

МЕТОД ХОРД

Историческая справка

Первым, кто смог найти приближенные решения кубических уравнений, был Диофант, тем самым заложив основу метода хорд. Сохранившиеся работы Диофанта сообщают об этом. Однако первым, кто понял его методы, был Ферма в XVII веке, а первым, кто дал объяснение методу хорд, был Ньютон(1670-е гг.).

Метод хорд — итерационный метод нахождения корня уравнения. Суть метода состоит в разбиении начального отрезка на части, определяемые с помощью точки пересечения хорды – отрезка, соединяющего точки, соответствующие значениям функции на концах отрезка, с осью Ox.

Геометрическое описание

Будем искать корень функции f(x). Выберем две начальные точки $C_1(x_1;y_1)$ и $C_2(x_2;y_2)$ и проведем через них прямую. Она пересечет ось абсцисс в точке $(x_3;0)$. Теперь найдем значение функции с абсциссой x_3. Временно будем считать x_3 корнем на отрезке $[x_1;x_2]$. Пусть точка C_3 имеет абсциссу x_3 и лежит на графике. Теперь вместо точек C_1 и C_2 мы возьмём точку C_3 и точку C_2. Теперь с этими двумя точками проделаем ту же операцию и так далее, т.е. будем получать две точки C_{n+1} и C_n и повторять операцию с ними. Таким образом мы будем получать две точки, отрезок, соединяющий которые, пересекает ось абсцисс в точке, значение абсциссы которой можно приближенно считать корнем. Эти действия нужно повторять до тех пор, пока мы не получим значение корня с нужным нам приближением.

Алгебраическое описание метода

Пусть x_1, x_2 − абсциссы концов хорды, $y = kx + b$ − уравнение прямой, содержащей хорду. Найдем коэффициенты k и b из системы уравнений:

$$\begin{cases} f(x_1) = kx_1 + b, \\ f(x_2) = kx_2 + b. \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения второе:

$f(x_1) - f(x_2) = k(x_1 - x_2)$, затем найдем коэффициенты k и b:

$$k = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

тогда $b = f(x_1) - \dfrac{(f(x_2) - f(x_1))x_1}{x_2 - x_1}$

Уравнение принимает вид: $y = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1)$

Таким образом, теперь можем найти первое приближение к корню, полученное методом хорд:

$$x_3 = x_1 - \frac{(x_2 - x_1) f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)}$$

Теперь возьмем координаты x_2 и x_3 и повторим все проделанные операции, найдя новое приближение к корню. Повторять операцию следует до тех пор, пока $|x_n - x_{n-1}|$ не станет меньше или равно заданному значению погрешности.

Пример. Методом хорд найти положительный корень уравнения $x^4-2x-4=0$ с точностью до 0,01.

Решение. Положительный корень заключен в промежутке (1; 2), так как $f(1)=-5<0$, а $f(2)=8>0$.

$$x_1=1-\frac{(2-1)\cdot f(1)}{f(2)-f(1)}=1-\frac{-5}{8-(-5)}=1+\frac{5}{13}=1+0{,}385=1{,}385$$

Так как $f(1{,}385)=1{,}385^4-1{,}385\cdot 2-4=3{,}680-2{,}770-4=-3{,}090<0$, то метод хорд применяется к интервалу (1,385; 2):

$$x_2=1{,}385-\frac{(2-1{,}385)\cdot f(1{,}385)}{f(2)-f(1{,}385)}=1{,}385-\frac{0{,}615\cdot(-3{,}090)}{8-(-3{,}090)}=1{,}385+\frac{1{,}900}{11{,}090}=1{,}385+0{,}171=1{,}556$$

Так как $f(1{,}556)=1{,}556^4-1{,}556\cdot 2-4=5{,}862-3{,}112-4=-1{,}25<0$, то метод хорд применяется к интервалу (1,556; 2):

$$x_3=1{,}556-\frac{(2-1{,}556)\cdot f(1{,}556)}{f(2)-f(1{,}556)}=1{,}556-\frac{0{,}444\cdot(-1{,}25)}{8-(-1{,}25)}=1{,}556+\frac{0{,}555}{9{,}25}=1{,}556+0{,}060=1{,}616$$

Так как $f(1{,}616)=1{,}616^4-1{,}616\cdot 2-4=6{,}820-3{,}232-4=-0{,}412<0$, то метод хорд применяется к интервалу (1,616; 2):

$$x_4=1{,}616-\frac{(2-1{,}616)\cdot f(1{,}616)}{f(2)-f(1{,}616)}=1{,}616-\frac{0{,}384\cdot(-0{,}412)}{8-(-0{,}412)}=1{,}616+\frac{0{,}158}{8{,}412}=1{,}616+0{,}019=1{,}635$$

Так как $f(1{,}635)=1{,}635^4-1{,}635\cdot 2-4=7{,}146-3{,}270-4=-0{,}124<0$, то метод хорд применяется к интервалу (1,635; 2):

$$x_5=1{,}635-\frac{(2-1{,}635)\cdot f(1{,}635)}{f(2)-f(1{,}635)}=1{,}635-\frac{0{,}365\cdot(-0{,}124)}{8-(-0{,}124)}=1{,}635+\frac{0{,}045}{8{,}124}=1{,}635+0{,}006=1{,}641$$

Так как $f(1{,}641)=1{,}641^4-1{,}641\cdot 2-4=7{,}252-3{,}282-4=-0{,}030<0$, то метод хорд применяется к интервалу (1,641; 2):

$$x_6=1{,}641-\frac{(2-1{,}641)\cdot f(1{,}641)}{f(2)-f(1{,}641)}=1{,}641-\frac{0{,}359\cdot(-0{,}030)}{8-(-0{,}030)}=1{,}641+\frac{0{,}011}{8{,}030}=1{,}641+0{,}001=1{,}642$$

Следовательно, искомый корень с точностью до 0,01 равен 1,64.

Пример использования

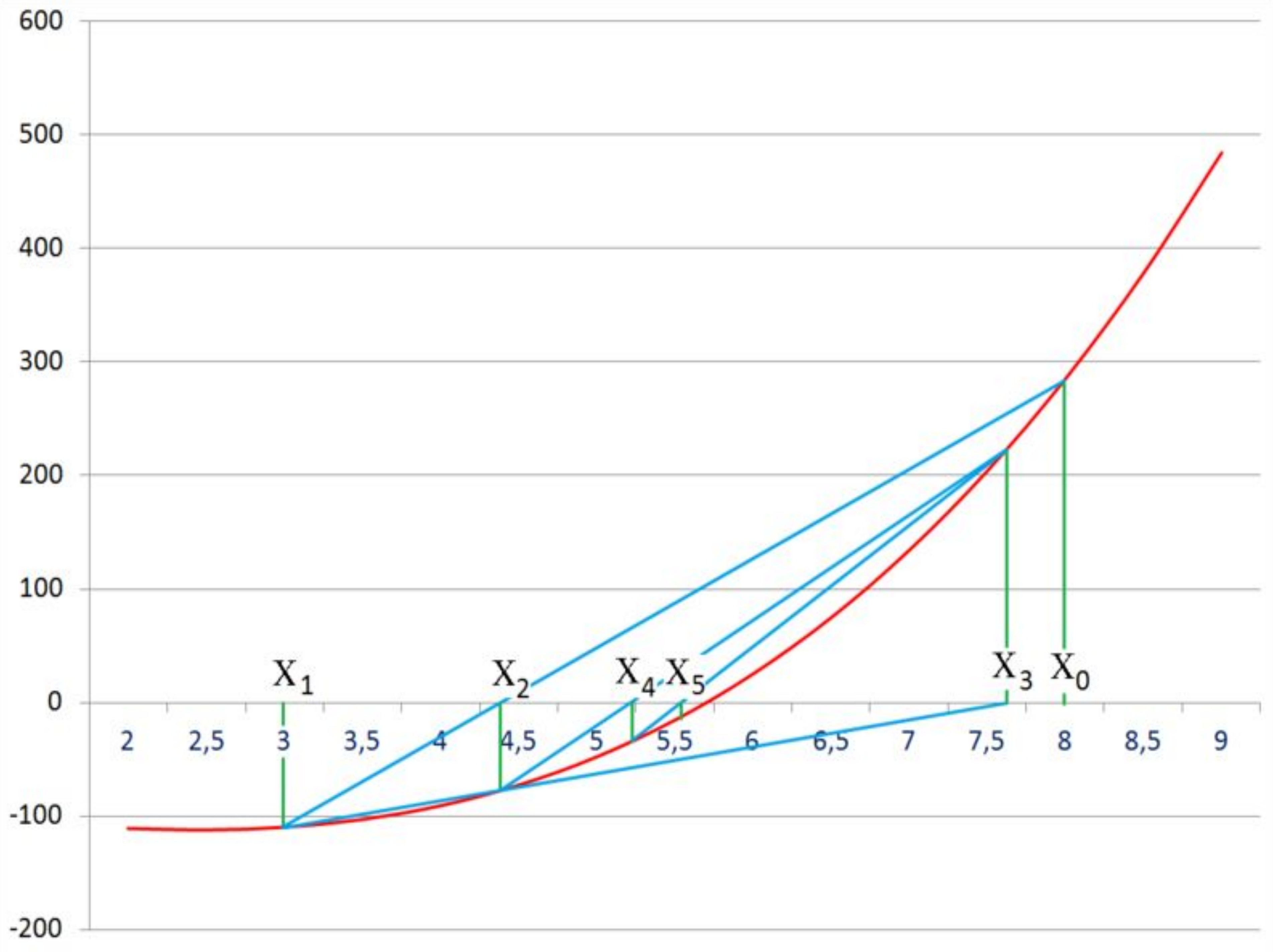
Решим уравнение $x^3 - 18 * x - 83 = 0$ методом хорд. Зададимся точностью ε=0.001 и возьмём в качестве начальных приближений x_0 и x_1 концы отрезка, на котором отделён корень: $x_0 = 8$ и $x_1 = 3$. Вычисления ведутся до тех пор, пока не выполнится неравенство: $|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon$

Итерационная формула метода хорд имеет вид:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i) * (x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$$

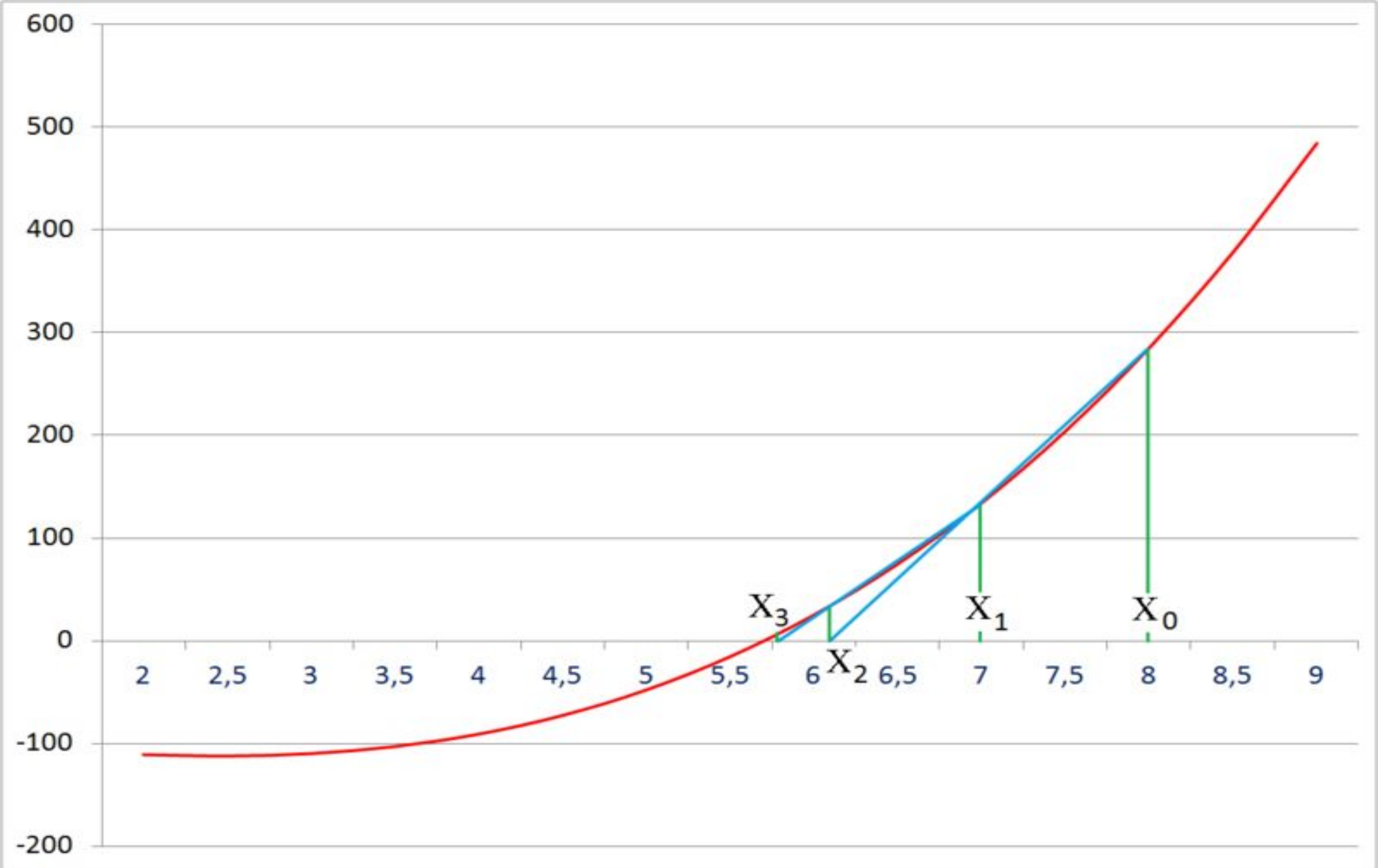
По этой формуле последовательно получаем:

$$x_2 = 4.3924051$$
$$x_3 = \underline{5},1622721$$
$$x_4 = \underline{5}.4988422$$
$$x_5 = 5,6295040$$
$$x_6 = \underline{5.6}777792$$
$$x_7 = \underline{5.6}952826$$
$$x_8 = \underline{5.705}9290$$
$$x_9 = \underline{5.70}38490$$
$$x_{10} = \underline{5.704}6613$$
$$x_{11} = \underline{5.704}9528$$


600
500
400
300
200
100
0
-100
-200
2
2,5
3
3,5
4
4,5
5
5,5
6
6,5
7
7,5
8
8,5
9
X1
X2
X4
X5
X3
X0

Проверим, что метод работает и в том случае, если x_0 и x_1 выбраны по одну и ту же сторону от корня (то есть, если корень не отделён на отрезке между начальными приближениями). Возьмём для того же уравнения $x_0 = 8$ и $x_1 = 7$. Тогда:

$$
\begin{aligned}
x_2 &= 6.1125828\\
x_3 &= \underline{5}.8452240\\
x_4 &= \underline{5.7}546403\\
x_5 &= \underline{5.7}227874\\
x_6 &= \underline{5.7}114425\\
x_7 &= \underline{5.70}73836\\
x_8 &= \underline{5.705}9290\\
x_9 &= \underline{5.705}4075
\end{aligned}
$$



Мы получили то же значение корня, причём за то же число итераций.

Критерий сходимости

Если $f(x)$

дважды непрерывно дифференцируемая

функция и знак $f''(x)$

сохраняется на рассматриваемом промежутке, то полученные приближения будут сходиться к корню монотонно. Если корень ξ

уравнения $f(\xi) = 0$

находится на отрезке [a,b], то производные $f'(x)$

и $f''(x)$

на этом промежутке непрерывны и сохраняют постоянные знаки и $f''(a)f(a) > 0$

то можно доказать, что погрешность приближенного решения стремится к нулю при $n \to \infty$, то есть метод сходится и имеет при этом линейную скорость сходимости. (Сходится со скоростью геометрической прогрессии.)

Задачи для самостоятельного выполнения

- 1)Определить количество действительных корней уравнения x^3-ax+b, отделить эти корни, и применяя метод хорд и касательных, найти их приближенное значение с точностью 0,01 a=4,b=-6
- 2)x2^x-1=0
- Нахождение корня уравнения методом хорд с точностью 0.01.