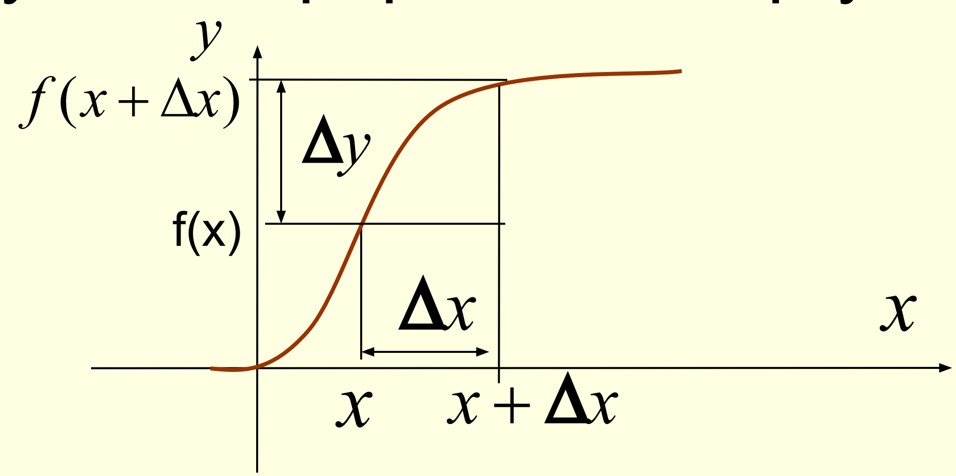
Дифференциальное исчисление функций одной переменной

- Определение производной. Ее геометрический и физический смысл.
- Связь между непрерывностью и дифференцируемостью функции. Необходимое условие существования производной.
- Правило дифференциорания функций.
- Производная сложной и обратной функции.
- Производные основных элементарных функций.
- Дифференцирование неявных и параметрически заданных функций.
- Производные высших порядков.
- Дифференциал функции. Свойства дифференциала.

Приращение функции и аргумента

- Пусть функция $y = f(x)$ определена на промежутке X. Рассмотрим точку $x \in X$
- Разность $\Delta x \neq 0$ называется ***приращением аргумента*** x.
- Разность $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ называется ***приращением функции*** y=f(x) в точке x, соответствующее приращению аргумента Δx.



Определение производной функции

Определение

Производной функции y=f(x) в точке x называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

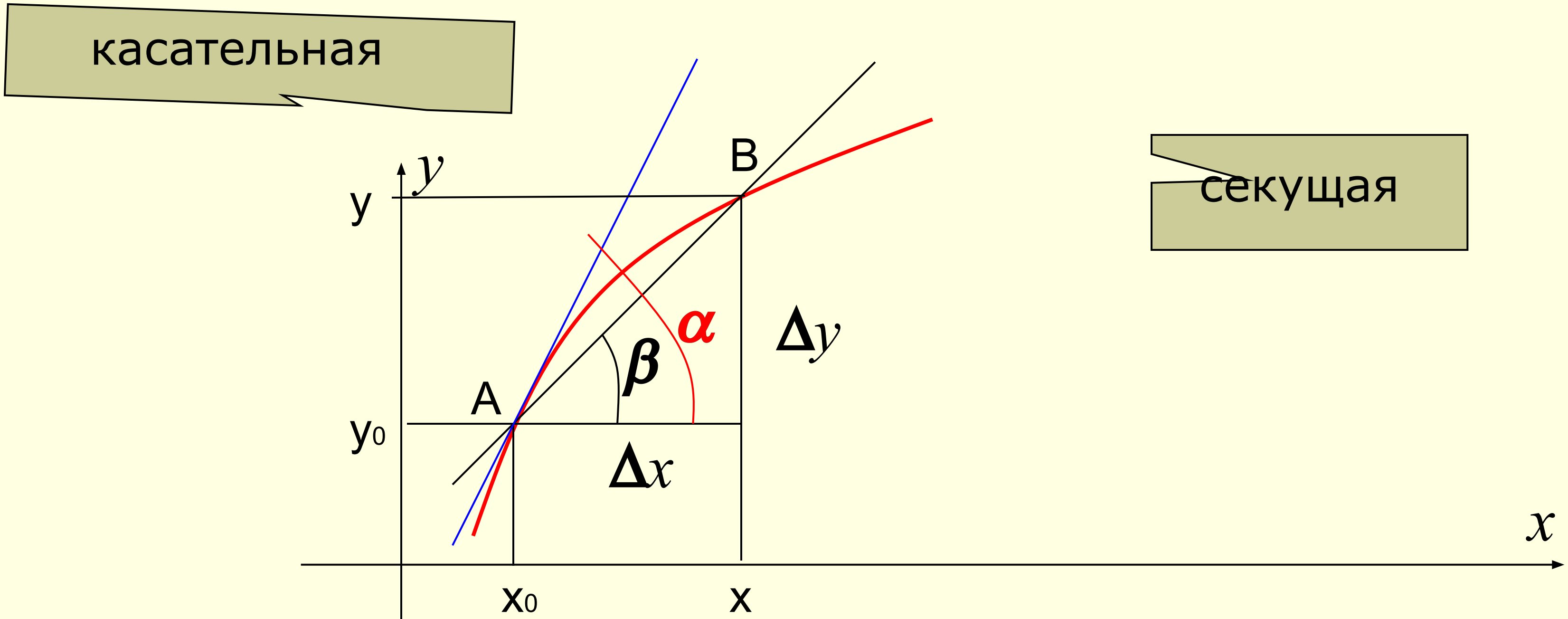
$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Обозначения производной: $y', f'(x), \frac{dy}{dx}, \frac{df}{dx}, y$

Если функция y=f(x) в точке x имеет конечную производную, то функция y=f(x) называется дифференцируемой в этой точке.

Функция, дифференцируемая во всех точках промежутка X, называется дифференцируемой на этом промежутке.

Геометрический смысл производной функции



- Отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\beta$ равно тангенсу угла наклона секущей к оси абсцисс, а производная

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} tg\boldsymbol{\beta} = tg\boldsymbol{\alpha}$$

равна тангенсу угла наклона касательной к оси абсцисс.

$f'(x) = tg\alpha = k$- угловой коэффициент касательной к графику функции y=f(x)

$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ - уравнение касательной

Правила дифференцирования функций

Производная постоянной равна нулю: $c' = 0, c = const$

Если функции $u(x), v(x)$ имеют производные в точке x, то их сумма $u(x)+v(x)$, произведение $u(x)\cdot v(x)$ и частное $\dfrac{u(x)}{v(x)}, v(x)\neq 0$ также имеют производные в этой точке и справедливы формулы

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Следствие: $(cu)' = cu'$

Производная сложной функции

Теорема
(о производной сложной функции)

Если y=f(u) и u=h(x) дифференцируемые функции от своих аргументов, то производная сложной функции y=f(h(x)) существует и равна

$$y' = (f(h(x)))' = f'(h(x)) \cdot h'(x) \quad \text{или} \quad y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

Пример:

1. $y = \cos^2 x$

$$y' = (\cos^2 x)' = 2\cos x \cdot (-\sin x) = -\sin 2x$$

2. $y = \dfrac{1}{\ln(x^2+1)}$

$$y' = ((\ln(x^2+1))^{-1})' = -1 \cdot (\ln(x^2+1))^{-2} \cdot \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x = \frac{-2x}{(x^2+1) \cdot \ln^2(x^2+1)}$$

Производные основных элементарных функций

$c' = 0,\ c \equiv const$

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}, \quad (\log_a x)' = \dfrac{\log_a e}{x},$

$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(a^x)' = a^x \ln a$

$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(e^x)' = e^x$

$(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

$(\sin x)' = \cos x$

$(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(shx)' = chx$

$(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$(chx)' = shx$

$(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

$(thx)' = \dfrac{1}{ch^2 x}$

$(cthx)' = -\dfrac{1}{sh^2 x}$

Производные высших порядков

$y' = f'(x)$ - производная первого порядка функции y=f(x)

Если функция $f'(x)$ дифференцируемой точке x, то

$y'' = (f'(x))'$ - производная второго порядка функции y=f(x)

Обозначения производной второго порядка:

$$y'', f''(x), \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})$$

………………………………….

$y^{(n)} = (f^{(n-1)}(x))'$ - производная n-ого порядка функции y=f(x)

Производные порядка выше первого называются производными высших порядков.

Понятие дифференциала функции

Определение

Дифференциалом функции y=f(x) называется главная, линейная относительно Δx , часть приращения функции, равная произведению производной функции на приращение независимой переменной

Обозначение: $\boxed{dy = f'(x)\Delta x}$

dy – дифференциал первого порядка

Рассмотрим функцию y=x. Вычислим ее дифференциал:

$$dy = x' \cdot \Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x \Rightarrow dy = \Delta x$$

$$\boxed{dy = f'(x)dx}$$

Дифференциалом функции y=f(x) равен произведению производной этой функции на дифференциал независимой переменной

Найти дифференциал функции

$$f(x) = 3x^2 - \sin(1+2x)$$

$$dy = f'(x) \cdot dx$$

$$dy = (3x^2 - \sin(1+2x))' \cdot dx$$

$$dy = (6x - 2\cos(1+2x)) \cdot dx$$

Свойства дифференциала

Дифференциал постоянной равен нулю: $dc = 0, c = const$

$$d(u+v) = du + dv$$

$$d(u \cdot v) = vdu + udv$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

Следствие: $d(c \cdot u) = c \cdot du$