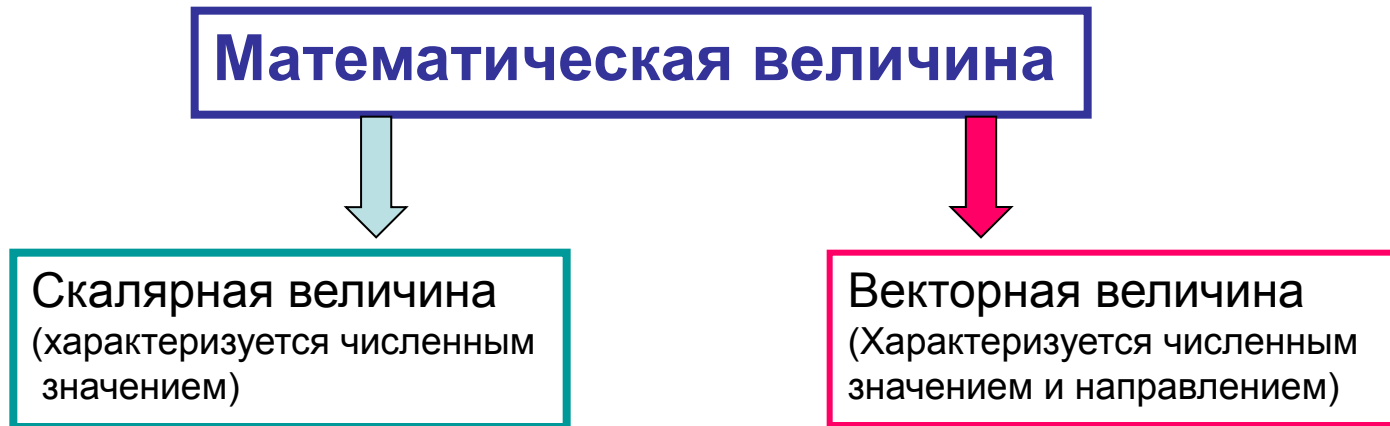


Векторная алгебра



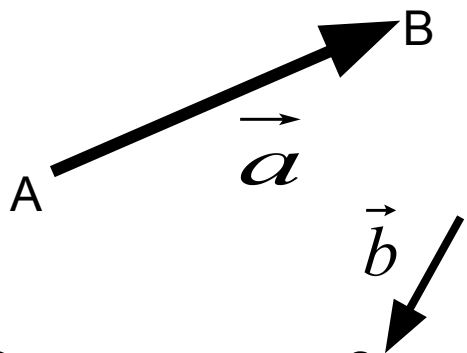
Основные понятия



ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

- **Определение 1.**

Вектором называется отрезок, имеющий определенную длину и направление.



Обозначения:

\vec{a} , \vec{b} , \overrightarrow{AB} , ...

- **Определение 2.**

Модулем вектора (длиной вектора) называется длина отрезка :

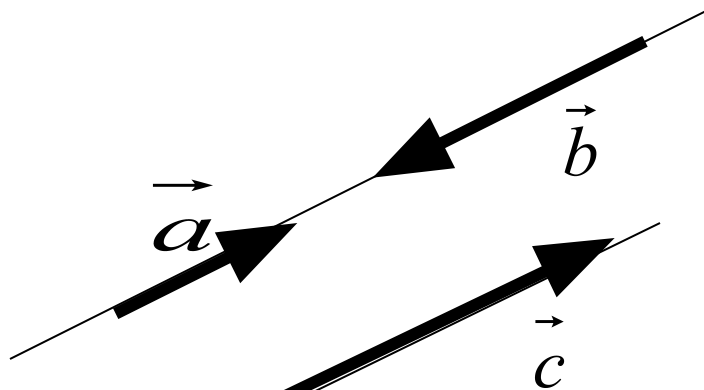
$$|\vec{a}| = |\overrightarrow{AB}|$$

Основные понятия

- $\vec{0}$ - вектор, у которого начало и конец совпадают. $|\vec{0}| = 0$

- **Определение 3.**

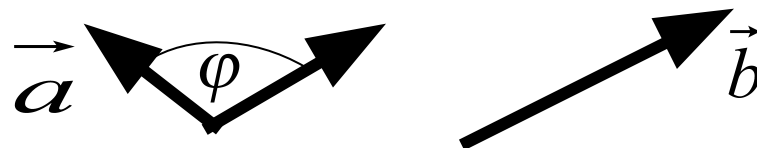
Коллинеарными называются векторы, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.



Обозначение: $\vec{b} \parallel \vec{a} \parallel \vec{c}$

- **Определение 4.**

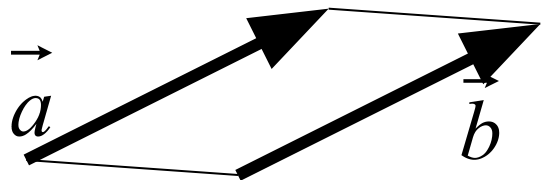
Углом φ между векторами называется наименьший угол, на который надо повернуть один из векторов, чтобы их направления совпали.



Основные понятия

- **Определение 5.**

Два вектора называются **равными**, если они коллинеарные, имеют одинаковую длину и одинаковое направление.



$$\vec{a} = \vec{b}$$

- **Следствие.**

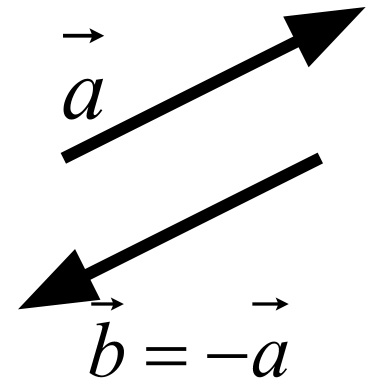
При параллельном переносе получаются равные векторы.

Основные понятия

- **Определение 6.**

Два вектора называются **противоположными**, если они коллинеарные, имеют одинаковую длину и противоположное направление.

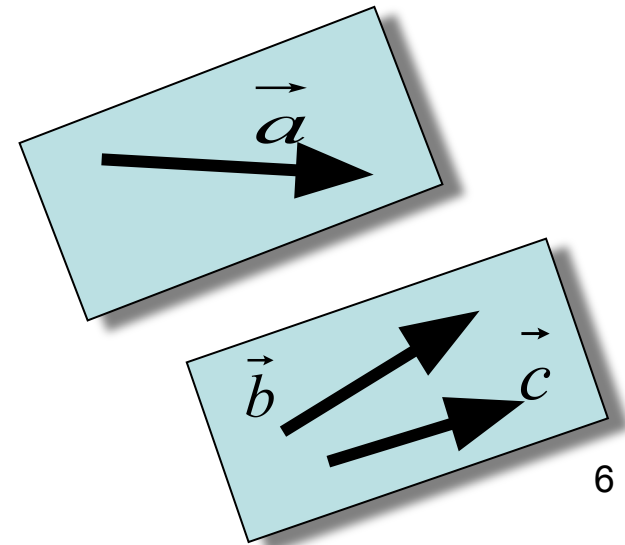
$$\vec{b} = -\vec{a}$$



- **Определение 7.**

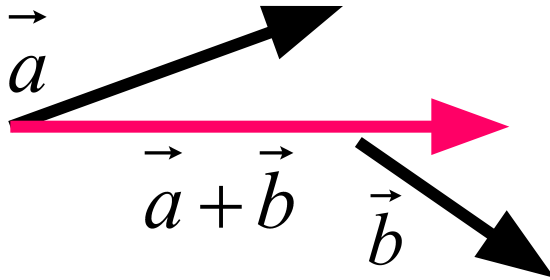
Компланарными называются векторы, если они лежат в одной плоскости или на параллельных плоскостях.

- **Замечание.** Два вектора всегда компланарны.



Операции с векторами

- **Сумма векторов.**

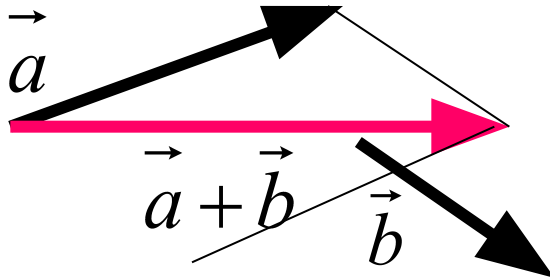


- **Определение 1 (правило треугольника).**

Пусть начало второго вектора совпадает с концом первого. Тогда вектор, соединяющий начало первого вектора с концом второго, называется **суммой** этих векторов.

Операции с векторами

- **Сумма векторов.**



- **Определение 2 (правило параллелограмма).**
Пусть начала первого и второго векторов совпадают.
Построим на этих векторах параллелограмм.
Тогда вектор, совпадающий с диагональю, проходящей
через общее начало, называется **суммой** этих векторов.

Операции с векторами

- **Разность векторов.**

- **Определение 1.**

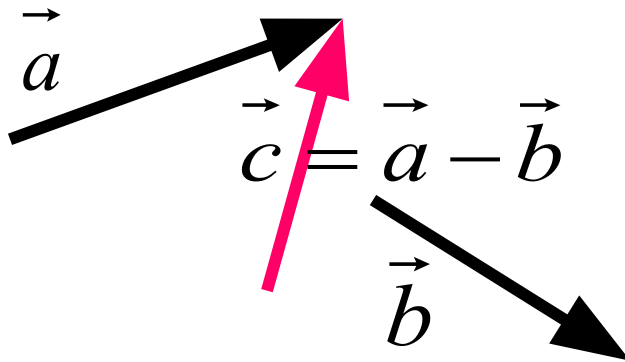
Разностью векторов $\vec{a} - \vec{b}$ называется такой вектор \vec{c} что сумма $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$

Определение 2.

Пусть начала первого и второго векторов совпадают.

Тогда **разностью** векторов называется вектор, соединяющий их концы

и направленный из конца вычитаемого в конец уменьшаемого вектора.



Операции с векторами

- **Произведение вектора на число.**

- **Определение.**

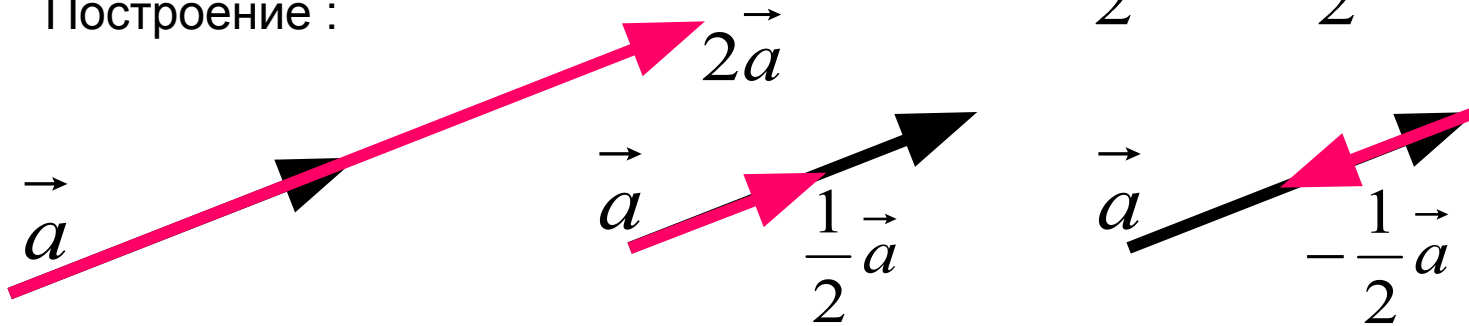
Произведением вектора \vec{a} на число λ называется вектор $\vec{a}\lambda = \lambda\vec{a}$, коллинеарный вектору \vec{a} ,

равный по модулю $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$,
направленный при $\lambda > 0$ в ту же сторону, что и \vec{a} ,
и в противоположную сторону, если $\lambda < 0$.

Операции с векторами

- **Пример.**

Задан вектор \vec{a} . Построить векторы $2\vec{a}$, $\frac{1}{2}\vec{a}$, $-\frac{1}{2}\vec{a}$.
Построение :



- **Теорема.**

Пусть $\vec{a} \neq \vec{0}$. Векторы \vec{b} и \vec{a} коллинеарны тогда и только тогда, когда найдется такая постоянная λ , что $\vec{b} = \lambda\vec{a}$



$$\vec{b} \parallel \vec{a} \Leftrightarrow \vec{b} = \lambda\vec{a}$$

Разложение векторов

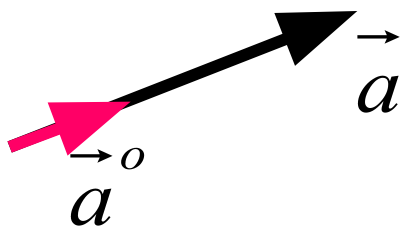
- **Разложение векторов по ортам.**

- **Определение 1.**

Ортом вектора \vec{a} называется вектор \vec{a}^o ,

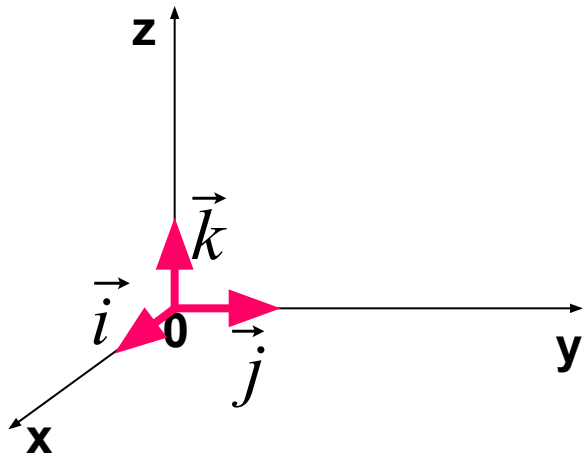
имеющий единичную длину и то же направление,

что и вектор \vec{a} .



Разложение векторов

- Рассмотрим прямоугольную систему координат.



Векторы \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} -единичные (орты), направленные по осям x , y , z (соответственно)

Определение 2. Тройка векторов $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ называется **ортонормированным базисом** в пространстве.

- Теорема 3.**

В пространстве любой вектор \vec{d} можно разложить по ортонормированному базису $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

Такое разложение единственное.

$$\vec{d} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Разложение векторов

- **Определение 3.**

Коэффициенты x, y, z разложения

называются **прямоугольными координатами**

$$\vec{d} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

вектора \vec{d} : $\vec{d} = \{x, y, z\}$

- **Частный случай.**

Если вектор \vec{d} расположен на координатной плоскости xy ,

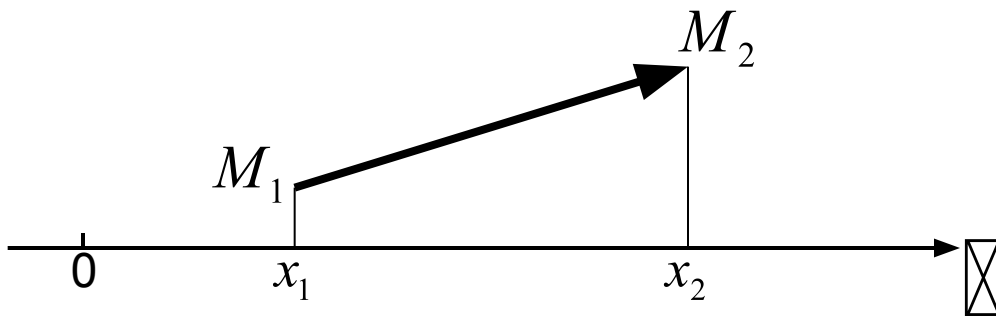
то разложение будет иметь вид $\vec{d} = x\vec{i} + y\vec{j}$

Коэффициенты x, y называются **прямоугольными координатами**

вектора на плоскости : $\vec{d} = \{x, y\}$

Проекции вектора

- Рассмотрим вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ и ось \boxtimes



- Определение.**

Проекцией вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ на ось \boxtimes называется разность проекций конца M_2 и начала M_1 вектора на эту ось;

$$\text{Пр}_{\boxtimes} \overrightarrow{M_1M_2} = x_2 - x_1$$

Проекции вектора

- В пространстве:

$$\vec{d} = \{x, y, z\} = \{Pr_x \vec{d}, Pr_y \vec{d}, Pr_z \vec{d}\}$$

- **Следствие.**

Если вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ задан двумя точками,
 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ - начало, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ - конец,
то

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$$

Действия с векторами в координатной форме

- Сумма и разность векторов,
произведение вектора на число.

Пусть $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$ и $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$

Тогда

- $\vec{a} \pm \vec{b} = \{x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2\}$
- $\lambda \vec{a} = \{\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1\}$

Модуль вектора

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

Орт вектора

$$\vec{a}^o = \left\{ \frac{x_1}{|\vec{a}|}, \frac{y_1}{|\vec{a}|}, \frac{z_1}{|\vec{a}|} \right\}$$

Действия с векторами в координатной форме

- **Необходимое и достаточное условие коллинеарности векторов, заданных в координатной форме.**

Два ненулевых вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда соответствующие координаты пропорциональны.

Пусть $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$ и $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$

Тогда

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$$

- Доказательство.

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = \lambda \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \lambda x_2 \\ y_1 = \lambda y_2 \\ z_1 = \lambda z_2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$$

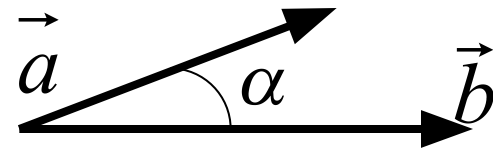
Скалярное произведение

- **Определение.**

Скалярным произведением двух векторов

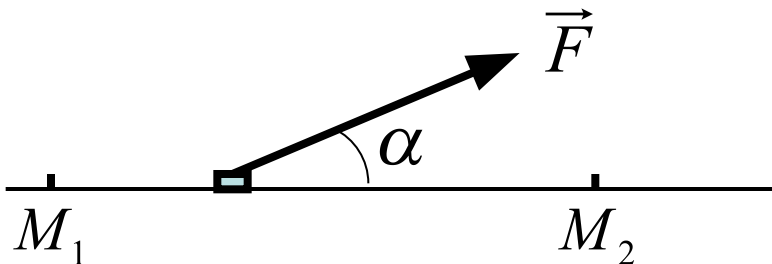
называется число, равное произведению модулей векторов на косинус угла между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$$



Обозначения : $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}\vec{b} = (\vec{a}, \vec{b})$

- **Физический смысл.**



$$A = \vec{F} \cdot \overline{M_1 M_2}$$

Пусть материальная точка под действием силы \vec{F} перемещается из положения M_1 в положение M_2 . Работа силы по перемещению материальной точки равна скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения.

Скалярное произведение

- **Свойства скалярного произведения.**

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

2. $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$

3. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

4. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \text{Пр}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \cdot \text{Пр}_{\vec{b}} \vec{a}$

- **Следствия из формулы 4 :**

$$\text{Пр}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} \quad \text{Пр}_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}$$

Скалярное произведение

$$5. \cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$6. \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 \quad (\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a})$$

Скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля.

7. Необходимое и достаточное условие

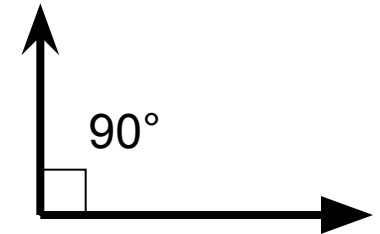
перпендикулярности векторов.

Два ненулевых вектора перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Определение

перпендикулярных векторов:



Скалярное произведение

- **Скалярное произведение векторов, заданных в координатной форме.**

Пусть $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$ и $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$
Тогда

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

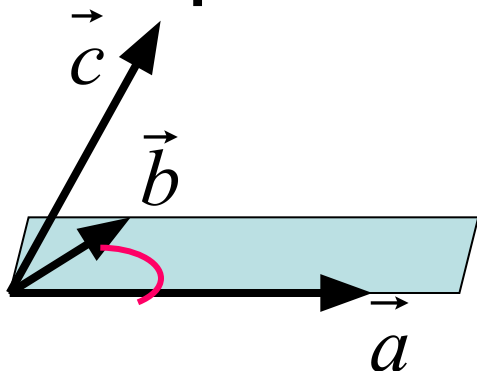
Скалярное произведение векторов равно сумме произведений соответствующих координат.

- **Условие перпендикулярности векторов в координатной форме :**

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$$

Векторное произведение

- **Ориентированные тройки векторов.**



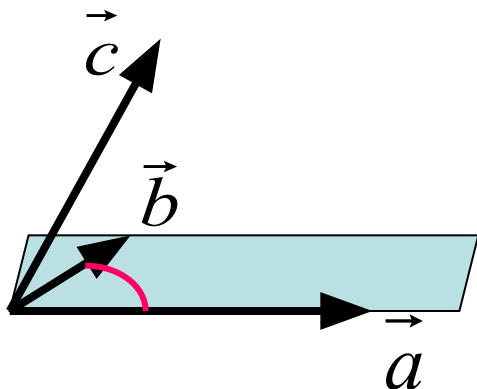
Рассмотрим три упорядоченных некопланарных вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

Определение 1.

Упорядоченная тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ имеет **правую ориентацию**, когда смотришь с конца третьего вектора и кратчайший поворот от первого вектора ко второму происходит **против** часовой стрелки.

Векторное произведение

Поменяем порядок векторов \vec{a} и \vec{b} : $\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}$



Изменится ориентация тройки.

Определение 2.

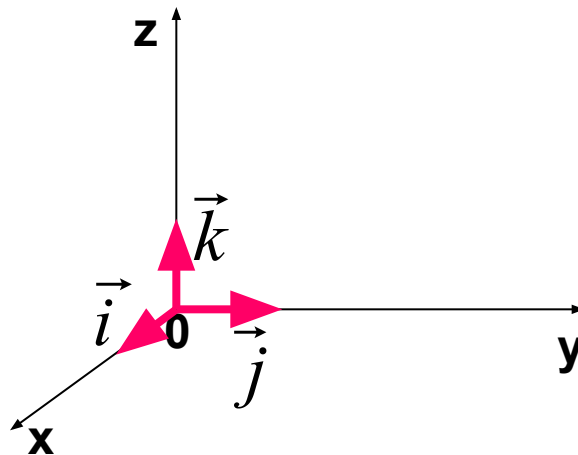
Упорядоченная тройка векторов имеет **левую ориентацию**, когда смотришь с конца третьего вектора и кратчайший поворот от первого вектора ко второму происходит **по часовой стрелке**.

Пример.

Тройка векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ имеет правую ориентацию.



Система координат x, y, z имеет правую ориентацию.

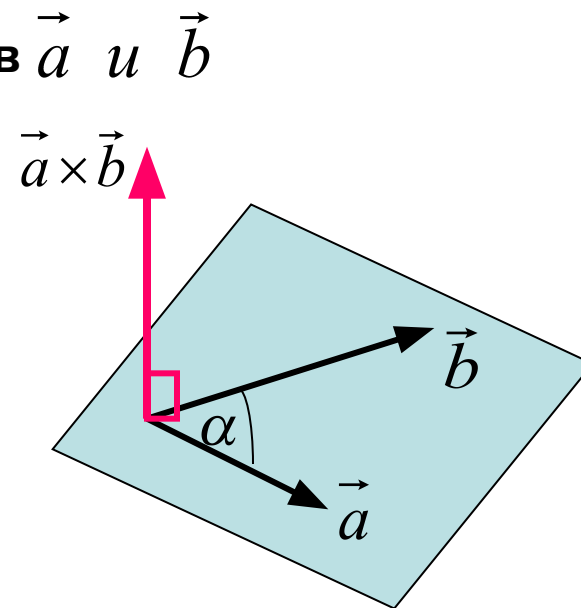


Векторное произведение

- **Определение 3.**

Векторным произведением двух векторов \vec{a} и \vec{b} называется третий вектор $\vec{a} \times \vec{b}$, удовлетворяющий трем условиям :

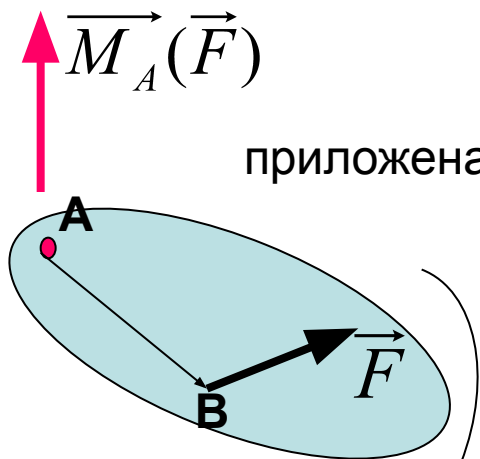
1. $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \alpha$
2. $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$ и $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$
3. Тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ имеет правую ориентацию.



- Обозначения : $\vec{a} \times \vec{b} = [\vec{a}, \vec{b}]$

Векторное произведение

- Физический смысл.



Пусть к твердому телу, закрепленному в точке A , приложена в точке B сила \vec{F}

Момент силы \vec{F} , приложенной в точке B , относительно точки A равен **векторному произведению** вектора \vec{AB} и силы \vec{F} :

$$\vec{M}_A(\vec{F}) = \vec{AB} \times \vec{F}$$

Векторное произведение

- **Свойства векторного произведения.**

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

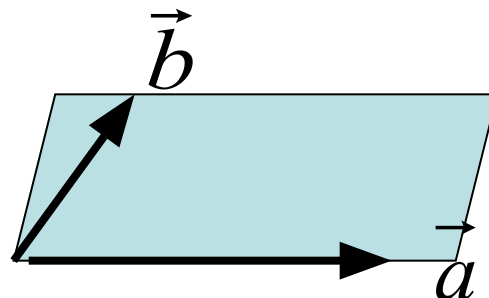
2. $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$

3. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

4. **Геометрический смысл .**

Модуль векторного произведения двух векторов численно равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = S_{\square}$$

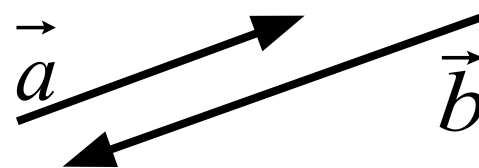


Векторное произведение

5. Необходимое и достаточное условие коллинеарности двух векторов.

Два ненулевых вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно нулевому вектору:

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$$



6. $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

Векторное произведение

- Векторное произведение векторов, заданных в координатной форме.

Пусть $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$ и $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$
Тогда

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

$$\left(\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} y_1 z_1 \\ y_2 z_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 z_1 \\ x_2 z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 y_1 \\ x_2 y_2 \end{vmatrix} \vec{k} \right)$$

Смешанное произведение

- **Определение.**

Смешанным произведением трех векторов называется векторное произведение первых двух векторов, умноженное скалярно на третий вектор:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

- Обозначения: $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$

- **Замечание.**

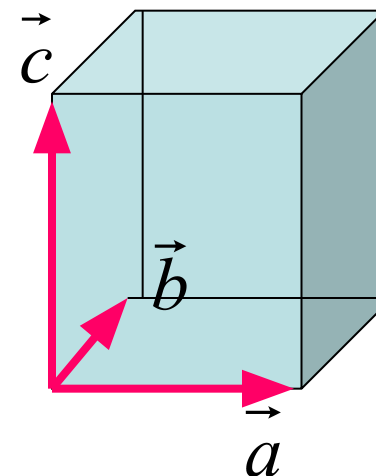
Результат смешанного произведения трех векторов является скалярной величиной.

Смешанное произведение

- 4. Геометрический смысл.

Модуль смешанного произведения трех векторов равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах :

$$\left| \vec{a} \vec{b} \vec{c} \right| = V_{\text{параллелепипеда}}$$



- Знак смешанного произведения определяет ориентацию тройки векторов :
- если $\vec{a} \vec{b} \vec{c} > 0$, то тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ имеет правую ориентацию;
- если $\vec{a} \vec{b} \vec{c} < 0$, то тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ имеет левую ориентацию.

Смешанное произведение

- **5. Необходимое и достаточное условие компланарности трех векторов.**
Три ненулевых вектора компланарны тогда и только тогда, когда смешанное произведение этих векторов равно нулю.

Смешанное произведение векторов, заданных в координатной форме.

Пусть

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \{x_1, y_1, z_1\} \\ \vec{b} &= \{x_2, y_2, z_2\} \\ \vec{c} &= \{x_3, y_3, z_3\}\end{aligned}$$

Тогда

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$