ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Понятие временного ряда

При анализе многих экономических показателей (особенно в макроэкономике) зачастую используют ежегодные, ежеквартальные, ежемесячные, ежедневные данные. Например, это могут быть годовые данные по ВНП, ВВП, объему чистого экспорта, инфляции и т. д., месячные данные по объему продажи продукции, ежедневные объемы выпуска какой-либо фирмы. Для рационального анализа необходимо систематизировать моменты получения соответствующих статистических данных.

В этом случае следует упорядочить данные по времени их получения и построить так называемые *временные ряды*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ЭЛЕМЕНТЫ

Множество данных, где время является независимой переменной, называется временным рядом или рядом динамики.

Ряды динамики состоят из двух элементов:

Уровни ряда (*y*) - это показатели, числовые значения которых составляют динамический ряд.

Время (*t*) - это моменты или периоды, к которым относятся уровни ряда.

ВИДЫ РЯДОВ ДИНАМИКИ

ЗАПОМНИ ПРАВИЛО

Необходимо помнить, что отличительной особенностью моментных рядов является то, что их уровни не поддаются суммированию.

LOGO

ЗАПОМНИ ПРАВИЛО

Уровни интервального ряда можно суммировать, в результате чего получают новые числовые значения за более длительный период времени.

Следует также отметить, что в интервальном ряду величина уровня зависит от величины интервала, чего нет в моментном ряду.

СРЕДНИЙ УРОВЕНЬ РЯДА ДИНАМИКИ

Для равно интервальных рядов динамики

$$\bar{y} = \frac{\sum_{t=1}^{n} y_t}{n}$$

Для равно моментных рядов динамики

$$\bar{y} = \frac{\frac{y_1}{2} + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}}{n-1}$$

СРЕДНИЙ УРОВЕНЬ РЯДА ДИНАМИКИ

LOGO

Для неравно интервальных рядов и неравно моментных рядов динамики

$$\bar{y} = \frac{\sum_{t=1}^{n} y_t \times d_t}{\sum_{t=1}^{n} d_t}, \text{где} \quad d_t - \text{длительность интервала},$$

$$\text{в течение которого} \quad y = y_t$$

Показатели анализа рядов динамики

Базисные

- Коэффициент роста
  $K^{б}_{pi} = y_i / y_б$
- Темп роста
  $T^{б}_{pi} = K^{б}_{pi} \times 100\%$
- Коэффициент прироста
  $K^{б}_{npi} = (y_i - y_б) / y_б$
- Темп прироста
  $T^{б}_{npi} = K^{б}_{npi} \times 100\%$
- Абсолютный прирост
  $\Delta^{б}_{i} = y_i - y_б$

Цепные

- Коэффициент роста
  $K^{ц}_{pi} = y_i / y_{i-1}$
- Темп роста
  $T^{ц}_{pi} = K^{ц}_{pi} \times 100\%$
- Коэффициент прироста
  $K^{ц}_{npi} = (y_i - y_{i-1}) / y_{i-1}$
- Темп прироста
  $T^{ц}_{npi} = K^{ц}_{npi} \times 100\%$
- Абсолютный прирост
  $\Delta^{ц}_{i} = y_i - y_{i-1}$

ПОКАЗАТЕЛИ АНАЛИЗА РЯДОВ ДИНАМИКИ

- Отношение базисных темпов роста двух динамических рядов за одинаковые отрезки времени называется **коэффициентом опережения (Копер)**.

- **Абсолютное значение одного процента прироста (А%)** представляет собой отношение абсолютного цепного прироста к цепному темпу прироста.

СРЕДНИЕ ПОКАЗАТЕЛИ ДИНАМИКИ

Средний абсолютный прирост

$$\overline{\Delta} = \frac{\sum_{i=1}^{m=n-1} \Delta_i^{ц}}{m} = \frac{y_n - y_1}{n-1}$$

где y_1 - начальный уровень ряда,
y_n - конечный уровень ряда,
n -число уровней ряда,
m -число цепных абсолютных приростов.

СРЕДНИЕ ПОКАЗАТЕЛИ ДИНАМИКИ

Средний темп роста

$$\overline{T}_p = \sqrt[m=n-1]{\frac{y_n}{y_1}} \times 100\%$$

Средний темп прироста равен среднему темпу роста минус 100%, а средний коэффициент роста равен среднему темпу роста, поделенному на 100%

$$\overline{T}_p = \sqrt[m=n-1]{K^{ц}_{p1} \cdot K^{ц}_{p2} \cdots K^{ц}_{pm}} \times 100\%$$

ПОНЯТИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Пусть исследуется показатель Y. Его значение в текущий момент (период) времени t обозначают y_t; значения Y в последующие моменты обозначаются y_{t+1}, y_{t+2}, ... , y_{t+k}, ...; значения Y в предыдущие моменты обозначаются y_{t-1}, y_{t-2}, ..., y_{t-k}, ...

при изучении зависимостей между такими показателями либо при анализе их развития во времени в качестве объясняющих переменных используются не только текущие значения переменных, но и некоторые предыдущие по времени значения, а также само время T. Модели данного типа называют *динамическими*.

В свою очередь переменные, влияние которых характеризуется определенным запаздыванием, называются *лаговыми переменными*.

Причин наличия лагов в экономике достаточно много, и среди них можно выделить следующие.

Психологические причины, которые обычно выражаются через инерцию в поведении людей. Например, люди тратят свой доход постепенно, а не мгновенно. Привычка к определенному образу жизни приводит к тому, что люди приобретают те же блага в течение некоторого времени даже после падения их реального дохода.

Технологические причины. Например, изобретение персональных компьютеров не привело к мгновенному вытеснению ими больших ЭВМ в силу необходимости замены соответствующего программного обеспечения, которое потребовало продолжительного времени.

Институциональные причины. Например, контракты между фирмами, трудовые договоры требуют определенного постоянства в течение времени контракта (договора).

Механизмы формирования экономических показателей. Например, инфляция во многом является инерционным процессом; денежный мультипликатор (создание денег в банковской системе) также проявляет себя на определенном временном интервале и т. д.

Классы динамических моделей

1. *Модели с лагами (модели с распределенными лагами)* – это модели, содержащие в качестве лаговых переменных лишь независимые (объясняющие) переменные. Примером является модель

$$y_t = \alpha + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \ldots + \beta_k x_{t-k} + \varepsilon_t.$$

2. *Авторегрессионные модели* – это модели, уравнения которых в качестве лаговых объясняющих переменных включают значения зависимых переменных. Примером является модель

$$y_t = \alpha + \beta \cdot x_t + \gamma \cdot y_{t-1} + \varepsilon_t.$$

Оценка моделей с лагами в независимых переменных

Оценка модели с распределенными лагами во многом зависит от того, конечное или бесконечное число лагов она содержит.

$$y_t = \alpha + \beta_0 \cdot x_t + \beta_1 \cdot x_{t-1} + \ldots + \beta_k \cdot x_{t-k} + \varepsilon_t,$$

$$y_t = \alpha + \beta_0 \cdot x_t + \beta_1 \cdot x_{t-1} + \beta_2 \cdot x_{t-2} + \ldots + \varepsilon_t.$$

Отметим, что в обеих этих моделях коэффициент β_0 называют *краткосрочным мультипликатором*, так как он характеризует изменение среднего значения Y под воздействием единичного изменения переменной X в тот же самый момент времени.

Сумму всех коэффициентов $\sum_j в_j$ называют *долгосрочным мультипликатором,* так как она характеризует изменение Y под воздействием единичного изменения переменной X в каждом из рассматриваемых временных периодов.

Любую сумму коэффициентов $\sum_{j=0}^{h} в_j$ (h < k) называют *промежуточным мультипликатором*.

Оценка модели с конечным числом лагов

$$y_t = \alpha + \beta_0 \cdot x_t + \beta_1 \cdot x_{t-1} + \ldots + \beta_k \cdot x_{t-k} + \varepsilon_t,$$

Модель с конечным числом лагов оценивается достаточно просто сведением ее к уравнению множественной регрессии. В этом случае полагают $X_0^* = x_t$, $X_1^* = x_{t-1}$, ..., $X_k^* = x_{t-k}$ и получают уравнение:

$$y_t = \alpha + \beta_0 X_0^* + \beta_1 X_1^* + \ldots + \beta_k X_k^* + \varepsilon_t.$$

Оценка модели с бесконечным числом лагов

Для оценки моделей с бесконечным числом лагов разработано несколько методов.

Метод последовательного увеличения количества лагов

Преобразование Койка (метод геометрической прогрессии)

Метод последовательного увеличения количества лагов

$$y_t = \alpha + \beta_0 \cdot x_t + \beta_1 \cdot x_{t-1} + \beta_2 \cdot x_{t-2} + \ldots + \varepsilon_t.$$

По данному методу уравнения рекомендуется оценивать с последовательно увеличивающимся количеством лагов. Признаков завершения процедуры увеличения количества лагов может быть несколько.

- При добавлении нового лага какой-либо коэффициент регрессии β_k при переменной x_{t-k} меняет знак. Тогда в уравнении регрессии оставляют переменные x_t, x_{t-1}, …, x_{t-k+1}, коэффициенты при которых знак не поменяли.
- При добавлении нового лага коэффициент регрессии β_k при переменной x_{t-k} становится статистически незначимым. Очевидно, что в уравнении будут использоваться только переменные x_t, x_{t-1}, …, x_{t-k+1}, коэффициенты при которых остаются статистически значимыми.

Однако применение этого метода весьма ограничено в силу постоянно уменьшающегося числа степеней свободы, сопровождающегося увеличением стандартных ошибок и ухудшением качества оценок, а также возможности мультиколлинеарности. Кроме этого, при неправильном определении количества лагов возможны ошибки спецификации.

Преобразование Койка (метод геометрической прогрессии)

В распределении Койка предполагается, что коэффициенты (известные как “веса”) β_k при лаговых значениях объясняющей переменной убывают в геометрической прогрессии:

$$\beta_k = \beta_0 \cdot \lambda^k, \; k = 0, 1, \ldots,$$

где $0 < \lambda < 1$ характеризует скорость убывания коэффициентов с увеличением лага (с удалением от момента анализа).

В данном случае уравнение преобразуется в уравнение

$$y_t = \alpha + \beta_0 x_t + \beta_0 \lambda x_{t-1} + \beta_0 \lambda^2 x_{t-2} + \ldots + \varepsilon_t.$$

Параметры данного уравнения α, β_0, λ можно определять различными способами. Например, достаточно популярен следующий метод. Параметру λ присваиваются последовательно все значения из интервала [0, 1] с произвольным фиксированным шагом (например, 0.01; 0.001; 0.0001). Для каждого λ рассчитывается

$$z_t = x_t + \lambda x_{t-1} + \lambda^2 x_{t-2} + \lambda^3 x_{t-3} + \ldots + \lambda^p x_{t-p}.$$

Значение p определяется из условия, что при дальнейшем добавлении лаговых значений x величина z_t изменяется менее любого ранее заданного числа.

Далее оценивается уравнение регрессии

$$y_t = \alpha + \beta_0 z_t + \varepsilon_t.$$

Из всех возможных значений λ выбирается то, при котором коэффициент детерминации R^2 для уравнения будет наибольшим.

$$y_t = \alpha + \beta_0 \cdot x_t + \beta_1 \cdot x_{t-1} + \beta_2 \cdot x_{t-2} + \ldots + \varepsilon_t. \qquad (12.3)$$

$$y_t = \alpha + \beta_0 x_t + \beta_0 \lambda x_{t-1} + \beta_0 \lambda^2 x_{t-2} + \ldots + \varepsilon_t. \qquad (12.6)$$

Однако более распространенной является схема вычислений на основе *преобразования Койка.*

Вычитая из уравнения (12.6) такое же уравнение, но умноженное на λ и вычисленное для предыдущего периода времени (t – 1)

$$\lambda\, y_{t-1} = \lambda\alpha + \beta_0 \lambda\, x_{t-1} + \beta_0 \lambda^2 x_{t-1} + \ldots + \lambda\varepsilon_{t-1}, \qquad (12.9)$$

получим следующее уравнение:

$$y_t - \lambda y_{t-1} = (1 - \lambda)\alpha + \beta_0 x_t + (\varepsilon_t - \lambda\varepsilon_{t-1}) \quad \Rightarrow$$

$$y_t = (1 - \lambda)\alpha + \beta_0 x_t + \lambda y_{t-1} + \upsilon_t, \qquad (12.10)$$

где $\upsilon_t = \varepsilon_t - \lambda\varepsilon_{t-1}$ – *скользящая средняя между* ε_t *и* ε_{t-1}.

Преобразование уравнения (12.3) по данному методу в уравнение (12.10) называется *преобразованием Койка.*

Отметим, что с помощью указанного преобразования уравнение с бесконечным числом лагов (с убывающими по степенному закону коэффициентами) преобразовано в авторегрессионное уравнение (12.10), для которого требуется оценить лишь три коэффициента: λ, α, β_0. Это, кроме всего прочего, снимает одну из острых проблем моделей с лагами – проблему мультиколлинеарности.

$$y_t = (1 - \lambda)\alpha + \beta_0 x_t + \lambda y_{t-1} + \upsilon_t, \qquad (12.10)$$

Модель (12.10) позволяют анализировать краткосрочные и долгосрочные свойства переменных. В краткосрочном периоде значение $y_{t\text{-}1}$ можно рассматривать как фиксированное и краткосрочный мультипликатор считается равным β_0. Долгосрочный мультипликатор вычисляется по формуле суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Если предположить, что в долгосрочном периоде x_t стремится к некоторому своему равновесному значению x^*, то значения y_t и y_{t-1} также стремятся к своему равновесному значению y^*. Тогда (12.10) без учета случайного отклонения примет вид:

$$y^* = (1 - \lambda)\alpha + \beta_0 x^* + \lambda y^*. \qquad (12.11)$$

Следовательно,

$$y^* = \alpha + \frac{\text{в}_0}{(1-\text{л})} x^*. \qquad (12.12)$$

Нетрудно заметить, что по формуле суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\frac{\text{в}_0}{(1-\text{л})} = \beta_0 + \beta_0\lambda + \beta_0\lambda^2 + \beta_0\lambda^3 + \ldots$ полученная дробь является долгосрочным мультипликатором, который отражает долгосрочное воздействие X на Y. При $0 < \lambda < 1$ долгосрочное воздействие будет сильнее краткосрочного (т. к. $\frac{\text{в}_0}{(1-\text{л})} > \beta_0$).

ПРОБЛЕМЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ

При применении преобразования Койка возможны следующие проблемы:

- Среди объясняющих переменных появляется переменная y_{t-1}, которая, в принципе, носит случайный характер, что нарушает одну из предпосылок МНК. Кроме того, данная объясняющая переменная, скорее всего, коррелирует со случайным отклонением υ_t.
- Если для случайных отклонений ε_t, ε_{t-1} исходной модели выполняется предпосылка 3^0 МНК, то для случайных отклонений υ_t, очевидно, имеет место автокорреляция. Для ее анализа вместо обычной статистики DW Дарбина–Уотсона необходимо использовать h-статистику Дарбина (см. раздел 9.3.3).
- При указанных выше проблемах оценки, полученные по МНК, являются смещенными и несостоятельными.

Авторегрессионные модели

Модель адаптивных ожиданий

Модель адаптивных ожиданий может использоваться при анализе зависимости потребления от дохода, спроса на деньги либо инвестиций от процентной ставки и в других ситуациях, где экономические показатели оказываются чувствительными к ожиданиям относительно будущего.

Модель частичной корректировки

обе эти модели можно также отнести к семейству моделей Койка

Смешанная модель

Модель адаптивных ожиданий

В данной модели в уравнение регрессии в качестве объясняющей переменной вместо текущего значения x_t входит ожидаемое (долгосрочное) значение x_t^*:

$$y_t = \alpha + \beta x_t^* + \varepsilon_t. \qquad (12.13)$$

Так как ожидаемые значения не являются фактически существующими, выдвигается предположение, что эти значения связаны следующим соотношением:

Из (12.13) очевидно, что коэффициент β определяет величину изменения в среднем текущего значения y_t при изменении ожидаемого значения x_t^* на единицу.

$$x_t^* - x_{t-1}^* = r(x_t - x_{t-1}^*). \qquad (12.14)$$

Именно модель (12.14) известна как *модель адаптивных ожиданий*. Коэффициент $0 \le \gamma \le 1$ называется *коэффициентом ожидания*. Иногда модель (12.14) называют *моделью обучения на ошибках*, т. к. ожидания экономических объектов в этом случае складываются из прошлых ожиданий, скорректированных на величину ошибки в ожиданиях, допущенных в предыдущем периоде времени.

Модель частичной корректировки

В *модели частичной корректировки (модели акселератора)* в уравнение регрессии в качестве зависимой переменной входит не фактическое значение y_t, а желаемое (долгосрочное) значение y_t^*:

$$y_t^* = \alpha + \beta x_t + \varepsilon_t. \tag{12.23}$$

Так как гипотетическое значение y_t^* не является фактически существующим, то относительно его выдвигается предположение *частичной корректировки*:

$$y_t - y_{t-1} = \lambda(y_t^* - y_{t-1}), \tag{12.24}$$

по которому фактическое приращение зависимой переменной $y_t - y_{t-1}$ пропорционально разнице между ее желаемым значением и значением в предыдущий период $y_t^* - y_{t-1}$. $0 \le \lambda \le 1$ – *коэффициент корректировки*. Уравнение (12.24) преобразуется к следующему виду:

$$y_t = \lambda y_t^* + (1 - \lambda)y_{t-1}. \tag{12.25}$$

Подставив (12.23) в (12.25), получим следующую модель

$$y_t = \lambda\alpha + \lambda\beta\, x_t + (1 - \lambda)y_{t-1} + \lambda\varepsilon_t, \tag{12.26}$$

которая называется *моделью частичной корректировки*. Из (12.25) видно, что текущее значение y_t является взвешенным средним желаемого уровня y_t^* и фактического значения данной переменной в предыдущий период. Чем больше λ, тем быстрее идет корректировка. При $\lambda = 1$ полная корректировка происходит за один период. При $\lambda = 0$ корректировка не происходит вовсе.

Модель частичной корректировки

Модель частичной корректировки (12.26) аналогична модели Койка (12.10). Она также включает в себя случайную объясняющую переменную y_{t-1}. Но в данной модели эта переменная не коррелирует с текущим значением случайного отклонения ε_t (т. к. ε_t рассчитывается после того, как определилось значение y_{t-1}). В этом случае МНК позволяет получить асимптотически несмещенные и эффективные оценки.

В качестве примера использования данной модели можно привести следующий: Y – запас капитала, X – выпуск. Тогда по формуле (12.24): $I_t = y_t - y_{t-1} = \lambda(y_t^* - y_{t-1})$ – инвестиции в период t пропорциональны отклонению желаемого запаса капитала от фактического запаса капитала в предыдущем периоде.

Смешанная модель

В данной модели в качестве объясняющей и зависимой переменных рассматриваются их желаемые (долгосрочные) значения:

$$y_t^* = \alpha + \beta \cdot x_t^* + \varepsilon_t. \qquad (12.27)$$

Например, y_t^* – желаемый запас капитала в момент времени t; x_t^* – ожидаемый выпуск в момент времени t. Либо y_t^* – долгосрочное потребление, x_t^* – долгосрочный доход.

Так как y_t^* и x_t^* не являются фактически существующими, то для расчета x_t^* может быть предложена модель адаптивных ожиданий, а для расчета y_t^* – модель частичной корректировки. Это позволяет получить следующее соотношение:

$$y_t = \alpha\lambda\gamma + \beta\lambda\gamma\, x_t + [(1-\gamma) + (1-\lambda)]\, y_{t-1} -$$

$$-(1-\lambda)(1-\gamma)y_{t-2} + [\lambda\varepsilon_t - \lambda(1-\gamma)\varepsilon_{t-1}] \quad \Rightarrow$$

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 x_t + \alpha_2 y_{t-1} + \alpha_3 y_{t-2} + \upsilon_t, \qquad (12.28)$$

где $\alpha_0 = \alpha\lambda\gamma$, $\alpha_1 = \beta\lambda\gamma$, $\alpha_2 = (1-\gamma) + (1-\lambda)$,

$\alpha_3 = -(1-\lambda)(1-\gamma)$, $\upsilon_t = \lambda\varepsilon_t - \lambda(1-\gamma)\varepsilon_{t-1}$.

Данная модель также относится к классу авторегрессионных моделей, но в отличие от предыдущих в ней появилось дополнительное слагаемое, связанное с y_{t-2}.

Оценка авторегрессионных моделей

Вышеизложенные авторегрессионные модели фактически имеют следующий вид:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + \gamma y_{t-1} + \upsilon_t. \qquad (12.35)$$

Чаще всего (особенно на начальном этапе) такие модели оцениваются с помощью МНК. Однако во многих случаях применение классического МНК для (12.35) дает неудовлетворительные результаты. Обычно это происходит по двум причинам, которые отмечались ранее:

- существует возможность наличия автокорреляции между случайными отклонениями υ_t $(M(\upsilon_t \cdot \upsilon_{t-1}) \neq 0)$;
- существует корреляция между объясняющей переменной y_{t-1} и случайным членом υ_t.

В этом случае оценки коэффициентов, полученные при прямом применении МНК, являются смещенными и несостоятельными.

Одним из наиболее распространенных методов оценивания авторегрессионных уравнений, позволяющих сгладить второй недостаток, является метод инструментальных переменных. Основная идея этого метода состоит в том, чтобы переменную y_{t-1} из первой части (12.35), коррелирующую с υ_t, заменить так называемой инструментальной переменной, близкую по своим свойствам к y_{t-1}, но не коррелирующую с отклонением υ_t.

автокорреляцию в авторегресси-онных моделях практически невозможно определить с помощью статистики DW Дарбина–Уотсона, т. к. для этих моделей значение DW даже при наличии автокорреляции близко к 2, что по критерию Дарбина–Уотсона равносильно отсутствию автокорреляции.

Для обнаружения автокорреляции в авторегрессионных моделях Дарбин предложил использовать h-статистику, имеющую вид:

$$h = \hat{c}\sqrt{\frac{n}{1 - nD(g)}}, \tag{12.36}$$

где n – объем выборки; D(g) – дисперсия оценки коэффициента γ при лаговой переменной y_{t-1}; $\hat{c}$ – оценка коэффициента автокорреляции первого порядка, которую можно определить на основе формулы (9.2): $\hat{c} \approx 1 - \dfrac{DW}{2}$.

Авторегрессионное преобразование (AR)

зачастую автокорреляция вызывается наличием регрессионной зависимости между отклонениями, т. е. внутренними свойствами ряда $\{\upsilon_t\}$. Существует несколько способов устранения данной проблемы. В частности, для авторегрессионных моделей предлагается авторегрессионное преобразование, преобразование методом скользящих средних, модели ARMA и ARIMA.

Авторегрессионное преобразование (AR)

Пусть Y – исследуемая величина, и ее изменение можно описать с помощью модели

$$(y_t - m) = \alpha_1(y_{t-1} - m) + u_t, \qquad (12.37)$$

где m – среднее значение Y, u_t – некоррелированные случайные отклонения с нулевым математическим ожиданием и постоянной дисперсией σ^2 (такие отклонения при рассмотрении временных рядов иногда называют *белым шумом*). Преобразование (12.37) в этом случае называют *авторегрессионным преобразованием первого порядка AR(1)*. При этом значение y_t переменной Y в момент времени t пропорционально ее же значению y_{t-1} в момент времени (t – 1) плюс некоторое случайное отклонение.

По аналогии

$$(y_t - m) = \alpha_1(y_{t-1} - m) + \alpha_2(y_{t-2} - m) + u_t \qquad (12.38)$$

называется *авторегрессионным преобразованием второго порядка AR(2)*.

$$(y_t - m) = \alpha_1(y_{t-1} - m) + \alpha_2(y_{t-2} - m) + \ldots + \alpha_p(y_{t-p} - m) + u_t \qquad (12.39)$$

называется *авторегрессионным преобразованием порядка P AR(P)*.

Во всех этих преобразованиях текущее значение y_t переменной Y выражается только через ее предыдущие значения и случайную составляющую (белый шум) u_t.

ограничение для AR(1) модуль a1 меньше 1
ограничения для AR(2) a1+a2 меньше 1, a2-a1 меньше 1 и модуль a2 меньше 1

Преобразование методом скользящих средних

Пусть поведение моделируется формулой:

$$y_t = \gamma + \beta_0 u_t + \beta_1 u_{t-1}, \qquad (12.40)$$

где $\gamma = \text{const}$, u_t и u_{t-1} – белый шум в текущий и предыдущий моменты времени. В этом случае значение переменной Y в момент времени t равно сумме константы и скользящей средней между текущим и предыдущим значениями случайного отклонения (белого шума). Соотношение (12.40) называют *преобразованием методом скользящих средних первого порядка MA(1).*

Соотношение

$$y_t = \gamma + \beta_0 u_t + \beta_1 u_{t-1} + \beta_2 u_{t-2} + \ldots + \beta_q u_{t-q} \qquad (12.41)$$

называют *преобразованием методом скользящих средних порядка q MA(q).*

Преобразование ARMA

Сочетание преобразований AR и MA называется *авторегрессионным преобразованием со скользящей средней ARMA*. Например, для переменной Y преобразование ARMA(1,1) будет иметь вид:

$$y_t = \gamma + \alpha_1 \cdot y_{t-1} + \beta_0 \cdot u_t + \beta_1 \cdot u_{t-1}. \qquad (12.42)$$

В общем случае преобразование ARMA(p,q) включает в себя p авторегрессионных членов и q скользящих средних.

Преобразование ARIMA

Преобразование ARMA в сочетании с переходом от объемных величин к приростным называется *преобразованием ARIMA*. В некоторых случаях такой переход позволяет получить более точную и явную модель зависимости. Здесь приращением (конечной разностью) первого порядка переменной Y называется разность $y_t - y_{t-1}$. Приращением порядка d переменной Y называют разность $y_t - y_{t-1} - y_{t-2} - \dots - y_{t-d}$.

В общем виде преобразование ARIMA(p,d,q) выражается формулой:

$$y_t^* = \alpha_1 y_{t-1}^* + \dots + \alpha_p y_{t-p}^* + \beta_0 \cdot u_t + \beta_1 \cdot u_{t-1} + \dots + \beta_q \cdot u_{t-q}, \qquad (12.43)$$

где α_i, $i = 1, 2, \dots, p$; β_i, $i = 0, 1, 2, \dots, q$ – неизвестные параметры. Величины y_{t-i}^*, $i = 0, 1, \dots, p$ представляют собой конечные разности порядка d переменной Y. u_{t-i}, $i = 0, 1, \dots, q$ – независимые друг от друга нормально распределенные случайные величины с нулевым математическим ожиданием и постоянной дисперсией.

Отметим, что преобразования AR, MA и ARIMA целесообразно использовать тогда, когда достаточно ясен набор объясняющих переменных и общий вид уравнения регрессии, но в то же время сохраняется автокорреляция остатков.

Прогнозирование с помощью временных рядов

Конечной целью статистического анализа временных рядов является прогнозирование будущих значений исследуемого показателя. Такое прогнозирование позволяет, во-первых, предвидеть будущие экономические реалии, во-вторых, проанализировать построенную регрессионную модель на устойчивость (т.е. ее применимость в изменяющихся условиях). Прогнозирование можно осуществлять либо на основе выявленных закономерностей изменения самого исследуемого показателя во времени и экстраполяции его прошлого поведения на будущее; либо на основе выявленной зависимости исследуемого показателя от других экономических факторов, будущие значения которых контролируемы, известны или легко предсказуемы.

ФАКТОРЫ ФОРМИРОВАНИЯ УРОВНЯ РЯДА ДИНАМИКИ

- **постоянно действующие, которые оказывают определяющее воздействие на уровни ряда, формирующие основную тенденцию его развития (тренд, обозначается $\hat{y}_t$);**
- **периодически действующие, оказывают влияние на уровни ряда стабильно в определенные периоды (сезонность и периодичность или цикличность, обозначается I_s);**
- **случайно действующие, приводящие к кратковременным изменениям уровней ряда динамики (ошибка, обозначается $\varepsilon_t = y_t - I_s * \hat{y}_t$)**

ТРЕНД

- **ТРЕНД – это основная тенденция развития показателя, она характеризует его поведение в случае влияния на его уровень только систематических причин**

МЕТОДЫ ВЫДЕЛЕНИЯ ТРЕНДА

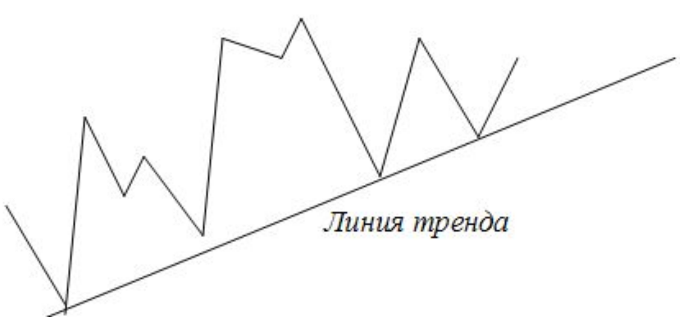
- **Графические;**
- **Укрупнения периодов времени;**
- **Скользящее среднее;**
- **Аналитическое выравнивание.**

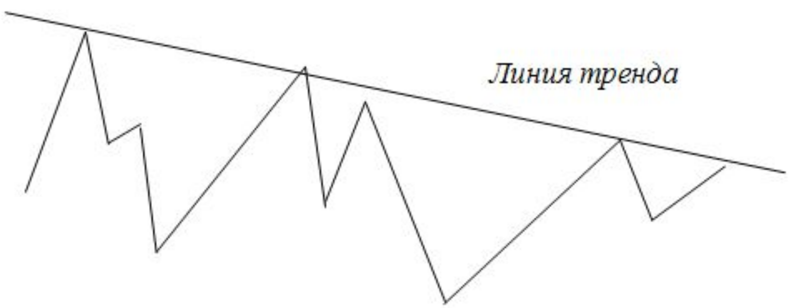
ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

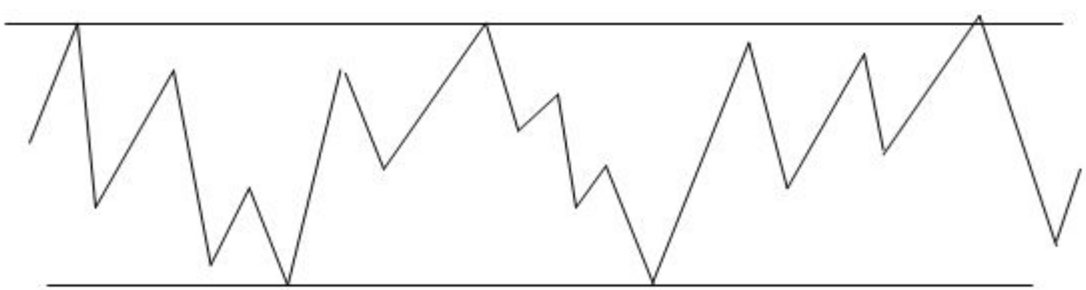
Основа технического анализа на фондовом рынке - выявление тренда – превалирующего направления движения цен на ЦБ.

Тренды бывают трёх видов: “бычий”, “медвежий” и боковой.

- Цены финансовых инструментов можно образно представить как результат схватки между быками (покупателями) и медведями (продавцами). Быки подталкивают цены вверх, а медведи — вниз.







повышательная тенденция тренда

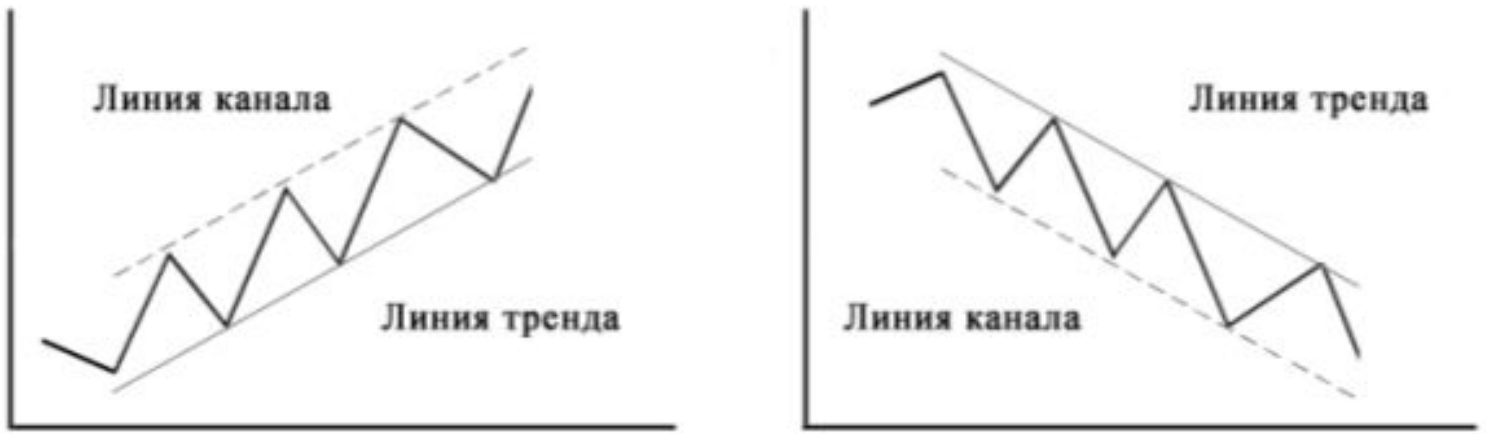
- линия повышательного тренда соединяет последовательность минимумов
- может рассматриваться как ненарушенная до тех пор, пока не пробит предыдущий относительный минимум. Нарушение этого условия служит предупреждением о том, что тенденция, возможно, закончилась.

Линия повышательного тренда на графике акций

понижательная тенденция тренда

- линия понижательного тренда соединяет последовательность максимумов
- понижательная тенденция может рассматриваться как ненарушенная до тех пор, пока не пробит предыдущий относительный максимум

Линия понижательного тренда на графике акций «Аэрофлот»



Линии тренда и линии канала

Линию канала можно нарисовать, если подъёмы и спады на рынке равномерны. В таком случае цена визуально движется как бы между двумя параллельными. Линия канала рисуется параллельно линии тренда и располагается выше графика цены при бычьем тренде и ниже — при медвежьем. Таким образом, она будет определять сопротивление для бычьего и поддержку для медвежьего тренда.

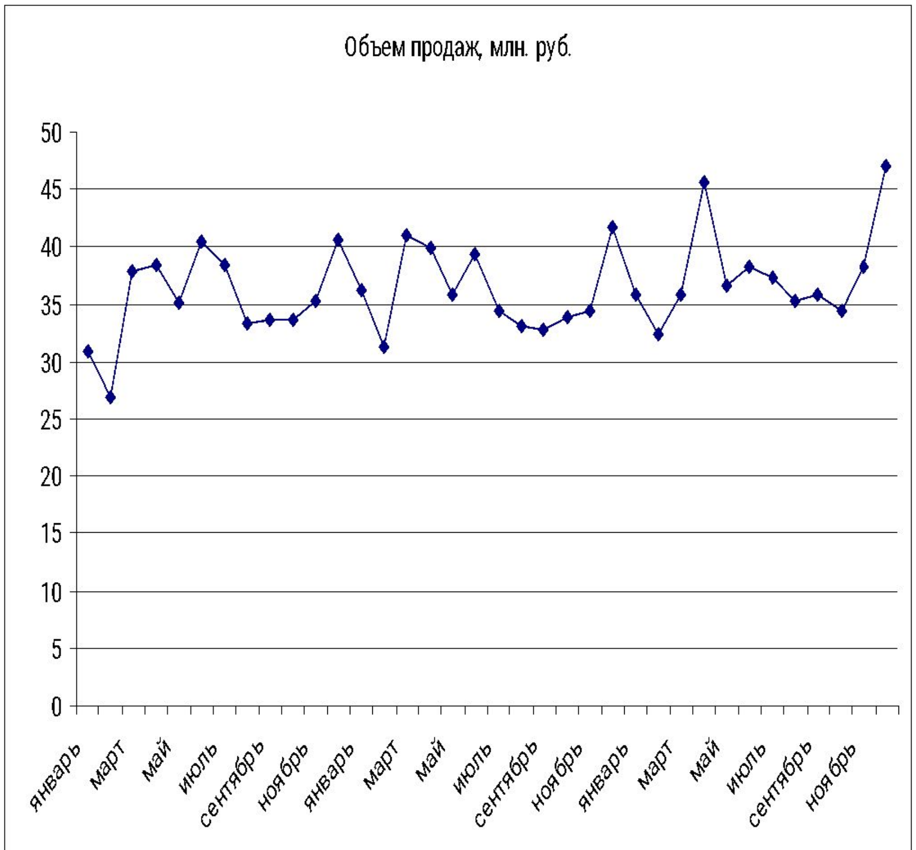
Линии тренда и канала подчиняются общим правилам сопротивления и поддержки, поэтому с их помощью можно определять границы действия тренда.

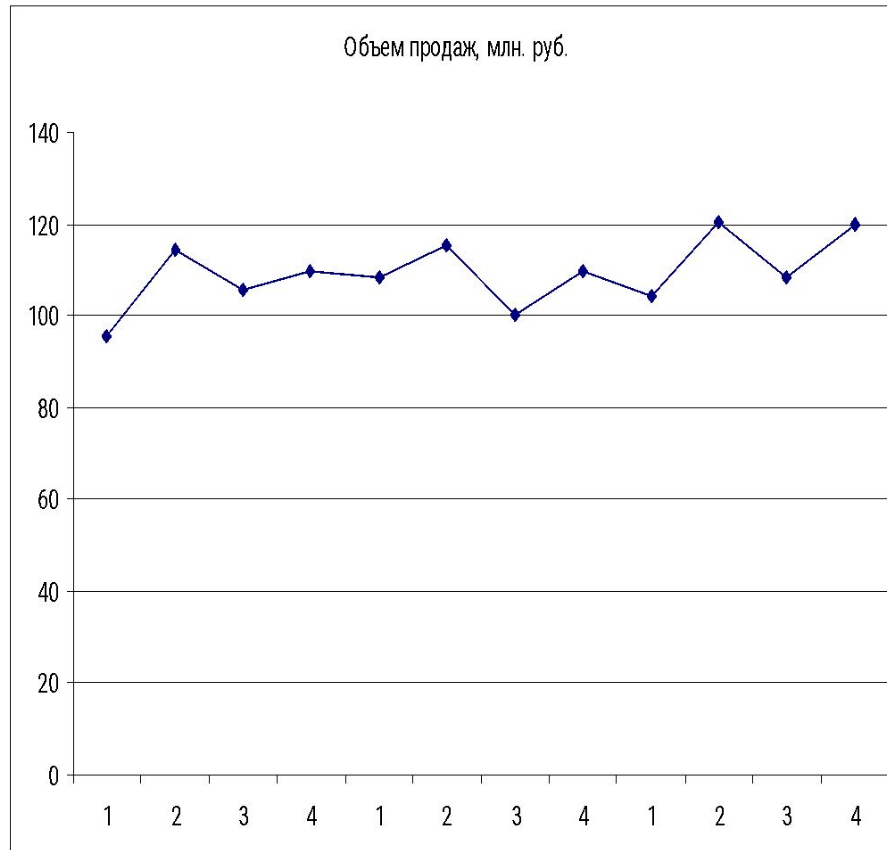
К трендовым линиям и коридорам обычно применимы следующие правила:

1. Понижения цен, приближающиеся к линии повышательного тренда, и подъемы цен, приближающиеся к линии понижательного тренда, часто являются хорошей возможностью для открытия позиций в направлении основной тенденции.
2. Пробой линии повышательного тренда (особенно если он подтвержден ценой закрытия дня) является сигналом к продаже; пробой линии понижательного тренда — сигналом к покупке.
3. Нижняя линия понижательного и верхняя линия повышательного трендового коридора представляют собой потенциальные зоны фиксации прибыли для краткосрочных трейдеров.

МЕТОД УКРУПНЕНИЕ ПЕРИОДОВ

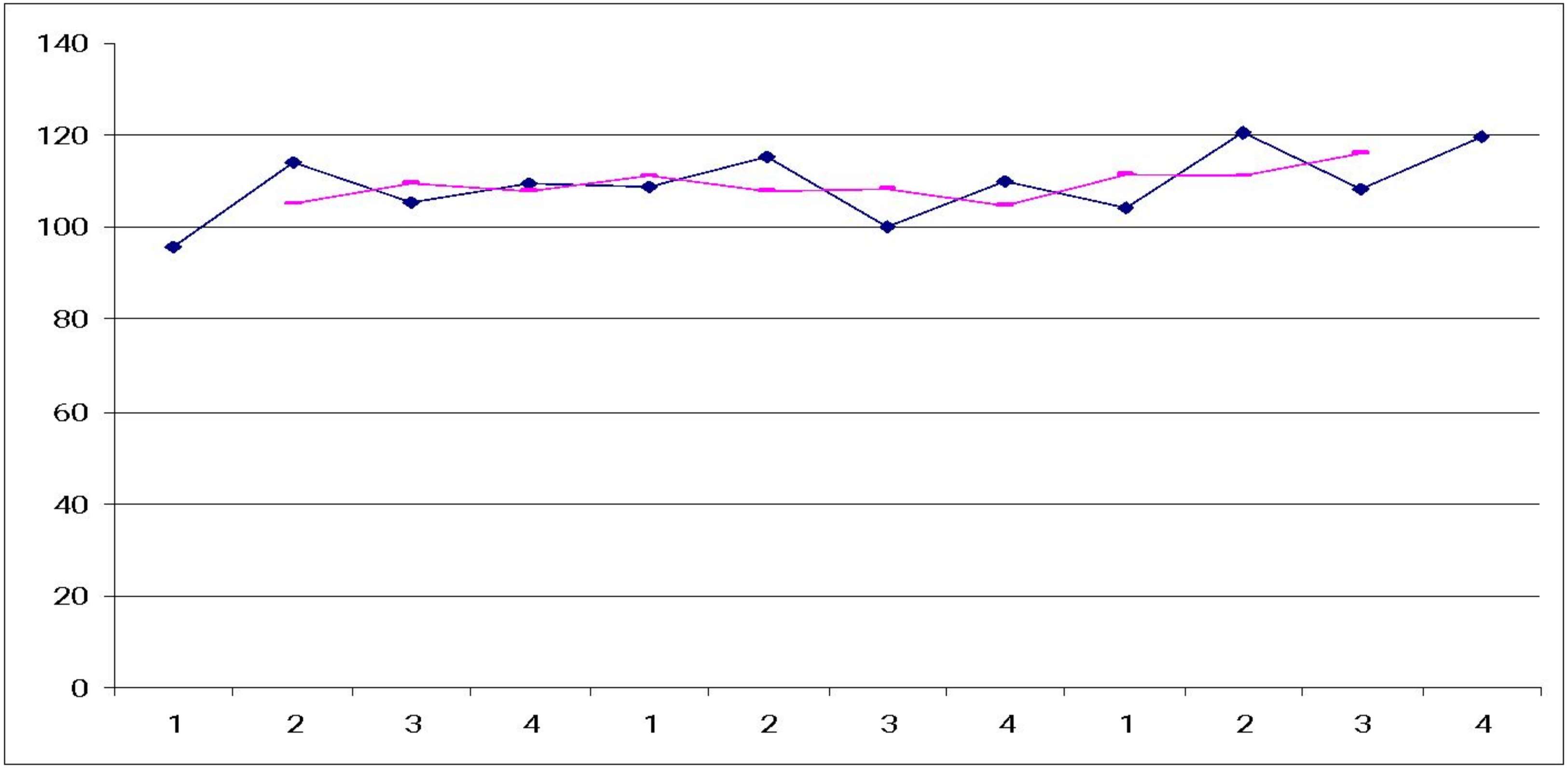
Суть метода заключается в том, чтобы от интервалов, или периодов времени, для которых определены исходные уровни ряда динамики, перейти к более продолжительным периодам времени.





МЕТОД СКОЛЬЗЯЩЕГО СРЕДНЕГО

Суть метода заключается в том, что фактические уровни ряда заменяются средними уровнями, вычисленными по правилу



типы скользящих средних

- простое (его также называют арифметическим),
- экспоненциальное,
- треугольное,
- переменное,
- взвешенное

ТИПЫ СКОЛЬЗЯЩЕГО СРЕДНЕГО

- Экспоненциальные и взвешенные скользящие средние делают более весомыми последние цены.
- Треугольные скользящие средние придают больший вес ценам в середине периода.
- Переменные скользящие средние изменяют весовые коэффициенты в зависимости от волатильности цен.

Длина скользящего среднего

- должна соответствовать длительности рыночного цикла, на который ориентируется аналитик

$$\text{Идеальная длина скольза·щего среднего} = \frac{\text{Длина цикла}}{2} + 1 = m$$

Simple moving average - простое

$$SMA = \frac{\sum_{i=1}^{m} y_i}{m},$$

где: SMA - простое скользящее среднее;

y_i - y в i-ом периоде;

m - количество периодов.

$$\bar{y}_1 = \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_m}{m}; \bar{y}_2 = \frac{y_2 + y_3 + \ldots + y_{m+1}}{m};$$

$$\bar{y}_3 = \frac{y_3 + \ldots + y_{m+2}}{m}; \ldots \bar{y}_{n-m+1} = \frac{y_{n-m+1} + y_{n-m+2} + \ldots + y_n}{m}$$

Exponential moving average

- вычисляется путем прибавления к предыдущему значению скользящего среднего определенной доли текущего показателя. В случае экспоненциальных скользящих средних большую значимость представляют последние показатели ряда

$$EMA_i = EMA_{i-1} + (k * (y_i - EMA_{i-1})),$$

где

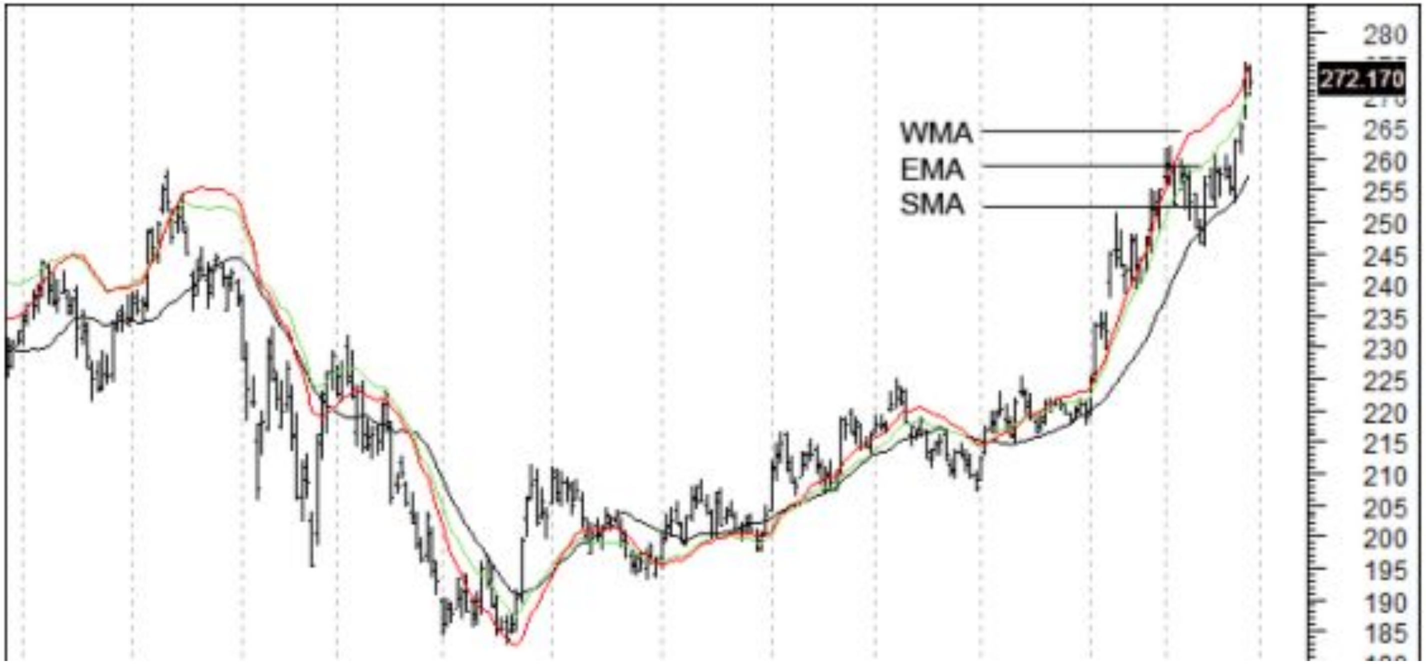
Текущий уровень ряда y_i

Предыдущий уровень EMA_i

$k = 2/(n+1).$

Во взвешенном скользящем среднем WMA последним данным присваивается больший вес w_i, а более ранним — меньший. Взвешенное скользящее среднее рассчитывается путем умножения каждой из цен закрытия в рассматриваемом ряду на определенный весовой коэффициент. Формула расчета выглядит так:

$$WMA = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i w_i}{n}, \text{ где } w_i = \frac{1}{i}.$$



ПРИМЕНЕНИЕ СКОЛЬЗЯЩЕГО СРЕДНЕГО на ФОНДОВОМ РЫНКЕ

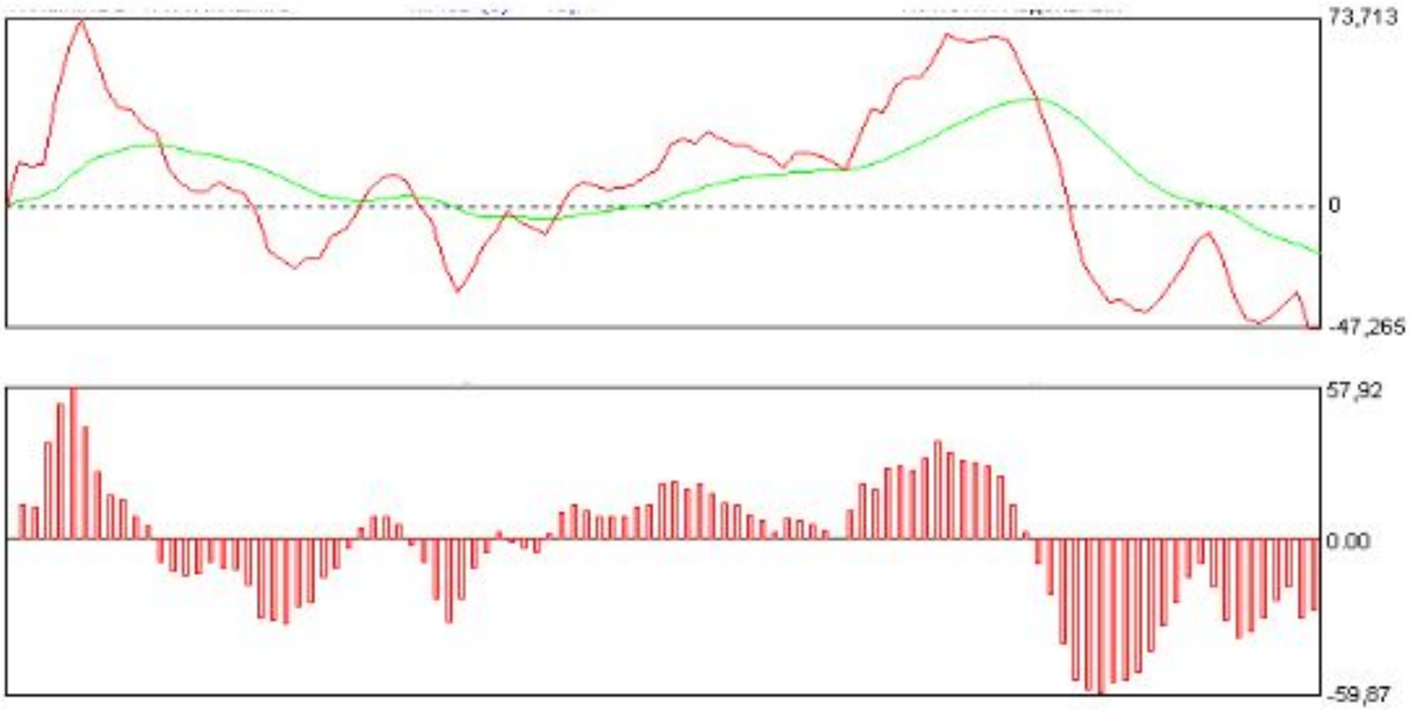
- Если она направлена вверх, то трейдер совершает покупки, если вниз - то продажи.
- Когда цена инструмента поднимается выше значения скользящей средней, возникает сигнал к покупке, а когда она опускается ниже линии индикатора — сигнал к продаже.
- Однако система торговли с помощью скользящей средней вовсе не предназначена обеспечить вхождение в рынок строго в его низшей точке, а выход — строго на вершине. Она позволяет действовать в соответствии с текущей тенденцией: покупать вскоре после того, как цены достигли основания, и продавать вскоре после образования вершины.

ПРИМЕНЕНИЕ СКОЛЬЗЯЩЕГО СРЕДНЕГО

- Разворот скользящей средней снизу вверх при положительном наклоне самого ценового графика рассматривается как сигнал на покупку,
- Разворот скользящей средней сверху вниз при отрицательном наклоне самого ценового графика рассматривается как сигнал на продажу.
- Пересечение ценой своего скользящего среднего сверху вниз (при отрицательном наклоне обоих) рассматривается как сигнал на продажу,
- Пересечение ценой своего скользящего среднего снизу вверх (при положительном наклоне обоих) рассматривается как сигнал на покупку.
- Пересечение длинного скользящего среднего коротким снизу вверх рассматривается как сигнал к покупке и наоборот

MACD (Moving Averages Convergence-Divergence)

- Индикатор схождения-расхождения скользящих средних
- Используется в техническом анализе для проверки силы и направления тренда, а также определения разворотных точек.
- MACD строится в виде отображения двух скользящих средних и их разности.
- Обычно в качестве индикатора используется разность между 12-и 26-периодными экспоненциальными скользящими средними. Эта разность называется линией MACD в узком смысле этого слова и строится в виде графика в отдельном окне
- Интервал для построения графиков может быть любым.



Индикатор MACD, сигнальная линия индикатора и гистограмма MACD на графике акций «ЛУКОЙЛ»

МЕТОД АНАЛИТИЧЕСКОГО ВЫРАВНИВАНИЯ

При этом методе исходные уровни ряда динамики y_i заменяются теоретическими уровнями $\hat{y}_t$, которые рассчитываются на основе регрессии показателя от времени, выражающей общую тенденцию развития ряда динамики.

В ряду динамики может не быть тренда, если данные сильно колеблются

РАСЧЕТ АБСОЛЮТНОЙ ОШИБКИ ТРЕНДА St

В современных программных продуктах существуют возможности построения тренда *с* помощью степенной, полиномиальной, логарифмической и других форм связи. Важно выбрать наиболее адекватное уравнение тренда.

Для этого рассчитывается средняя ошибка уравнения тренда St:

$$St = \sqrt{\frac{\sum (y_t - \hat{y}_t)^2}{n - m}}$$

где *n* - число уровней ряда,

***m* - число коэффициентов в уравнении тренда.**

КРИТЕРИЙ ВЫБОРА ТРЕНДА ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ОШИБКА ТРЕНДА

Если соотнести среднюю ошибку уравнения тренда со средним значением уровней ряда, то получим **относительную ошибку** тренда, которая имеет специальное название – **коэффициент колеблемости:**

$$V_t = \frac{S_t}{\bar{y}_t} \times 100\%$$

Чем меньше относительная ошибка, тем адекватнее тренд. **Считается, что V_t не должна превышать 12-15%, тогда тренд существует в ряду**

ЭКСТРАПОЛЯЦИЯ

На основе тренда можно строить прогнозы, этот процесс называется **ЭКСТРАПОЛЯЦИЯ** ряда динамики

Чтобы построить точечный прогноз на n+k период достаточно рассчитать значения тренда для точки t=n+k

Чтобы построить интервальный прогноз нужно задать **границы доверительного интервала прогноза:**

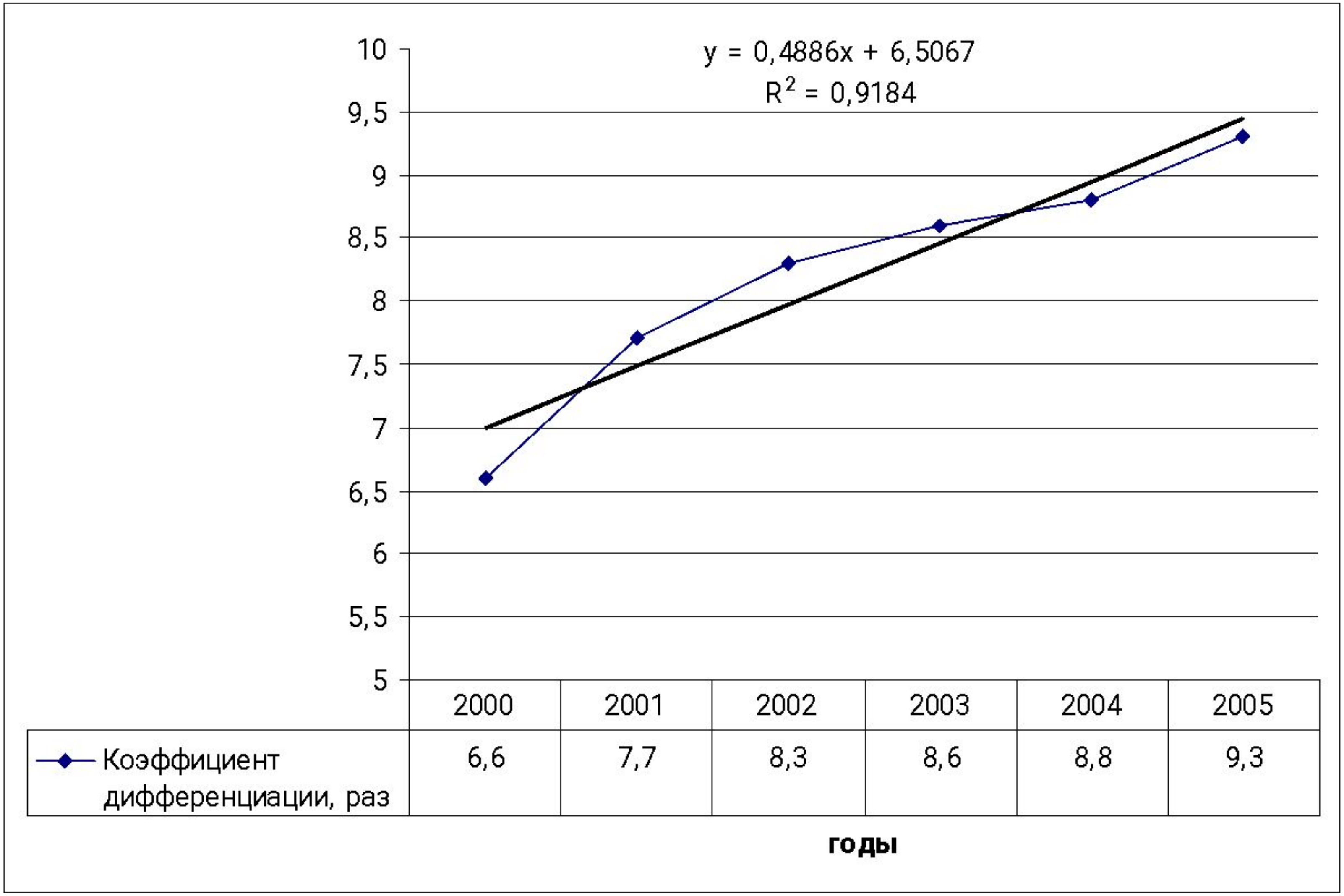
$$\hat{y}_t \pm t_\alpha \cdot S_t$$

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

Если в данных есть пропуски за какие-то периоды, то их нахождение на основе тренда называется интерполяцией данных.

Она отличается от экстраполяции тем, что пропуски уровней расположены внутри периода анализа динамики показателя.

ПРИМЕР ВЫДЕЛЕНИЯ ТРЕНДА



ПРИМЕР ВЫДЕЛЕНИЯ ТРЕНДА

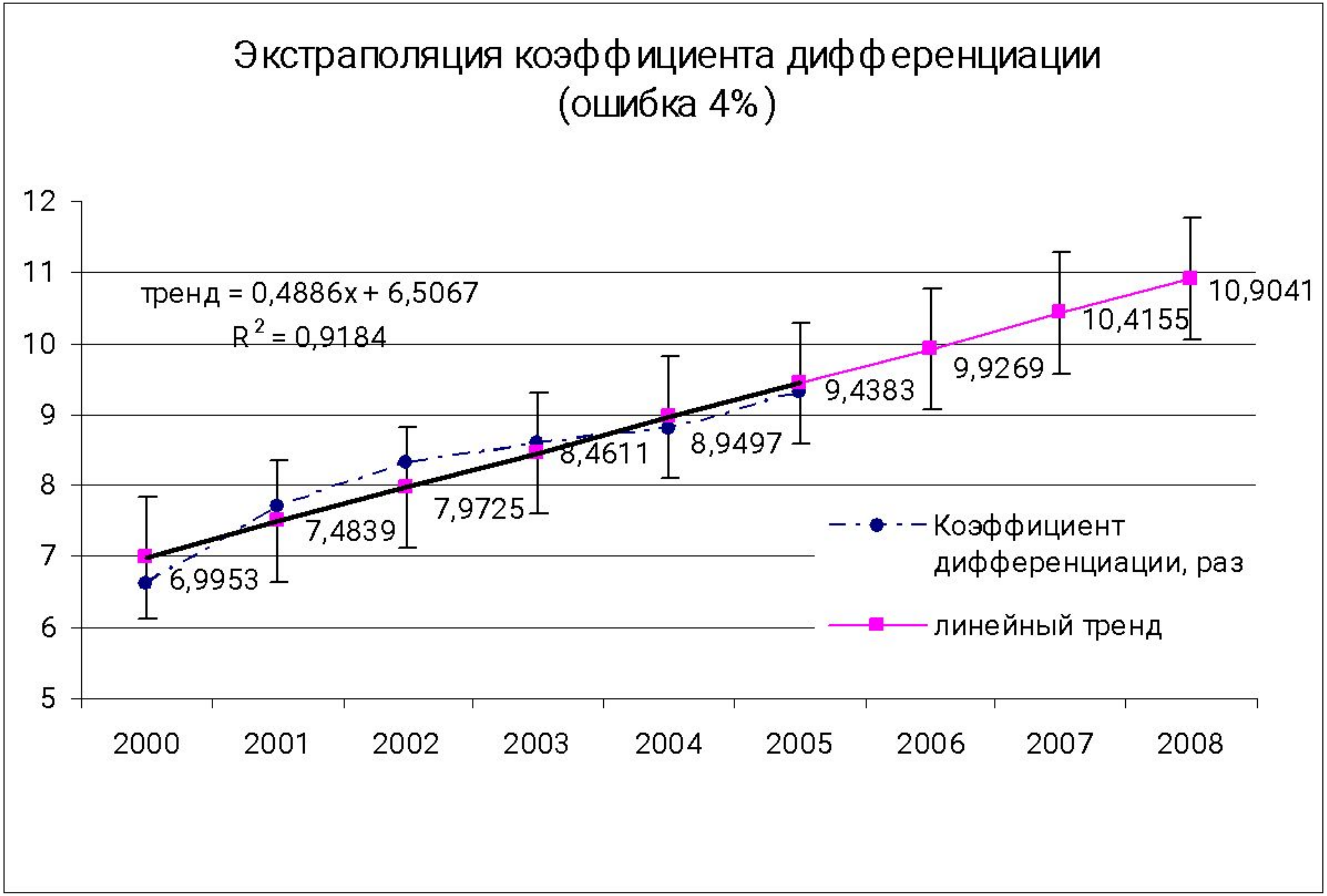
Год	Коэффициент дифференциации, раз (Yt)	Тренд ˆyt	Ошибка в квадрате
2000	6,6	6,9953	0,15626209
2001	7,7	7,4839	0,04669921
2002	8,3	7,9725	0,10725625
2003	8,6	8,4611	0,01929321
2004	8,8	8,9497	0,02241009
2005	9,3	9,4383	0,01912689
2006	9,9269	9,9269	0,37104774
2007	10,4155	10,4155	среднее yt за 5 периодов=8,22; St=0,3
2008	10,9041	10,9041	Vt=0,3/8,22*100%=4%

Источник: www.kalugastat.ru/inf/urv_1.htm

tтаб=$t_{0,05}$(n-(m-1))=2,8

Доверительный интервал = 2,8*0,3=0,85

ПРИМЕР ВЫДЕЛЕНИЯ ТРЕНДА



КРИТЕРИИ НАЛИЧИЯ ТРЕНДА

- Критерий серий
- Тест Аббе-Линника

Критерий серий

Критерий «восходящих и нисходящих» серий. Против каждого из уровней временного ряда y_t, где $t = \overline{1,N}$, ставится знак «+», если данный уровень больше предыдущего, или знак «–», если данный уровень меньше предыдущего. Получаем совокупность знаков объемом . Последовательность из знаков «+» или «–», следующих друг за другом, называется *серией*. Обозначим через γ общее количество серий исследуемого временного ряда. Самую длинную серию из знаков «+» или «–» обозначим через ϕ.

Основная гипотеза H_0 об отсутствии тренда в изучаемом динамическом ряду проверяется при уровне значимости $\alpha = 0,05$. Она отклоняется, если хотя бы одно из следующих неравенств не выполняется:

$$\gamma > \left[\frac{1}{3}(\alpha \cdot N - 1) - 1.96 \cdot \frac{\sqrt{16 \cdot N - 29}}{90}\right];$$

$$\phi_{\text{набл}} \leq \phi_0,$$

где $\phi_0 = 5$, если $N < 26$; $\phi_0 = 6$, если $26 < N < 153$; $\phi_0 = 7$, если $153 < N < 170$.

ПРИМЕР

G10 | f_x =ABS((1/3)*(0,05*20-1)-1,96*(((16*20-29)^0,5)/90))

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2	Критерий для выявления наличия тренда во временном ряду							
3								
4	t	y_t	знак					
5	1	11						
6	2	10	-	если меньше предыдущего				
7	3	13	+	если больше предыдущего значения yt				
8	4	12	-	серия- это последовательность одинаковых знаков				
9	5	13	+	общее число серий		γ		
10	6	14	+	в примере $\gamma=$		14	0,371501	
11	7	15	+	самая длинная серия Ф=			3	<5
12	8	12	-					
13	9	16	+	тренда нет, так как гипотеза Н0 принимается, все неравенства выполнены				
14	10	17	+					
15	11	15	-					
16	12	18	+					
17	13	17	-					
18	14	19	+					
19	15	16	-					
20	16	19	+					
21	17	20	+					
22	18	19	-					
23	19	21	+					
24	20	22	+	16				

Критерий серий, основанный на медиане выборки.

Если временной ряд объемом N ранжируется, т.е. наблюдения упорядочиваются по возрастанию, то определяется медиана ранжированного ряда.

Медианой называется наблюдение, которое делит ранжированный ряд на две равные части, из которых значения одной половины меньше медианы, а другой — больше. При нечетном числе наблюдений во временном ряду в качестве медианы принимается значение, стоящее в середине данного ряда, а при четном среднее арифметическое значение двух наблюдений, находящихся посередине временного ряда.

Начальные уровни исходного временного ряда сравниваются с медианным значением. Если уровень ряда больше медианного значения, то ему приписывается знак «+», а если меньше, то знак «–». Последовательности стоящих друг за другом знаков образуют серии. Обозначим через γ общее количество серий исследуемого временного ряда. Самую длинную серию из знаков «+» или «–» обозначим через ϕ.

Основная гипотеза H_0 об отсутствии тренда в изучаемом динамическом ряду проверяется при уровне значимости

при альфа=0,05		если		
Nser	>	[1/2(N+2-1,96√(N-1))]		
максимальная длинна серии			DSer<1,43ln(n+1)	

ПРИМЕР

сортируем по возрастанию							
t	yt	t	y_t	знак			
2	10	1	11	-			
1	11	2	10	-			
4	12	3	13	-			
8	12	4	12	-			
3	13	5	13	-			
5	13	6	14	-			
6	14	7	15	-			
7	15	8	12	-			
11	15	9	16	+			
9	16	10	17	+			
15	16	11	15	-			
10	17	12	18	+			
13	17	13	17	+			
12	18	14	19	+			
14	19	15	16	+			
16	19	16	19	+			
18	19	17	20	+			
17	20	18	19	+			
19	21	19	21	+			
20	22	20	22	+			
Me=	16	16					
		общее число серий		Nser			
		в примере	Nser	4	6,728279	H0 отклоняется	
				Dser	9	4,353667	
		тренд есть, так как гипотеза H0 отклоняется, так как не выполнены неравенства					

КРИТЕРИЙ АББЕ-ЛИННИКА

предназначен для проверки гипотезы о том, что все выборочные значения принадлежат одной генеральной совокупности с постоянным средним против альтернативы тренда.

Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — ряд значений взаимно независимых нормально распределенных случайных величин с математическими ожиданиями $\mu_1, \ldots, \mu_n$ соответственно и одинаковыми (но неизвестными) дисперсиями. Проверяется гипотеза о том, что все выборочные значения принадлежат одной генеральной совокупности со средним μ:

$$H_0: \ \mu_i = \mu, \ i = 1, \ldots, n$$

против альтернативы тренда:

$$H_1: \ |\mu_{i+1} - \mu_i| > 0, \ i = 1, \ldots, n-1$$

Статистика критерия Аббе-Линника имеет вид

$$q = \frac{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2},$$ где $$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Если $q > q_\alpha$, то нулевая гипотеза случайности ряда $x_1, \ldots, x_n$ отклоняется с доверительной вероятностью α (критические значения $q > q_\alpha$ приведены в таблице).

n	Доверительная α вероятность		n	Доверительная α вероятность		n	Доверительная α вероятность	
	0.95	**0.99**		**0.95**	**0.99**		**0.95**	**0.99**
4	0.3902	0.3128	**23**	0.6713	0.5479	**42**	0.7521	0.6655
5	0.4102	0.2690	**24**	0.6776	0.5562	**43**	0.7550	0.6659
6	0.4451	0.2808	**25**	0.6839	0.5639	**44**	0.7576	0.6622
7	0.4680	0.3070	**26**	0.6893	0.5713	**45**	0.7603	0.6659
8	0.4912	0.3314	**27**	0.6946	0.5784	**46**	0.7628	0.6693
9	0.5121	0.3544	**28**	0.6996	0.5850	**47**	0.7653	0.6727
10	0.5311	0.3759	**29**	0.7047	0.5915	**48**	0.7767	0.6757
11	0.5482	0.3957	**30**	0.7091	0.5975	**49**	0.7698	0.6787
12	0.5636	0.4140	**31**	0.7136	0.6034	**50**	0.7718	0.6814
13	0.5778	0.4309	**32**	0.7177	0.6089	**51**	0.7739	0.6842
14	0.5908	0.4466	**33**	0.7216	0.6141	**52**	0.7759	0.6869
15	0.6027	0.4611	**34**	0.7256	0.6193	**53**	0.7779	0.6896
16	0.6137	0.4746	**35**	0.7292	0.6242	**54**	0.7799	0.6924
17	0.6237	0.4872	**36**	0.7328	0.6290	**55**	0.7817	0.6949
18	0.6330	0.4989	**37**	0.7363	0.6337	**56**	0.7836	0.6974
19	0.5417	0.5100	**38**	0.7396	0.6381	**57**	0.7853	0.6999
20	0.6498	0.5203	**39**	0.7429	0.6425	**58**	0.7872	0.7024
21	0.6574	0.5301	**40**	0.7461	0.6467	**59**	0.7891	0.7049
22	0.6645	0.5393	**41**	0.7491	0.6508	**60**	0.7906	0.7071

тот же пример			
t	y_t	$(y_{t+1}-y_t)^2$	$(yt-ycp)^2$
1	11		24,5025
2	10	1	35,4025
3	13	9	8,7025
4	12	1	15,6025
5	13	1	8,7025
6	14	1	3,8025
7	15	1	0,9025
8	12	9	15,6025
9	16	16	0,0025
10	17	1	1,1025
11	15	4	0,9025
12	18	9	4,2025
13	17	1	1,1025
14	19	4	9,3025
15	16	9	0,0025
16	19	9	9,3025
17	20	1	16,4025
18	19	1	9,3025
19	21	4	25,5025
20	22	1	36,6025
среднее	15,95	83	226,95
AL=q=	0,18285966		
то есть тренд не существует			

СЕЗОННОСТЬ

Сезонные колебания показателя (сезонность в данных) – устойчивые внутри годичные колебания, то есть когда из года в год в одни и те же периоды внутри года уровень повышается, а в другие понижается.

ИНДЕКСЫ СЕЗОННОСТИ

Индексы сезонности – показатели измеряющие сезонность.

Их расчет зависит от тенденции показателя:

1. **Если годовой уровень из года в год существенно не изменяется (нет тренда) (на основе средних уровней);**

2. Если годовой уровень из года в год существенно изменяется (существует тренд) (на основе тренда).

РАСЧЕТ ИНДЕКСОВ СЕЗОННОСТИ НА ОСНОВЕ СРЕДНИХ УРОВНЕЙ

1 этап – за все годы исследуемого периода рассчитать средние уровни по одноименным внутригодовым периодам $\overline{Y}_k$

2 этап – рассчитать средний уровень ряда динамики за весь период $\overline{Y}$

3 этап – рассчитать столько индексов сезонности, сколько внутригодовых периодов в году (кварталов – 4; месяцев – 12 и т.д.) по формуле:

$$I_s^k = \frac{\overline{Y}_k}{\overline{Y}}$$

РАСЧЕТ ИНДЕКСОВ СЕЗОННОСТИ НА ОСНОВЕ ТРЕНДА

1 этап - за все годы исследуемого периода рассчитать средние уровни по одноименным внутригодовым периодам $\overline{Y}_k$

2 этап – выделить скользящее среднее или тренд $\hat{Y}_t$

3 этап – найти средние уровни по сглаженным или выровненным одноименным периодам $\overline{\hat{Y}}_k$

4 этап - найти индексы сезонности:

$$I_s^k = \frac{\overline{Y}_k}{\overline{\hat{Y}}_k}$$

СТЕПЕНЬ ВЛИЯНИЯ СЕЗОННОСТИ

Для сопоставления сезонности по нескольким рядам динамики исчисляют ошибку сезонности по (m – число внутригодовых периодов анализа):

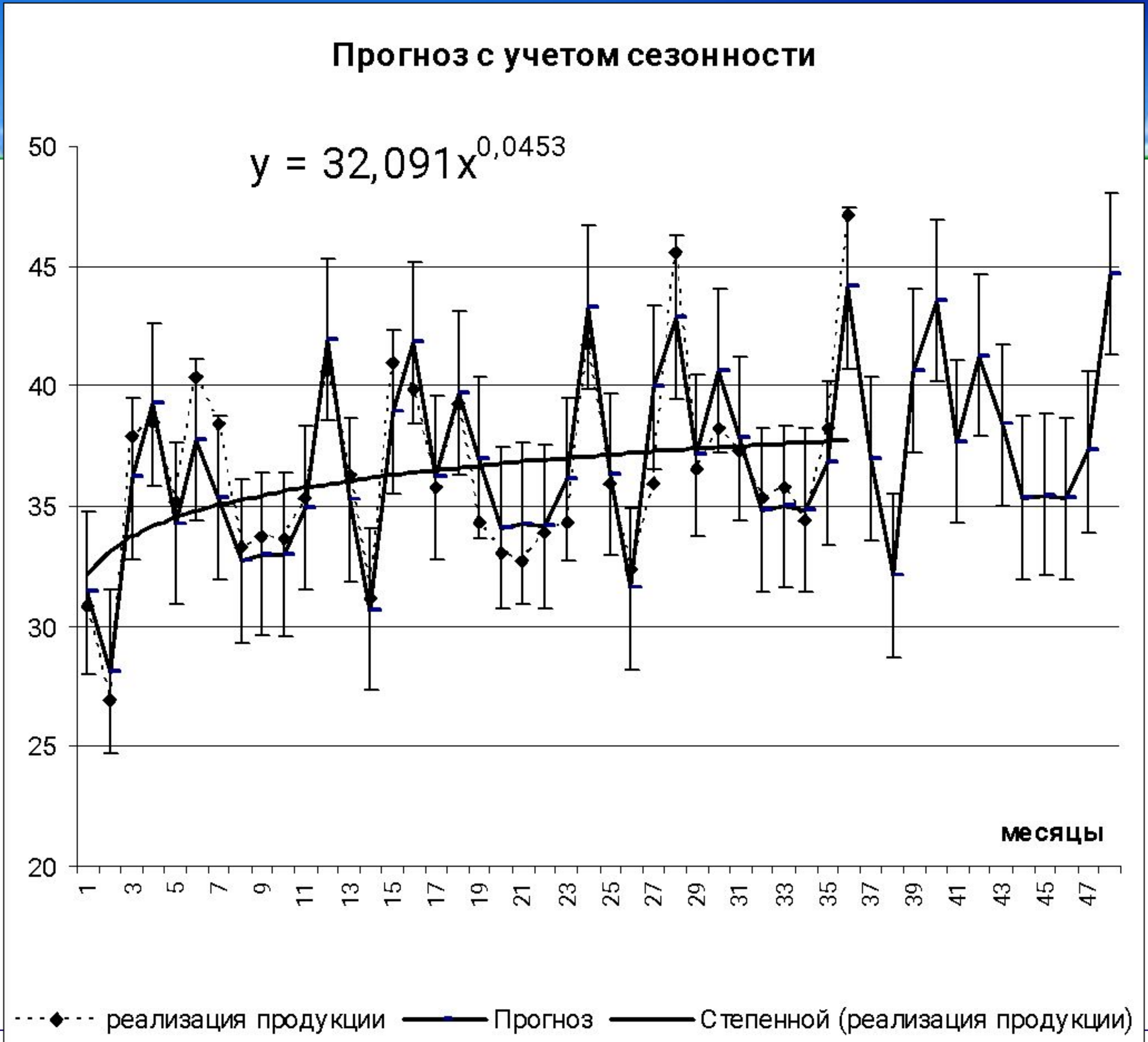
$$\sigma_s = \sqrt{\frac{\sum (I_s - 1)^2}{m}}$$

Чем меньше данный показатель, тем меньше влияет сезонность

УЧЕТ СЕЗОННОСТИ В ПРОГНОЗЕ

Для того, чтобы прогноз был более точным, нужно учесть сезонность, для чего уровни прогноза умножаются на индексы сезонности внутригодовому соответственно периоду.

$$Y_{к}^{прогноз} = \hat{Y}_{k} \cdot I_{s}^{k}$$


Прогноз с учетом сезонности
y = 32,091x^0,0453
50
45
40
35
30
25
20
месяцы
1
3
5
7
9
11
13
15
17
19
21
23
25
27
29
31
33
35
37
39
41
43
45
47
реализация продукции
Прогноз
Степенной (реализация продукции)

Для анализа и прогнозирования сезонности используется также модель сезонных колебаний на основе гармоник ряда Фурье:

$$\hat{y}_t = a_0 + \sum_{k=1}^{m} (a \cos kt + b \sin kt), \quad \text{где } k - \text{номер гармоники},$$

k задает степень точности модели, обычно от 1 до 4

при $k = 1$: $\hat{y}_t = a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t$;

при $k = 2$: $\hat{y}_t = a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t + a_2 \cos 2t + b_2 \sin 2t$

и т.д.

Параметры определяются МНК по формулам:

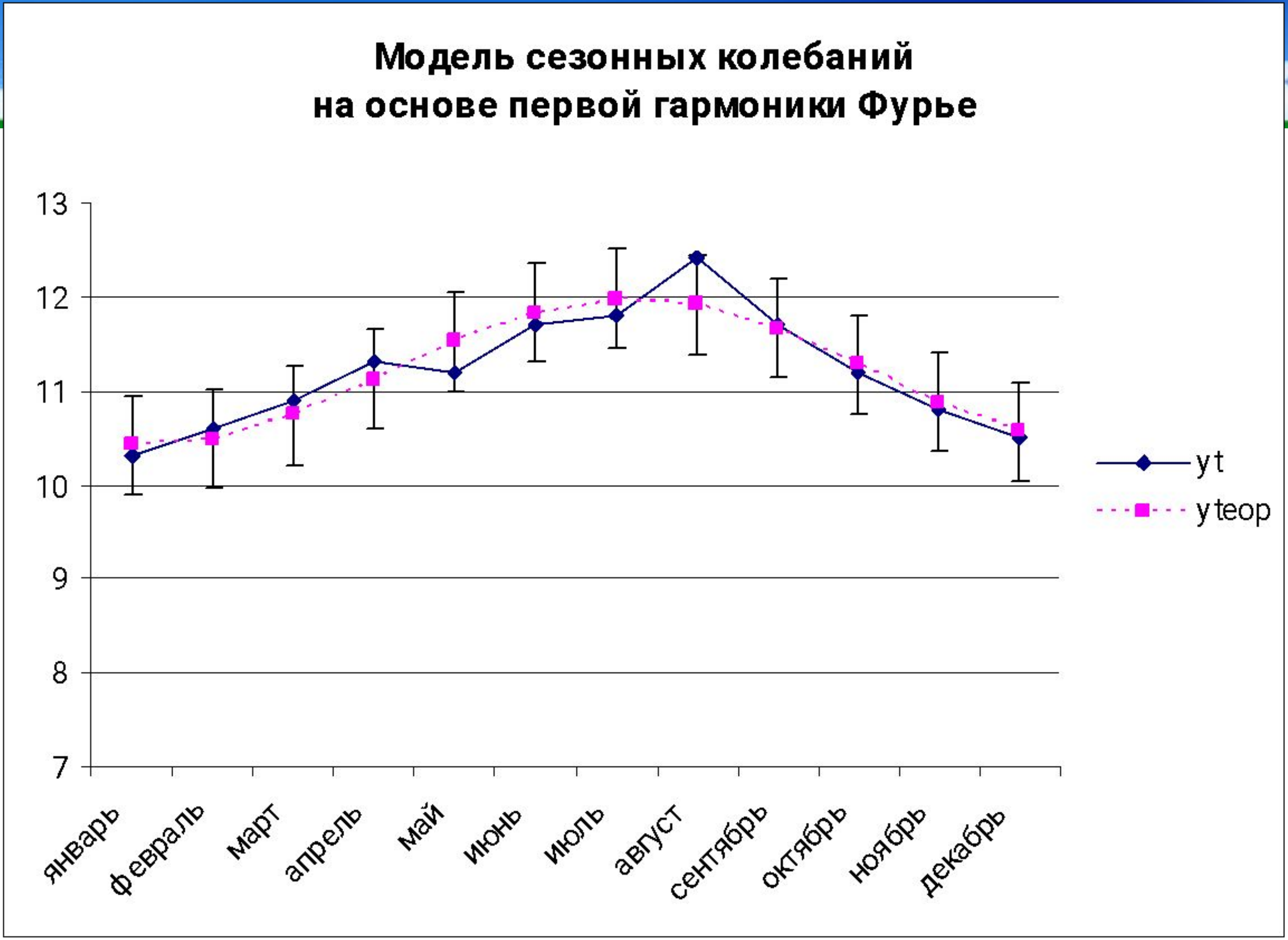
$$a_0 = \frac{\sum y}{n}; \; a_k = \frac{2}{n} \sum y \cos kt; \; b_k = \frac{2}{n} \sum y \sin kt$$

t для $n = 12$ задается как:

$$0; \frac{1}{6}\pi; \frac{1}{3}\pi; \frac{1}{2}\pi; \frac{2}{3}\pi; \frac{5}{6}\pi; \pi; \frac{7}{6}\pi; \frac{4}{3}\pi; \frac{3}{2}\pi; \frac{5}{3}\pi; \frac{11}{6}\pi$$

ПРИМЕР ПОСТРОЕНИЯ МОДЕЛИ СЕЗОННЫХ КОЛЕБАНИЙ (на основе первой гармоники Фурье)

Месяц	t	yt	cost	sint	ytcost	ytsint	yteop	ошибки^2
январь	0	10,3	1	0	10,3	0	10,42	0,0144
февраль	0,5236	10,6	0,866	0,5	9,1799	5,3	10,48	0,0133
март	1,0472	10,9	0,5	0,866	5,45	9,4397	10,74	0,0254
апрель	1,5708	11,3	0	1	0	11,3	11,12	0,0324
май	2,0944	11,2	-0,5	0,866	-5,6	9,6995	11,52	0,1029
июнь	2,618	11,7	-0,866	0,5	-10,13	5,85	11,84	0,0184
июль	3,1416	11,8	-1	0	-11,8	0	11,98	0,0324
август	3,6652	12,4	-0,866	-0,5	-10,74	-6,2	11,92	0,2347
сентябрь	4,1888	11,7	-0,5	-0,866	-5,85	-10,13	11,66	0,0017
октябрь	4,7124	11,2	0	-1	0	-11,2	11,28	0,0064
ноябрь	5,236	10,8	0,5	-0,866	5,4	-9,353	10,88	0,0063
декабрь	5,7596	10,5	0,866	-0,5	9,0933	-5,25	10,56	0,0042
Итого		134,4			-4,698	-0,546	134,4	0,4924
	ao=134,4/12=11,2		a1=(2(-4,7))/12=-0,78		b1=2(-0,5)/12=-0,08			
			St=	0,2339	Vt=	0,17%		


Модель сезонных колебаний
на основе первой гармоники Фурье
13
12
11
10
9
8
7
январь
февраль
март
апрель
май
июнь
июль
август
сентябрь
октябрь
ноябрь
декабрь
yt
yteop

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ СГЛАЖИВАНИЕ

В случае, когда условия формирования показателя в динамике различаются, необходимо учитывать информацию о показателе не равномерно, как при использовании уравнения регрессии от времени, а с учетом роли этой информации: более поздним данным надо придать больший вес, чем более ранним. Для этого используется метод экспоненциального сглаживания.

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ СГЛАЖИВАНИЕ

Этот метод обеспечивает

- получение прогноза на период вперед;
- позволяет скорректировать дальнейший прогноз с учетом различий между фактическим и спрогнозированным результатом.

Из-за простоты модели и точности прогнозов этот метод получил большое распространение

Простая модель экспоненциального сглаживания

Новый прогноз = альфа(фактический результат за последний период)+(1-альфа)(прогноз на последний период)

$$F_{t+1}=aA_t+(1-a)F_t$$

Константа альфа выбирается исследователем из отрезка [0;1].

В условиях стабильности часто [0,2;0,4].

В условиях нестабильности часто [0,7;0,9].

ПРИМЕР

Пусть a=0,8; тогда 1-a=0,2.

Номер квартала	Фактические значения объема продаж, A_t	Прогноз объема продаж, F_t
1	4	3 (дано)
2	6	$0,8A_t+0,2F_t=0,8*4+0,2*3=3,8$
3		0,8*6+0,2*3,8=5,6

Excel позволяет провести простое экспоненциальное сглаживание в пакете Анализ данных. В графе фактор затухания нужно указать 1-a, по умолчанию a=0,7.

Экспоненциальное сглаживание с поправкой на тренд

Если в динамике показателя есть тренд, то для большей точности нужно корректировать результаты простого экспоненциального сглаживания с поправкой на тренд по формуле:

Прогноз с учетом тренда $FIT_t =$

F_t (прогноз)+ T_t (тренд)

$T_t = (1-b)\,T_{t-1} + b(F_t - F_{t-1})$,

b – выбранная константа сглаживания

Начальное значение тренда получено как предположение.

ПРИМЕР

Пусть T1=0, b=0,4

F_t	F_t-F_{t-1}	T_t	FIT_t=F_t+T_t
3	-	0	3
3,8	3,8-3=0,8	(1-0,4)*0+0,4*(3,8-3)=0,32	4,12
5,6	1,8	0,9	6,5

Относительная ошибка прогноза определяется как отношение ошибки прогноза $Д_{t+p} = \hat{y}_{t+p} - y_{t+p}$ к действительному значению переменной, выраженное в процентах:

$$д_{t+p} = \frac{Д_{t+p}}{y_{t+p}} \cdot 100\% = \frac{\hat{y}_{t+p} - y_{t+p}}{y_{t+p}} \cdot 100\%.$$

Средняя ошибка прогноза

Х. Тейл предложил использовать *стандартную среднеквадратическую ошибку*:

$$U = \sqrt{\frac{\frac{1}{k}\sum(\Delta\hat{y}_{t+p} - \Delta y_{t+p})^2}{\frac{1}{k}\sum(\Delta y_{t+p})^2}}.$$

Здесь k – количество прогнозных периодов. Данный показатель обладает существенным достоинством. Все его значения лежат в интервале от нуля до единицы ($0 \le U \le 1$).

При абсолютно точных прогнозах числитель дроби (12.54) будет равен нулю. Следовательно, $U = 0$.

При "наивном" прогнозе об отсутствии всяких изменений ($\Delta\hat{y}_{t+p} = 0$) числитель дроби (12.54) совпадает со знаменателем. Следовательно, $U = 1$. Очевидно, прогноз по модели, учитывающей доминирующие факторы развития исследуемой величины, должен быть, по крайней мере, не хуже "наивного" прогноза.

Таким образом, близость значения U к нулю является признаком достаточно качественного прогноза.

LOGO

Thank You !

www.themegallery.com