической форме:

$$
\begin{array}{rcrcrcrcl}
3x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & \to & \max \\
2x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & = & 10 \\
-3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & = & 8 \\
4x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & & & = & 4
\end{array}
$$

$$x_j \ge 0,\ \ j = \overline{1,4}.$$

Двойственная к этой задаче задача имеет вид:

$$
\begin{aligned}
&10y_1 + 8y_2 + 4y_3 \to \min \\
&2y_1 - 3y_2 + 4y_3 \ge 3 \\
&-y_1 + 2y_2 - y_3 \ge -1 \\
&4y_1 + y_2 - 2y_3 \ge 2 \\
&y_1 - 2y_2 \ge 1
\end{aligned}
$$

y_1, y_2 – не ограничены в знаке.

В самом общем случае, когда прямая задача имеет смешанную систему ограничений, содержащую уравнения, нестрогие неравенства различной направленности и к переменным предъявлены различные требования (неограниченность в знаке, неотрицательность, неположительность), двойственная задача может быть построена непосредственно по прямой задаче. При этом можно не проводить трудоемких преобразований, связанных с приданием исходной задаче канонической формы, а использовать следующие правила, сведенные в таблицы.

Прямая задача на максимум целевой функции

Прямая задача	Двойственная задача
Целевая функция: $<c,x> \to \max$	Правая часть системы ограничений: C
Правая часть системы ограничений: A_0	Целевая функция: $< A_0^T, y > \to \min$
i -е ограничение: "="	i-я переменная: y_i не ограничена в знаке
i-е ограничение: " $\le$ "	i -я переменная: $y_i \ge 0$
i -е ограничение: " $\ge$ "	i -я переменная: $y_i \le 0$
j-я переменная: x_j не ограничена в знаке	j -е ограничение: " = "
j -я переменная: $x_j \ge 0$	j -е ограничение: " $\ge$ "
j -я переменная: $x_j \le 0$	j -е ограничение: " $\le$ "

Прямая задача на минимум целевой функции

Прямая задача	Двойственная задача
Целевая функция: $<c,x> \rightarrow \min$	Правая часть системы ограничений: C
Правая часть системы ограничений: A_0	Целевая функция: $< A_0^T, y > \rightarrow \max$
i -е ограничение: " = "	i -я переменная: y_i не ограничена в знаке
i -е ограничение: " $\leq$ "	i-я переменная: $y_i \leq 0$
i -е ограничение: " $\geq$ "	i -я переменная: $y_i \geq 0$
j -я переменная: x_j не ограничена в знаке	j -е ограничение: " = "
j -я переменная: $x_j \geq 0$	j -е ограничение: " $\leq$ "
j -я переменная: $x_j \leq 0$	j -е ограничение: " $\geq$ "

ПОЛУЧЕНИЕ РЕШЕНИЯ ДВОЙСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ РЕШЕНИЯ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ

Первая теорема двойственности:

Если существует единственное решение исходной (прямой) задачи, то существует и единственное решение двойственной задачи, причем значения целевых функций на оптимальных решениях совпадают:

$$\max F = \min F_Д.$$

Значение первой теоремы двойственности состоит, прежде всего, в том, что решая одну из задач, можно получить решение другой задачи или убедиться в ее неразрешимости. Это обстоятельство иногда позволяет существенно облегчить решение задачи, так как предоставляется возможность выбора между прямой и двойственной задачей в пользу наименее трудоемкой.

При построении двойственной задачи используются следующие ***правила***:

- **каждому ограничению исходной задачи соответствует переменная двойственной задачи;**

- **каждой переменной исходной задачи соответствует ограничение двойственной, причем коэффициентами при неизвестных в i-м ограничении служат коэффициенты при x_i в ограничениях исходной задачи;**

- **коэффициентами при неизвестных в ЦФ двойственной задачи являются свободные члены (правые части) в системе ограничений исходной задачи, а правыми частями в системе ограничений двойственной задачи – коэффициенты при неизвестных в ЦФ исходной, и если исходная задача формулируется для нахождения максимума, то двойственная - для нахождения минимума (и наоборот).**

4. Примеры построения двойственных задач

<u>Пример 1</u>. Исходная задача – задача о раскрое материала (рассматривали ранее)

Из листового материала определенной формы необходимо вырезать заготовки двух типов: А – 180 штук, В – 900 штук. Варианты раскроя одного листа (4 варианта) и отходы по каждому варианту раскроя определяются таблицей:

Варианты / Заготовки	Варианты раскроя				План
	x_1	x_2	x_3	x_4	
А	4	3	1	0	180
В	0	3	9	12	900
Отходы	12	5	3	4	

Требуется найти количества листов (x_i), раскроенных по каждому из вариантов раскроя ($i=1,2,3,4$), обеспечивающих выполнение требований плана по выпуску заготовок и суммарный минимум отходов.

Математическая модель исходной (прямой) задачи:

$$z = 12x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 \rightarrow min$$

$$4x_1 + 3x_2 + 1x_3 + 0x_4 \geq 180$$

$$0x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 12x_4 \geq 900$$

$$x_i \geq 0 \text{ (i=1,2,3,4)}$$

Математическая модель двойственной задачи:

$$f = 180y_1 + 900y_2 \rightarrow max$$

$$4y_1 + 0y_2 \leq 12$$

$$3y_1 + 3y_2 \leq 5$$

$$1y_1 + 9y_2 \leq 3$$

$$0y_1 + 12y_2 \leq 4$$

$$y_i \geq 0 \text{ (i=1,2)}$$

Видно, что полученная двойственная задача гораздо проще исходной. Например, двойственная задача включает всего две неизвестных и ее решение можно получить графическим методом. Можно показать, что это решение: $y_1 = 3/2$, $y_2 = 1/6$. Тогда максимальное значение целевой функции двойственной задачи:

$$f = 180 \cdot \frac{3}{2} + 900 \cdot \frac{1}{6} = 420,$$

что совпадает с ранее найденным минимальным значением целевой функции прямой задачи. Имеются формулы перехода от решения двойственной задачи (в примере: $y_1 = 3/2$, $y_2 = 1/6$), к решению прямой задачи (значениям x_i), не решая последнюю.

Кроме того, при использовании надстройки «Поиск решения» в пакете MS Excel:

если решить исходную задачу с помощью этого средства и получить отчет по устойчивости, то значения в графе ***Лагранжа множитель (Теневая цена)*** отчета по устойчивости есть *оптимальные значения двойственных переменных*:

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. градиент
B7	Количество листов Варианты раскроя	0	6
C7	Количество листов	30	0
D7	Количество листов	90	0
E7	Количество листов	0	1,99999762

Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Лагранжа Множитель
F4	A Факт	180	1,5
F5	B Факт	900	0,16666667

Имеются формулы перехода от решения двойственной задачи (в примере: $y_1 = 3/2$, $y_2 = 1/6$), к решению прямой задачи (значениям x_i), не решая последнюю.

<u>Пример 2</u>. Исходная задача – задача о планировании производства продукции

Для производства продукции n типов требуются ресурсы m видов. Нормы расхода ресурсов на производство единицы продукции каждого типа заданы матрицей $(a_{ij})_{m \times n}$, где a_{ij} – количество ресурса i-го вида, необходимое для производства единицы продукции j-го типа. Известно количество ресурсов b_i (где $i = \overline{1, m}$) каждого вида, которое имеется в наличии у предприятия. Известны также величины прибыли C_j (где $j = \overline{1, n}$), которую получит предприятие при реализации единицы продукции j-го типа. Требуется найти оптимальный план производства продукции, т. е. количество продукции каждого типа, которое нужно произвести, чтобы получить наибольшую прибыль. Условие задачи можно представить в виде табл. 2.3.

Пример 2. Исходная задача – задача о планировании производства продукции

Таблица 2.3. **Исходные данные к задаче планирования производства продукции**

Ресурсы	Продукция				Наличие ресурсов
	тип 1	тип 2	…	тип n	
Ресурс 1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	b_1
Ресурс 2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	b_2
…	…	…	…	…	…
Ресурс m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	b_m
Прибыль	C_1	C_2	…	C_n	

Обозначим через x_j – количество продукции j-го типа, которое планируется выпустить ($j = \overline{1, n}$). Тогда математическая модель задачи будет выглядеть следующим образом:

$$F = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j \to max, \tag{2.7}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i = \overline{1, m}), \tag{2.8}$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1, n}). \tag{2.9}$$

Целевая функция (2.7) этой задачи представляет собой общую прибыль от производства всей продукции. Ограничения (2.8) выражают условие того, что потребление ресурса i-го вида не должно превышать запаса этого ресурса. Условия неотрицательности переменных (2.9) вытекают из смысла переменной x_j: количество продукции не может быть отрицательным.

Таким образом, модель задачи (2.7) – (2.9) может быть записана в следующей канонической форме:

$$F = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j \to max,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i = b_i \quad (i = \overline{1, m}), \tag{2.10}$$

$$y_i \geq 0, \quad (i = \overline{1, m}),$$

$$x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1, n}).$$

Дополнительные переменные y_i представляют собой *остатки ресурсов каждого вида.* Если в оптимальном решении какой-либо ресурс будет использован полностью, то ограничение исходной задачи (2.8) будет выполнено в виде равенства $y_i = 0$. Такое ограничение в отчетах Excel называется *связанным*. Ресурс, который использован полностью, считается *дефицитным*.

Двойственная задача к рассматриваемой задаче планирования производства продукции:

Исходная задача	Двойственная задача	
$F = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j \to max$	$F_Д = \sum_{i=1}^{m} b_i z_i \to min$	(2.11)
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \ (i = \overline{1, m})$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} z_i \ge C_j \quad (j = \overline{1, n})$	(2.12)
$x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1, n})$	$z_i \ge 0 \quad (i = \overline{1, m})$	(2.13)

Рассмотрим *экономический смысл двойственной задачи*. Допустим, что у предприятия есть возможность реализации всех ресурсов некоторой организации вместо того, чтобы организовывать свое производство. Необходимо установить прикидочные цены на ресурсы. Пусть z_i – это цена единицы ресурса i-го вида (где $i = \overline{1, m}$). Эти цены должны быть установлены исходя из несовпадающих интересов предприятия и покупающей организации.

Общую стоимость ресурсов ($F_Д$) покупающая организация стремится уменьшить. Это можно выразить следующей формулой:

$$F_Д = b_1 z_1 + b_2 z_2 + \ldots + b_m z_m \rightarrow min,$$

где $b_1, b_2, \ldots, b_m$ – соответственно, количество ресурсов 1, 2, …, m;
$z_1, z_2, \ldots, z_m$ – соответственно, цена ресурсов 1, 2, …, m;
$b_1 z_1, b_2 z_2, \ldots, b_m z_m$ – соответственно, стоимость ресурсов 1, 2, …, m.

Предприятие согласно продать ресурсы только по таким ценам, при которых оно получит за них выручку, не меньшую той суммы, которую могло бы получить, организовав собственное производство. Таким образом, предприятие откажется от выпуска изделий j-го типа, если стоимость всех ресурсов, которые идут на производство одного изделия j-го типа, будет больше или равна прибыли за одну единицу изделия j-го типа. Это можно представить в виде следующего неравенства:

$$a_{1j} z_1 + a_{2j} z_2 + \ldots + a_{mj} z_m \geq C_j, \; (j = \overline{1, n}),$$

где $a_{1j} z_1, a_{2j} z_2, \ldots, a_{mj} z_m$ – стоимость ресурсов, которые необходимы для производства единицы изделия j-го типа;
C_j – прибыль на одно издение j-го типа.

По смыслу цена неотрицательна, поэтому в двойственную задачу включаются ограничения неотрицательности.

В отчетах Excel, получаемых с помощью надстройки *Поиск решения*, оптимальное значение двойственной переменной z_i^* называется *теневой ценой*. Теневая цена есть оценка значимости ресурса, вытекающая из конкретных условий задачи, а не реальная цена на рынке.

Согласно первой теореме двойственности:

$$max\ F = min\ F_Д.$$

Это означает, что предприятию безразлично, производить ли продукцию по оптимальному плану X^* и получить максимальную прибыль, либо продать ресурсы по оптимальным ценам Z^* и получить такую же сумму. Для всех других (неоптимальных) планов X и Z прибыль от выпуска продукции всегда меньше внутренней стоимости затраченных ресурсов: $F < F_Д$, а величина $F_Д - F$ характеризует производственные потери.

Для рассматриваемой задачи можно показать, что имеется следующее следствие первой теоремы двойственности -

Следствие (теорема об оценках). Двойственная оценка z_i^* (теневая цена) показывает, как изменится целевая функция исходной задачи при изменении ресурса b_i на единицу:

$$\Delta F = \Delta b_i z_i^*.$$

Доказательство

Пусть имеются в наличии ресурсы $b_1, b_2, \ldots, b_m$. Обозначим величиной F_1 оптимальное значение целевой функции исходной задачи при таком наличии ресурсов. Тогда согласно первой теореме двойственности

$$F_1 = maxF = minF_Д = b_1 z_1^* + b_2 z_2^* + \ldots + b_m z_m^*.$$

Пусть количество второго ресурса получило приращение $b_2 = b_2 + \Delta b_2$. Если при этом оптимальное решение двойственной задачи не изменится, то значение целевой функции исходной задачи (F_2) будет выражено следующим образом:

$$F_2 = maxF = minF_Д = b_1 z_1^* + (b_2 + \Delta b_2) z_2^* + \ldots + b_m z_m^* =$$
$$= b_1 z_1^* + b_2 z_2^* + \ldots + b_m z_m^* + \Delta b_2 z_2^* = F_1 + \Delta b_2 z_2^*.$$

Следовательно, целевая функция получила приращение

$$\Delta F = F_2 - F_1 = \Delta b_2 z_2^*.$$

Таким образом, по теневым ценам можно судить о том, насколько целесообразно изыскивать резервы для увеличения количества i-го ресурса. Если соответствующая теневая цена равна нулю, то увеличение количества этого ресурса никак не повлияет на рост прибыли. С другой стороны, чем больше теневая цена ресурса, тем больше возрастет прибыль при увеличении количества этого ресурса на одну единицу. Поэтому тот ресурс, который имеет большую теневую цену, считается *более дефицитным*.

Однако эта теорема справедлива только в том случае, если при изменении количества ресурса b_i значения переменных z_i^* в оптимальном плане двойственной задачи остаются неизменными. Это выполняется в пределах устойчивости оптимального решения, т. е., когда структура решения не изменяется. Пределы устойчивости при изменении правых частей ограничений указаны в таблице «Ограничения»

(при использовании надстройки «Поиск решения» в пакете MS Excel).

Удобно использовать надстройку «Поиск решения» в пакете MS Excel: если решить исходную задачу с помощью этого средства и получить *отчет по устойчивости*, то значения в графе ***Теневая цена*** отчета по устойчивости есть *оптимальные значения двойственных переменных*.