Дифференциальные уравнения

Основные определения

Определение: Дифференциальным уравнением (n)-ого порядка называется соотношение, связывающее независимую переменную x, функцию y, и её производные до (n)-ого порядка включительно.

Определение: Наивысший порядок производной, входящий в уравнение называется порядком уравнения.

Определение: Всякая функция $y=\varphi(x)$, которая, будучи подставленная в уравнение (1), обращает его в тождество, называется решением этого уравнения.

Определение: Решить уравнение – значит, найти все его решения в заданной области.

Определение: Общим решением дифференциального уравнения называется такое его решение $y=\varphi(x,C_1,C_2,...,C_n)$, которое содержит столько независимых постоянных, каков порядок этого уравнения.

Если общее решение задано в неявном виде $F(x,y,C_1,C_2,...,C_n)=0$, то оно называется общим интегралом дифференциального уравнения.

Определение: Всякое решение дифференциального уравнения, которое получается из общего решения, если производным постоянным, в него входящим придать определенные значения, называется частным решением этого дифференциального уравнения.

Дифференциальные уравнения первого порядка

Определение: Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение $F(x; y; y') = 0$.
В простом случае y’=f(x,y).

Определение: Общим решением дифференциального уравнения первого порядка y'=f(x,y) в области D, называется функция $y = \varphi(x, C_0)$, обладающая следующими свойствами:

1) Она является решением данного уравнения при любых значениях производной постоянной C, принадлежащих некоторому множеству.

2) Для любого начального условия y(x_0)= y_0 такого, что $y = \varphi(x, C)$,существует единственное значение C=C_0 , при котором решение $(x_0, y_0) \in D$ удовлетворяет заданному начальному условию.

Определение: Всякое решение $y=\varphi(x,C_0)$, получающееся из общего решения $y=\varphi(x,C)$, при конкретном С=C_0 называется частным решением.

Определение задачи Коши: Задача, в которой требуется найти частное решение уравнения , удовлетворяющее начальному условию у(x_0)= y_0, называется задачей Коши.

Определение: Общее решение $y=\varphi(x,C)$, построенное на плоскости графика, называется интегральной кривой.

Геометрически - общее решение представляет собой семейство интегральных кривых $y = \varphi(x, C)$, С - const(любая).
Однако встречаются дифференциальные уравнения, имеющие также решения, которые не получаются из общего ни при каких значениях С (в том числе и при $C = \pm\infty$). Такие решения называются особыми. Графиком особого решения является интегральная кривая, которая в каждой своей точке имеет общую касательную с одной из интегральных кривых, определяемых общим решением. Такая кривая называется огибающей семейства интегральных кривых.

Определение: Процесс нахождения решений дифференциального уравнения называется интегрированием дифференциального уравнения.

Не существует общего метода решения дифференциального уравнения первого порядка.

Уравнения первого порядка с разделяющимися переменными

Определение: Дано дифференциальное уравнение f(x,y, y’)=0. Пусть его можно переписать в виде $y' = \frac{dy}{dx}$, и т.к.

$y' = f(x, y)$, то уравнение примет вид:

$$dy = f(x, y)dx.$$

Переменные x и y равноправны.

Определение: Дифференциальное уравнение $M(x,y)dy+N(x,y)dx=0$ называется дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными, если :

$$M(x,y)=X(x)\cdot Y(y)$$

$$N(x,y)=X_1(x)\cdot Y_1(y)$$

Метод решения:

$$X(x)\cdot Y(y)dy + X_1(x)\cdot Y_1(y)dx = 0$$

| :X(x)≠0

| :Y(y)≠0

$$\frac{Y(y)}{Y_1(y)}dy + \frac{X_1(x)}{X(x)}dx = 0$$

Интегрируем обе части по x: y=y(x)

$$\int \frac{Y(y)}{Y_1(y)}dy + \int \frac{X_1(x)}{X(x)}dx = 0$$ - общий

интеграл уравнения,

выраженный в новой форме.

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.

Метод Бернулли.

Определение: Дифференциальные уравнения первого порядка вида $a(x)y' + b(x)y + c(x) = 0$, где a,b,c – заданные функции, называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка.

Определение: Если $a(x) \neq 0$, то уравнение называется приведенным линейным уравнением первого порядка.

$$y' + p(x) \cdot y = f(x)$$

Метод решения:

Определение: Если $f(x) = 0$,то уравнение y'+p(x)y=0 называется однородным и является относительно y' и y уравнением с разделяющимися переменными.

Определение: Если $f(x) \neq 0$, то линейное уравнение называется неоднородным.

y'+p(x)y=f(x)

Решение методом Бернулли y ищем в виде произведения функции $\upsilon = \upsilon(x)$ и $u = u(x)$, т.е. $y = u \cdot \upsilon$

$$u'\upsilon + u \cdot \upsilon' + p(x) \cdot u \cdot \upsilon = f(x)$$ …,в уравнение

$$y' = u'\upsilon + u \cdot \upsilon'$$

$$u'\upsilon + u \cdot (\upsilon' + p(x) \cdot \upsilon) = f(x)$$

Найдем одну функцию υ такую, чтобы

$$\upsilon' + p(x) \cdot \upsilon = 0$$;

υ – любая, (≠0),так как только

$u\upsilon$ должно удовлетворять уравнению.

Уравнение с разделяющимися переменными:

$$\upsilon' + p(x)\cdot\upsilon = 0$$

$$\frac{dv}{dx} + p(x)\cdot\upsilon = 0 \qquad \frac{dv}{v} + p(x)\cdot dx = 0$$

$\ln|\upsilon| + \int p(x)dx = 0$ (так как одна из функций $\neq 0$);

$$\ln|\upsilon| = -\int p(x)dx$$

Уравнение с разделяющимися переменными.

$$\upsilon = e^{-\int p(x)dx}, \quad u'\upsilon = f(x), \quad \upsilon' e^{-\int p(x)dx} = f(x)$$

$$u = \int f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + C$$

Общее решение:

$$y = \left(\int f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + C\right) \cdot e^{-\int p(x)dx}$$

Особых решений нет.

Уравнение Бернулли

Определение: Дифференциальное уравнение первого порядка вида $y' + p(x)\cdot y = f(x)\cdot y^m$ называется уравнением Бернулли.

Метод решения: используем метод решения дифференциального уравнения первого порядка.

Варьируем произвольную постоянную.

Пусть $C = C(x)$. Найдем функцию $C(x)$ из условия, что $y = C(x)e^{-\int p(x)dx}$ является решением неоднородного дифференциального уравнения.

Метод вариации произвольной постоянной. Метод Лагранжа.

Дано: уравнение первого порядка вида y'+p(x)*y=f(x)

Алгоритм решения.

Рассмотрим соответствующее однородное уравнение $y' + p(x) \cdot y = 0$. Найдем его решение. Это уравнение с разделяющимися переменными.

$$\frac{dy}{dx} = -p(x)y, \qquad \frac{dy}{y} = -p(x)dx,$$

$$\ln|y| = -\int p(x)dx + \ln|c|,$$

$$\ln\left|\frac{y}{C}\right| = -\int p(x)dx, \qquad y = Ce^{-\int p(x)dx}$$

$$y' = C'(x)\cdot e^{-\int p(x)dx} + C(x)\cdot e^{-\int p(x)dx}\cdot(-p(x))\cdot C'(x)\cdot e^{-\int p(x)dx} -$$

$$C(x)\cdot e^{-\int p(x)dx}\cdot p(x) + p(x)\cdot C(x)\cdot e^{-\int p(x)dx} = f(x)$$

$$C' = \frac{dc}{dx}, \qquad C(x) = \int f(x)\cdot e^{-\int p(x)dx}dx + C$$

Общее решение:

$$y = (\int f(x)\cdot e^{-\int p(x)dx}dx + C)\cdot \quad y = C(x)e^{-\int p(x)dx}$$

Однородные дифференциальные уравнения

Определение: Функция f(x,y) называется однородной измерения M, если для любой

$$\lambda,\ f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x, y)$$

.

Определение: Уравнение вида $P((x, y)dy + Q(x, y)dx = 0$ называется однородным, если P и Q однородные функции одного измерения.

Теорема 1: Однородные дифференциальные уравнения первого порядка сводится к уравнению первого порядка с разделёнными переменными. С помощью подставим

где $U=\dfrac{y}{x}$, $\upsilon=\dfrac{x}{y}$, $U=U(x)$ ($\upsilon=\upsilon(x)$).

Теорема 2: Дифференциальное уравнение $y' = f(x,y)$ является однородным тогда и только тогда, когда $f(x,y)$ есть однородная функция нулевого измерения.

Теорема существования и единственности решения.

Особые решения.

Теорема Коши.

Если в дифференциальном уравнении $y' = f(x, y)$ функция $f(x, y)$ непрерывна в некоторой области D плоскости Oxy и имеет в этой области ограниченную частную производную $f_y'(x, y)$, то для любой точки в некотором интервале $x_0 - h \le x \le x_0 + h$ существует притом единственное решение этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию.

Геометрически это означает, что через каждую точку M области D проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения .

Определение: Точки области D, в котором нарушается единственность решения задачи Коши, называется особыми точками дифференциального уравнения.

Определение: Решение (интегральная кривая) уравнения $y' = f(x, y)$, в каждой точке которого нарушается единственность решения задачи Коши, называется особым решением (особой интегральной кривой) этого уравнения.

Особое решение не может быть получено из общего, ни при каких значениях C (включая $C = \pm\infty$).

Графиком особого решения является огибающая семейства интегральных кривых, она находится путем исключения, если это возможно, параметра C из системы уравнений.

$$\begin{cases} y=\varphi(x,C) \\ 0=\varphi_C^{'}(x,C) \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \varphi(x,y,C)=0 \\ \varphi_C^{'}(x,y,C)=0 \end{cases}$$

где

$y=\varphi(x,C)$ - общий интеграл

$\varphi(x,y,C)$ - общее решение дифференциального уравнения

Теорема существования и единственности решения задачи

Коши для дифференциальных уравнения высших порядков

Определение: $F(x, y, y', ..., y^{n}) = 0$.

Определение: Задачей Коши для дифференциальных уравнений: $F(x, y, y', ..., y^{n}) = 0$ называется задача отыскания решения y=y(x), удовлетворяющего заданным начальным ????? условиям $y(x_0)=y_0$, $y^{'}(x_0)=y_0^{'}$,…,$y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$.

Определение: Общим решением уравнения $F(x, y, y', ..., y^{n}) = 0$ называется такая функция $y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, которая при любых допустимых значениях параметров $C_1, C_2, ..., C_n$, является решением дифференциального уравнения и для любой задачи Коши с условиями $y(x_0)=x_0$, $y'(x_0)=y_0'$,…, $y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$ найдутся постоянные $C_1, C_2, ..., C_n$????? определяемые из системы уравнений.

$$y_0 = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$$

$$y_0' = \varphi'(x, C_1, C_2, ..., C_n)$$

$$y_0^{(n-1)} = \varphi^{(n-1)}(x, C_1, C_2, ..., C_n)$$

Теорема: Существования и решения задачи Коши: Если дифференциальное уравнение $y^{(n)} = f(x, y', ..., y^{(n-1)})$ таково, что функция $f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ в некоторой области D своих аргументов непрерывна и имеет непрерывные частные производные, $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, ..., \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$

то для любой точки $(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)})$ принадлежащий D существует такой интервал $x_0 - h \le x \le x_0 + h$, на котором существует и притом единственное решение этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию.