Ранг матрицы

Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ .... & .... & ..... & ..... \\ a_{m1} & a_{m2} & ..... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Минором к – го порядка **матрицы А называется** ***определитель к – го порядка*** **с элементами, стоящими** ***на пересечении любых к строк и к столбцов*****.**

$$(k \le \min\{m, n\})$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Рангом матрицы r(A) называется ***наибольший из порядков миноров*** данной матрицы, ***отличных от нуля***.

Элементарные преобразования матриц

Элементарные преобразования матриц

- Вычеркивание нулевой строки
- Прибавление к одной из строк другой строки, умноженной на любое число
- Перестановка двух строк

Теорема 1.

Любую матрицу с помощью элементарных преобразований можно привести к ступенчатому виду.

Теорема 2.

При элементарных преобразованиях ранг матрицы не меняется.

СЛЕДСТВИЕ:
Ранг ступенчатой матрицы равен <u>числу</u> (ненулевых) <u>строк</u>.

Пример

Найти ранг матрицы:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. ***Приведем матрицу к ступенчатому виду:***

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot \underline{(-2)} \\ \quad\downarrow \\ \leftarrow\oplus \end{array}$$

Решение.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot\,\underline{(-2)} \\ \quad\downarrow \\ \leftarrow\oplus \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 7 & 6 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Решение.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot\,\underline{(-2)} \\ \downarrow \\ \leftarrow\oplus \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 7 & 6 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \underline{\cdot}\,\underline{(-3)} \\ \downarrow \\ \\ \leftarrow\oplus \end{array}$$

Решение.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \cdot\,\underline{(-2)} \\ \downarrow \\ \leftarrow\oplus \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 7 & 6 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \underline{:}\,\underline{(-3)} \\ \downarrow \\ \leftarrow\oplus \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 7 & 6 \\ 0 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

Решение.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 7 & 6 \\ 0 & 7 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \cdot\underline{(-1)} \\ \oplus \end{array} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 7 & 6 \\ 0 & 7 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \cdot \underline{(-1)} \\ \downarrow \\ \leftarrow\oplus \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 7 & 6 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

ОТВЕТ: r(A)=2

Метод Гаусса

Метод ***последовательного исключения неизвестных*** – наиболее ***распространенный метод*** решения систем линейных уравнений.

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

С помощью элементарных преобразований приводим ее к равносильной системе ступенчатого вида:

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n = d_1 \\ \qquad\quad c_{22}x_2 + \ldots + c_{2n}x_n = d_2 \\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad c_{kr}x_r + \ldots + c_{kn}x_n = d_k \end{cases}$$

Возможен один из следующих случаев:

1) система не имеет решений (система несовместна);

2) система имеет единственное решение;

3) система имеет бесчисленное множество решений.

Теорема Кронекера-Капелли

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Обозначим

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots. & a_{2n} \\ \ldots. & \ldots. & \ldots.. & \ldots.. \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots.. & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \widetilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots. & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots. & a_{2n} & b_2 \\ \ldots. & \ldots. & \ldots.. & \ldots.. & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots.. & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Теорема Кронекера-Капелли:

Система линейных уравнений ***совместна*** тогда и только тогда, когда

$$r(A)=r(\tilde{A})$$

Пример:

Методом Гаусса решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 5 \\ x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$$

Решение. ***Запишем расширенную матрицу:***

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 5 \\ x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases} \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

Решение. ***Приведем расширенную матрицу к ступенчатому виду:***

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{r} \cdot \\ \underline{(-2)} \\ \downarrow \\ \leftarrow\oplus \end{array} \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

Решение.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot\underline{(1)} \\ \downarrow \\ \leftarrow\oplus \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Решение.

$$\begin{array}{c}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right) \end{array}\begin{array}{l} \\ \cdot\underline{(1)} \\ \downarrow \\ \leftarrow\oplus \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$\boxed{r(A)=r(\tilde{A})=3}$

Решение.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 3 \\ \quad - x_2 + 2x_3 = -1 \\ \quad\quad - x_3 = 0 \end{cases} \boxed{\Rightarrow x_3 = 0}$$

Решение.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2\cdot 0 = 3 \\ \quad -x_2 + 2\cdot 0 = -1 \end{cases} \quad \boxed{\Rightarrow x_2 = 1}$$

Решение. ***Найдем*** x_1:

$$x_1 + 2 \cdot 1 = 3 \Rightarrow \boxed{x_1 = 1}$$

Решение.

$x_1=1,\ x_2=1,\ x_3=0$ – единственное решение.

Окончание лекции