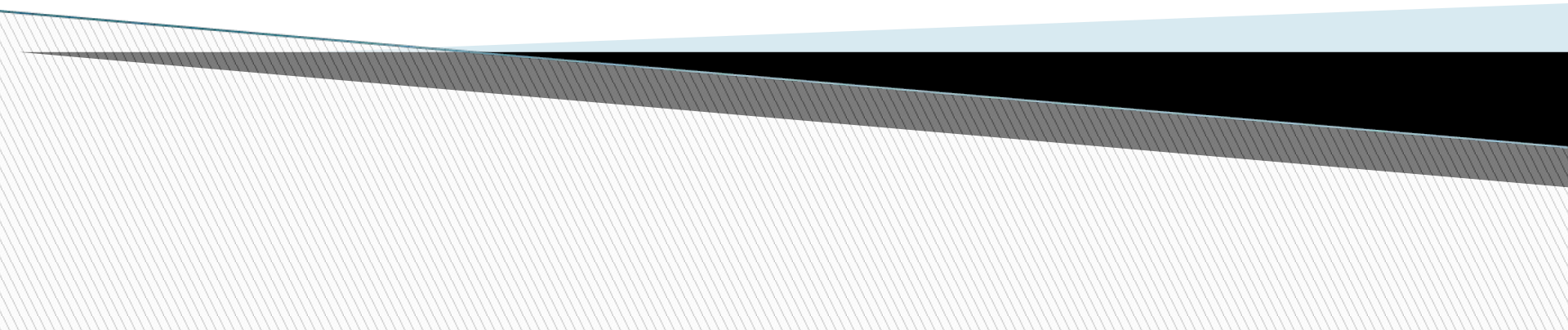


Лекция 6. Множества



Множества: определение и основные свойства

Множество (по Тьюрингу) – это объединение в одно общее объектов, хорошо различимых нашей интуицией или нашей мыслью.

Множество (по Кантору) – это совокупность объектов безразлично какой природы, неизвестно существующих ли, рассматриваемая как единое целое.

Множества: определение и основные свойства

Множество, которое не имеет ни одного элемента, называется пустым и обозначается \emptyset .

Единичное множество – множество, все элементы которого тождественны.

Множество M_1 называется подмножеством множества M тогда и только тогда, когда любой элемент множества M_1 принадлежит множеству M .

Множества называются равными, если они имеют одни и те же элементы.

Подмножество M_1 множества M называется собственным подмножеством множества M , если M_1 является его подмножеством, но при этом существует хотя бы один элемент, принадлежащий M , но не принадлежащий M_1 .

Множества: определение и основные свойства

Пусть A и B – два множества. Множество $M=A \cup B$ такое, что его каждый элемент принадлежит A или B (а возможно и A и B), называется суммой или объединением множеств A и B .

Пусть A и B – два множества. Множество $M=A \cap B$ такое, что его каждый элемент принадлежит и A и B одновременно, называется пересечением множеств A и B .

Пусть A и B – два множества. Множество $M=A \setminus B$ такое, что оно состоит из тех элементов множества A , которых нет во множестве B , называется разностью множеств A и B , или дополнением B до A .

Множества: определение и основные свойства

- Пусть A и B – два множества. Множество $M=A \times B$ такое, что оно образовано из всех пар (a, b) таких, что a принадлежит A и b принадлежит B , называется **декартовым произведением** множеств A и B .

Пусть $A = \{a, b\}$; $B = \{m, n\}$

Тогда $A \times B = \{(a, m), (a, n), (b, m), (b, n)\}$

- Пусть A – множество. Множество M , элементами которого являются подмножества множества A , включая само A и пустое множество, называется множеством всех подмножеств множества A или **булеаном** A и обозначается $P(A)$.

Пусть $A = \{a, b, c\}$

Тогда $M = P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

Множества: определение и основные свойства

- ▣ Отображением f множества A в множество B называется некоторое правило, по которому каждому элементу множества A ставят в соответствие элемент множества B .
- ▣ Множество всех отображений множества A в B обозначается как B^A (B в степени A).
- ▣ Пусть $A = \{a, b, c\}$; $B = \{m, n\}$
Тогда B^A это набор функций f_i

A	$f_1(A)$	$f_2(A)$	$f_3(A)$	$f_4(A)$	$f_5(A)$	$f_6(A)$	$f_7(A)$	$f_8(A)$
a	m	m	m	m	n	n	n	n
b	m	m	n	n	m	m	n	n
c	m	n	m	n	m	n	m	n

Равномощные множества и кардинальные числа

Мощность множества (по Кантору) – это та общая идея, которая остается у нас, когда мы, мысля об этом множестве, отвлекаемся как от всех свойств его элементов, так и от их порядка.

Мощность множества – это характеристика, которая объединяет данное множество с другими множествами, применение процедуры сравнения к которым дает основание предполагать, что каждый элемент одного множества имеет парный элемент из другого множества и наоборот.

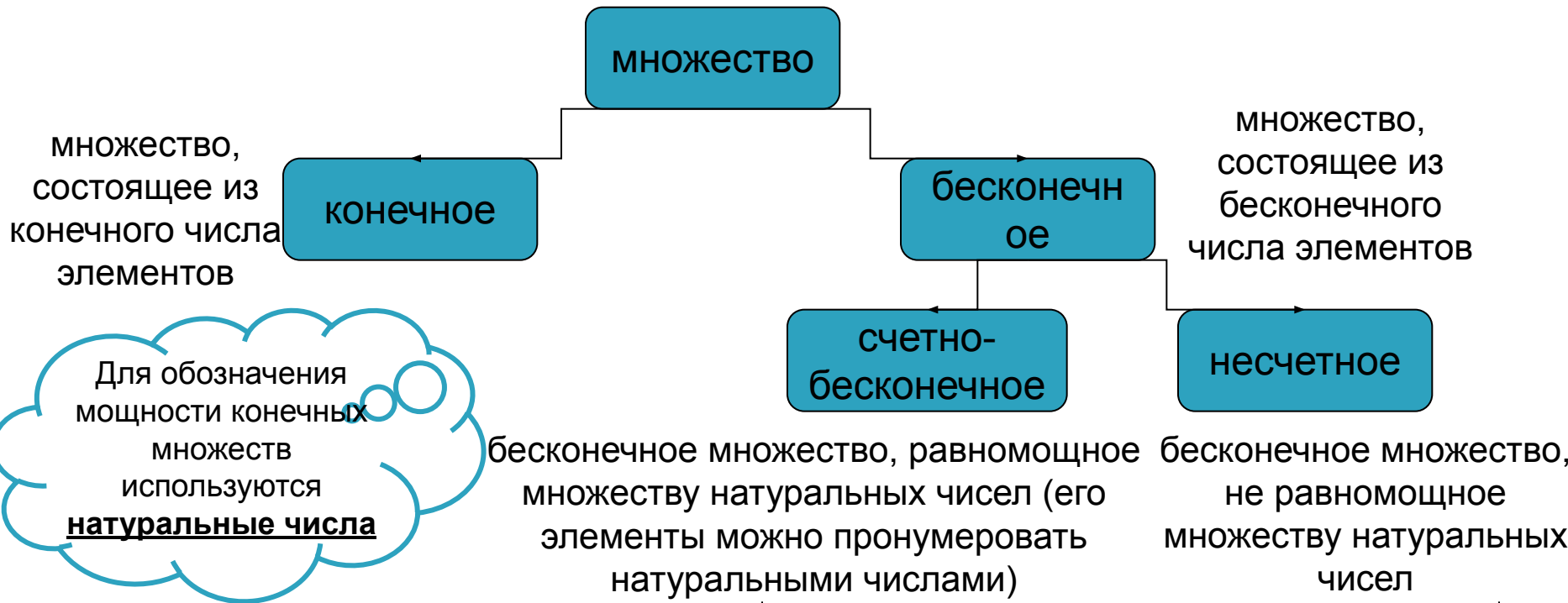
Кардинальное число

Далее мощность будем называть **кардинальным числом** множества.

Кардинальные числа некоторых множеств

- Мощность пустого множества равна 0: $|\emptyset|=0$.
- Мощность множества из одного элемента равна 1: $|\{a\}|=1$.
- Если множества равномощны ($A \sim B$), то их кардинальные числа равны: $|A|=|B|$.
- Мощность булеана множества A равна $2^{|A|}$: $|P(A)|=2^{|A|}$
- Мощность множества B^A всех отображений A в B равна $|B|^{|A|}$

Классификация множеств



Для обозначения мощности конечных множеств используются натуральные числа

Для обозначения мощности бесконечных множеств используются трансфинитные числа



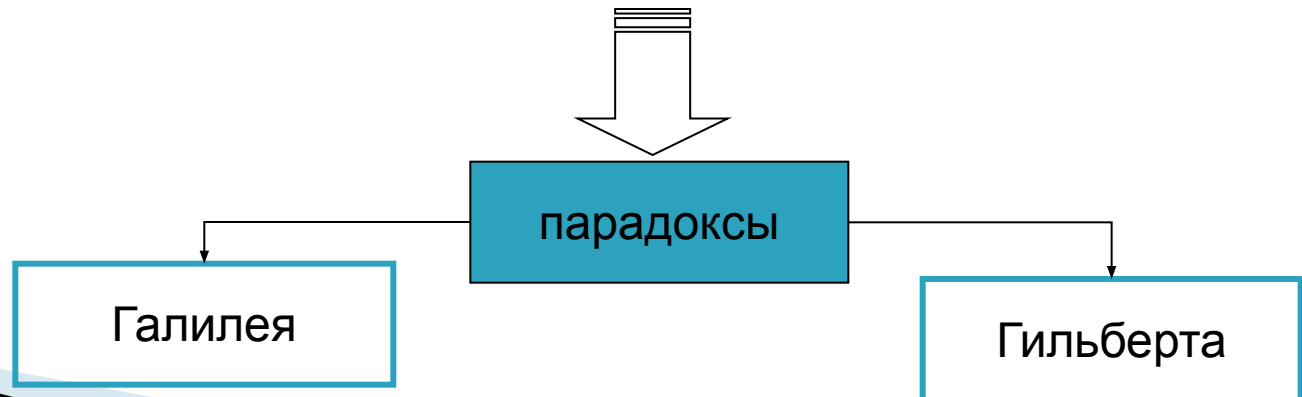
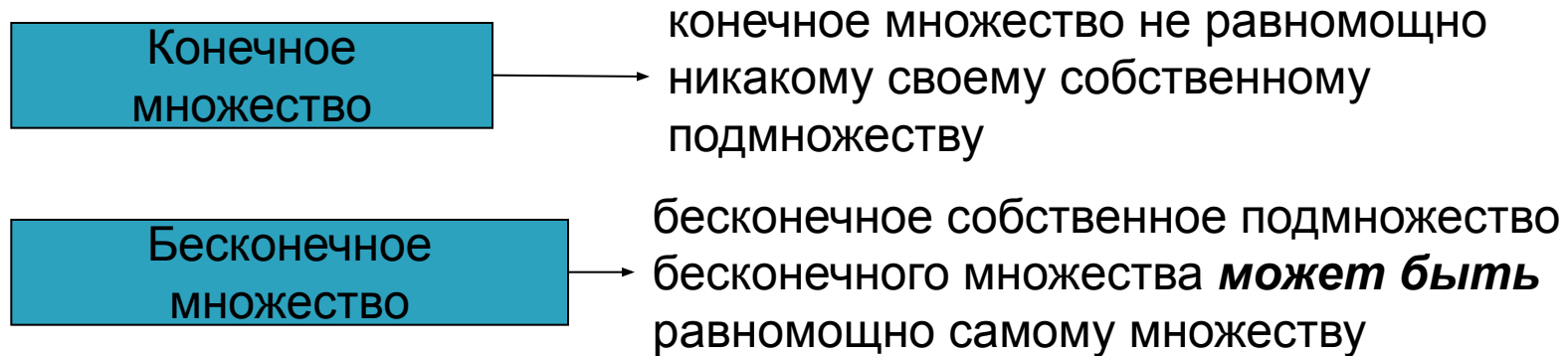
Алеф-нуль \aleph_0 – первое трансфинитное число. По определению – это мощность множества всех натуральных чисел. Это наименьшая бесконечная мощность

Свойства множеств

Множество $A = \{ 1, 2 \}$

Подмножества множества $A := \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\} \}$

Из них собственные подмножества множества $A := \{ \emptyset, \{1\}, \{2\} \}$

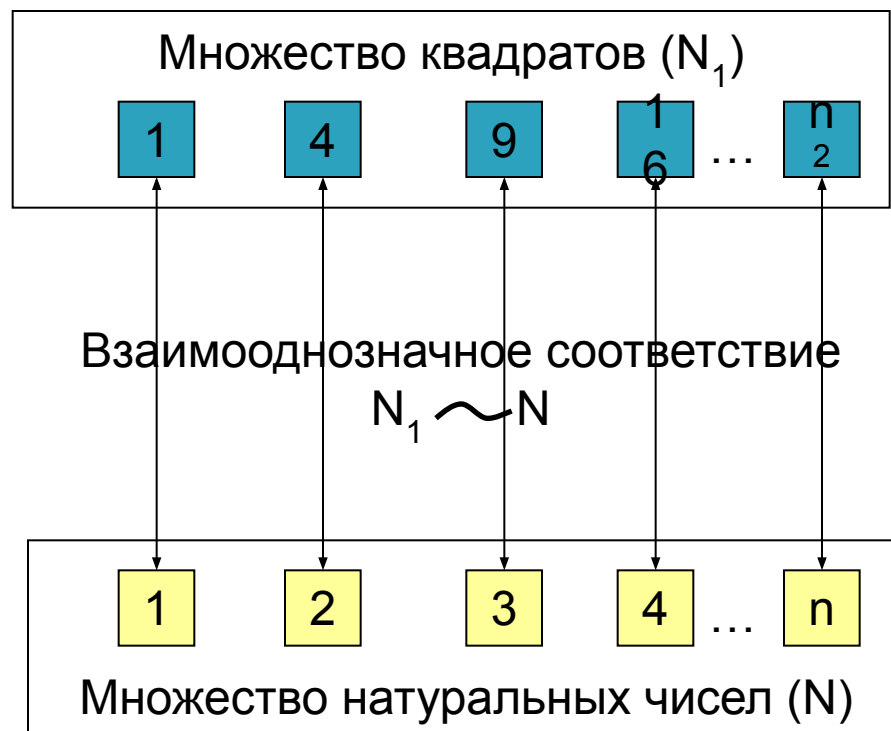


Парадокс Галилея



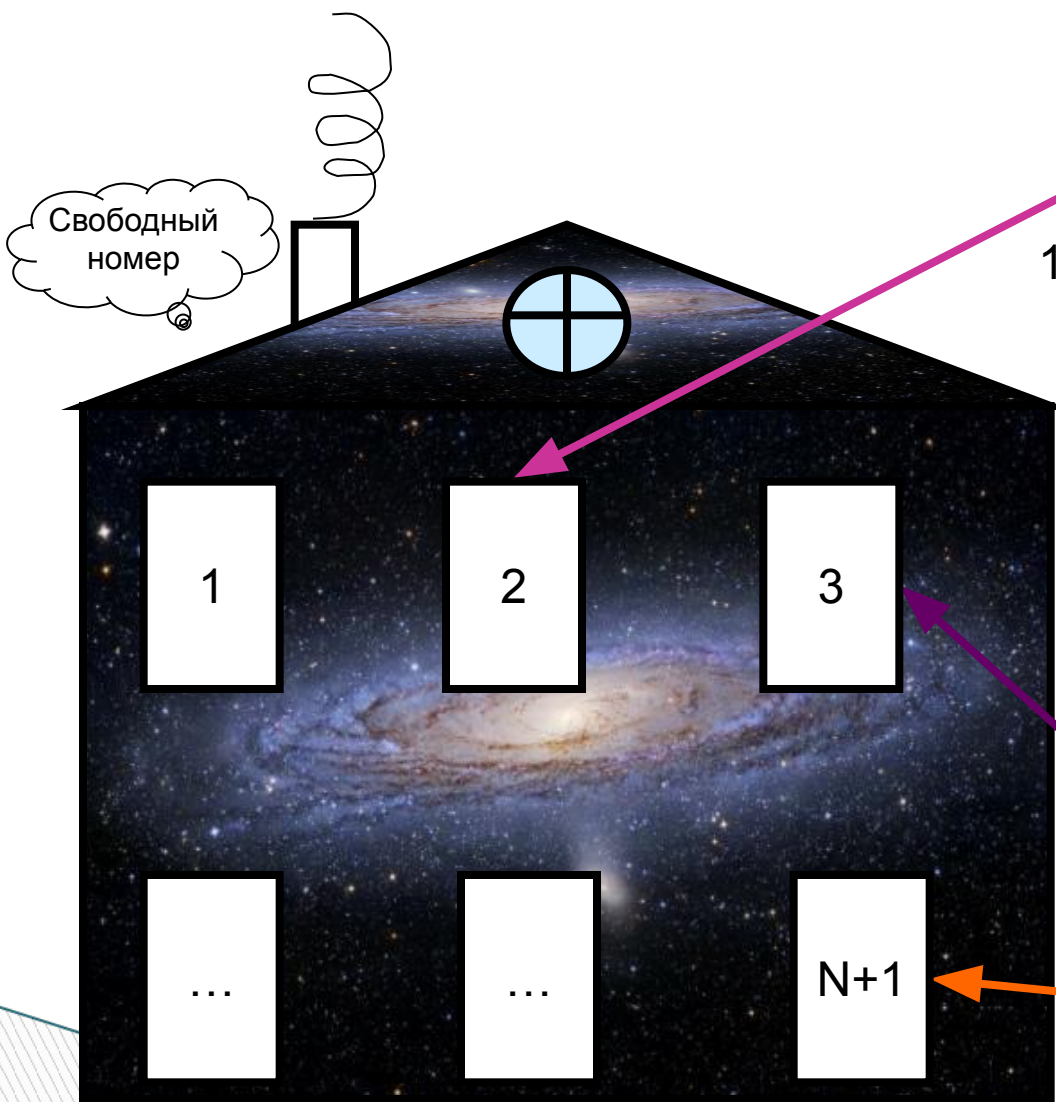
Хотя большинство натуральных чисел не является квадратами, всех натуральных чисел не больше, чем квадратов


(если сравнивать эти множества по мощности)



N_1 - собственное подмножество N : $N_1 \subset N$
при этом их мощности равны: $|N_1| = |N|$

Парадокс Гильберта



Если гостиница  бесконечным количеством номеров полностью заполнена, в неё можно поселить ещё посетителей, даже бесконечное число.



(В оригинальной версии под термином «бесконечное» имеется ввиду «счётно-бесконечное число» посетителей)