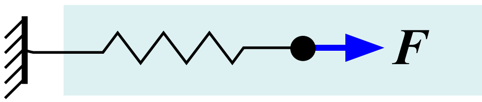
Вынужденные колебания. Резонанс

Линейный осциллятор при наличии трения и действии внешних сил



$F = F_0 \cos \omega t$ – внешняя сила

Уравнение движения

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} + F_0 \cos \omega t \;\Big|\; : m \quad \Longrightarrow \quad \left(\gamma = \frac{b}{2m}, \;\; \omega_0^2 = \frac{k}{m} \right)$$

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

– уравнение вынужденных колебаний

Согласно теории дифференциальных уравнений решение имеет вид

$$x(t) = x_0(t) + x_1(t)$$

$x_0(t)$ – общее решение однородного уравнения

$x_1(t)$ – частное решение неоднородного уравнения

Вынужденные колебания. Резонанс

$$x_0 = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t + \varphi) \;\to\; 0$$

$$x(t) = x_1(t)$$ – установившиеся колебания

Уравнение вынужденных колебаний преобразуем к комплексному виду

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = (F_0/m)e^{i\omega t}$$

Решение ищем в виде $x = Ae^{i\beta t}$

$$Ae^{i\beta t}(-\beta^2 + 2i\gamma\beta + \omega_0^2) = (F_0/m)e^{i\omega t}$$

$$\begin{cases} \beta = \omega \\ A = \dfrac{F_0}{m}\dfrac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega} = \dfrac{F_0}{m}\dfrac{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} \end{cases}$$

Вынужденные колебания. Резонанс

$$A = A_0 e^{i\varphi}$$

$$A_0 = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$$

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{2\gamma\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

$$x = A_0 e^{i(\omega t + \varphi)}$$ – комплексное решение

$$x = A_0 \cos(\omega t + \varphi)$$ – действительное решение

Вынужденные колебания. Резонанс

Малое затухание $\gamma \ll \omega_0$

Случай 1 $\omega \ll \omega_0$

$$A_0 \approx \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{k}, \quad \varphi \approx 0$$

Характер движения определяет сила упругости, влияние силы трения и инертности мало

$$\cancelto{0}{\ddot{x} + 2\gamma\dot{x}} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t \quad \Longrightarrow$$

$$x = \frac{F_0}{k}\cos\omega t$$

Вынужденные колебания. Резонанс

Малое затухание $\gamma \ll \omega_0$

Случай 2 $\omega \gg \omega_0$

$$A_0 \approx \frac{F_0}{m\omega^2}, \quad \varphi \approx \pi$$

Характер движения определяет инертность, влияние силы упругости и силы трения мало

$$\ddot{x} + \cancelto{0}{2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x} = \frac{F_0}{m}\cos\omega t \quad \Rightarrow$$

$$x = -\frac{F_0}{m\omega^2}\cos\omega t$$

Вынужденные колебания. Резонанс

Малое затухание $\gamma \ll \omega_0$

Случай 3 $\omega \approx \omega_0$ Случай *резонанса*

$$A_0 \approx \frac{F_0}{m}\frac{1}{2\gamma\omega_0}, \quad \varphi \approx -\frac{\pi}{2}$$

Характер движения определяет сила трения,
сила упругости обеспечивает ускорение системы

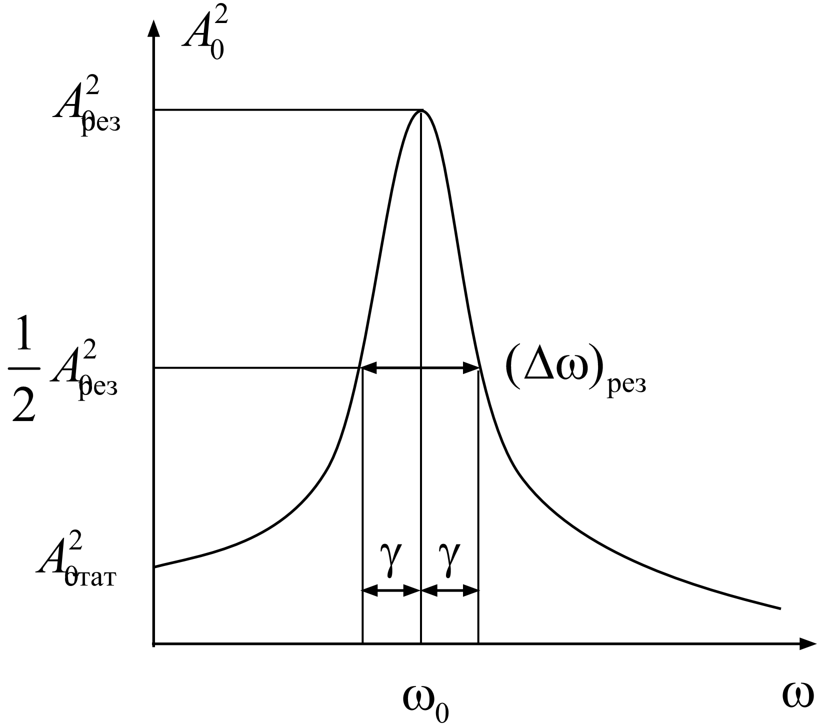
$$\overbrace{\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x}^{0} = \frac{F_0}{m}\cos\omega t$$

$$x = \frac{F_0}{2m\gamma\omega_0}\sin\omega_0 t$$

Вынужденные колебания. Резонанс

Резонансные характеристики осциллятора

Добротность



Резонансная кривая

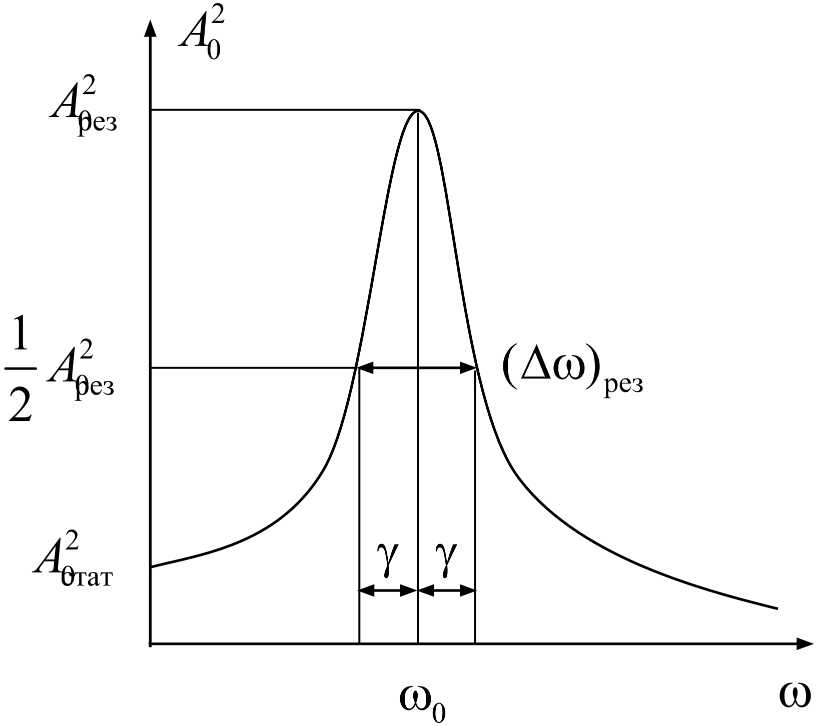
$$Q = \frac{A_{рез}}{A_{стат}} = \left(\frac{F_0}{2m\gamma\omega_0}\right) : \left(\frac{F_0}{k}\right) = \frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{2\pi}{2\gamma T}$$

$$Q = \frac{\pi}{\theta} = \pi N_e$$ – *добротность*

Вынужденные колебания. Резонанс

Резонансные характеристики осциллятора

Избирательность (ширина резонансной кривой)



Резонансная кривая

В окрестности ω_0 $\left(\Delta\omega = \omega - \omega_0\right)$

$$A_0^2 \approx \left(\frac{F_0}{m}\right)^2 \frac{1}{4\gamma^2\omega_0^2}\frac{1}{1+(\Delta\omega/\gamma)^2}$$

ширина резонансной кривой

$$(\Delta\omega)_{рез} = 2\gamma$$

$$(\Delta\omega)_{рез} = \frac{\omega_0}{Q}$$